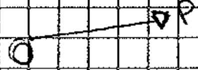
VETTORI LIBERI nello spazio

Def: si dice vettore libero rappresentato dal segmento orientato AB l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio EQUIPOLLENTI ad AB

Un segmento CD si dice EQUIPOLLENTE ad AB se ha la stessa lunghezza, appartiene alla retta di AB o a una retta // e ha verso "COERENTE" con quello di AB

Se u è il vettore libero rappresentato da AB si scrive $u = B - A$

- Se O è un punto dello spazio, c'è una corrispondenza biunivoca tra vettori applicati in O e vettori liberi



1. vettore applicato OP
2. vettore libero P-O ⇝ infiniti

1. vettore libero P-O
2. vettore applicato OP ⇝ uno solo

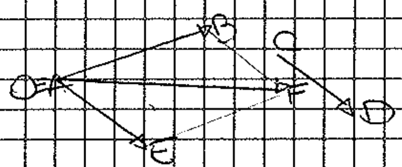
SOMMA

$\bar{u} = B - A$

$\bar{v} = D - C$

$\bar{u} + \bar{v}$?

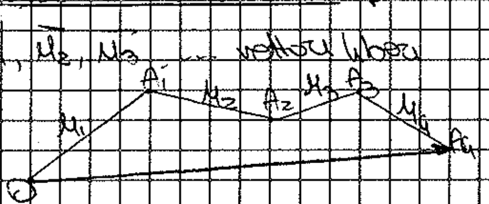
Prendo i segmenti equipollenti a B-A e D-C con origine in O



$\bar{u} + \bar{v}$ è il vettore OF

REGOLA DELLA SPEZZATA per sommare vettori liberi

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \ldots$ vettori liberi



$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = A_4 - O$

$u_1 = A_1 - O$ $\quad u_3 = A_3 - A_2$

$u_2 = A_2 - A_1$ $\quad u_4 = A_4 - A_3$

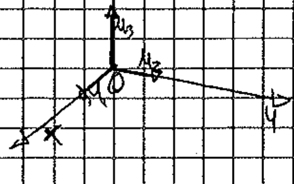
- $\bar{u} = B - A \Rightarrow \bar{v} = A - B$

$\bar{v} = -\bar{u} \Rightarrow \bar{v} + \bar{u} = 0$

OSSERVAZIONE

La terna di simboli $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ viene usata anche per indicare una terna di vettori liberi (rappresentati da tre vettori applicati in un punto O con il 3° prodotto vettoriale dei primi due)

COORDINATE DEI PUNTI



$U_1 = (1,0,0)$ $\quad OU_1 = \hat{i}$

$U_2 = (0,1,0)$ $\quad OU_2 = \hat{j}$

$U_3 = (0,0,1)$ $\quad OU_3 = \hat{k}$

Useremo le lettere $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ anche per indicare i vettori liberi rappresentati da OU_1, OU_2, OU_3

P ha coordinate x, y, z $\Rightarrow$ OP ha componenti x, y, z

$P = (x, y, z) \Leftrightarrow OP = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$P-O = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

- Sia $\bar{v}$ un vettore libero e AB un suo rappresentante con $A=(a_1, a_2, a_3)$ $B=(b_1, b_2, b_3)$
  $\rightarrow \bar{v} = B-A$

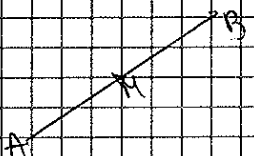
Quali sono le componenti di $\bar{v}$ rispetto alla base $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$?

$$B-A = (B-O) + (O-A) = (B-O) - (A-O) = (b_1\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + b_3\hat{k}) - (a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}) =$$

$$= (b_1 - a_1)\hat{\imath} + (b_2 - a_2)\hat{\jmath} + (b_3 - a_3)\hat{k}$$

$$\underline{B-A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)}$$

APPLICAZIONI



COORDINATE DEL PUNTO MEDIO

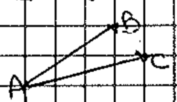
$M = (m_1, m_2, m_3)$

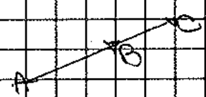
$M-A = B-M$ Passando alle componenti

$$\begin{cases} m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \\ m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \\ m_3 - a_3 = b_3 - m_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m_1 = \frac{b_1 + a_1}{2} \\ m_2 = (b_2 + a_2)/2 \\ m_3 = (b_3 + a_3)/2 \end{array}$$

CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI 3 PUNTI

$A(a_1, a_2, a_3)$ $B(b_1, b_2, b_3)$ $C(c_1, c_2, c_3)$





A, B, C sono allineati $\Rightarrow$ $B-A \parallel C-A$ $\Rightarrow$ le componenti di $B-A$ e $C-A$ sono proporzionali

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ e $(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$ sono proporzionali

$A = (1, -1, 0)$ $B = (3, -4, 2)$ $C = (2, -5, 7)$ sono allineati

$B-A = (2, -3, 2)$ $\Rightarrow$ TERNE NON PROPORZIONALI $\Rightarrow$ A, B, C NON ALLINEATI $\Rightarrow$ A, B, C sono i vertici di un triangolo

$C-A = (1, -4, 7)$

$$\cos B\hat{A}C = \frac{AB \cdot AC}{|AB||AC|} = \frac{(B-A)(C-A)}{|B-A||C-A|} = \frac{28}{\sqrt{17}\sqrt{66}}$$

AREA DI $A\hat{B}C$

$$\cdot\ A = \frac{1}{2} \text{ area parallelogramma} = \frac{1}{2}|(B-A) \wedge (C-A)| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-13\hat{\imath} - 12\hat{\jmath} - 5\hat{k}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{169 + 144 + 25}$$

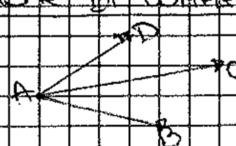
- Quali sono le coordinate di D?

$D = (d_1, d_2, d_3)$

$D - C = B - A$

$$\begin{cases} d_1 - c_1 = b_1 - a_1 \\ d_2 - c_2 = b_2 - a_2 \\ d_3 - c_3 = b_3 - a_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = -8 \\ d_3 = 9 \end{cases} \qquad D = (4, -8, 9)$$

CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DI 4 PUNTI ABCD



A, B, C, D sono complanari se e solo se i vettori applicati AB, AC, AD sono complanari

$$(B-A) \cdot (C-A) \wedge (D-A) = 0$$