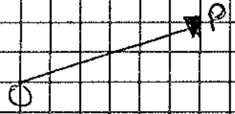
VETTORI APPLICATI

Fissiamo un punto O nello spazio

Def 1: Chiamiamo VETTORE APPLICATO in O ogni segmento OP orientato da O a P



Notazioni: OP, $\bar{u}$, $\underline{v}$, $\vec{w}$

Si ha una corrispondenza biunivoca tra vettori applicati e punti dello spazio diversi da O

$\vec{v} = OP \rightsquigarrow P$

Per avere una corrispondenza biunivoca tra i vettori applicati in O e tutti i punti dello spazio si introduce la nozione di vettore nullo, che è il segmento OO

MODULO: si dice modulo (o norma) del vettore $\bar{v} = OP$ la lunghezza di OP, cioè la distanza di P da O

$|\vec{v}|$ $\|\bar{v}\|$

Il vettore nullo ha modulo 0 (zero)

DIREZIONE: la direzione di $\vec{v} = OP$ è quella della retta che la contiene

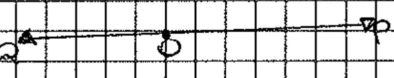
VERSO: verso di percorrenza di OP da O a P

Per il vettore nullo non sono definiti direzione e verso

VETTORI PARALLELI: $\bar{v} = OP$ e $\vec{w} = OQ$ sono detti paralleli se appartengono alla stessa retta r per O, cioè se O, P, Q sono allineati.

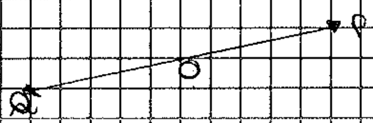
→ CONCORDI: se appartengono alla stessa semiretta

→ DISCORDI: se appartengono a semirette opposte



OPPOSTO: si dice opposto di $\bar{v}$ e si indica con $-\bar{v}$ il vettore parallelo e discorde con $\bar{v}$, con lo stesso modulo

$\bar{w} = OQ$ è l'opposto di OP se Q è il punto simmetrico di P rispetto ad O

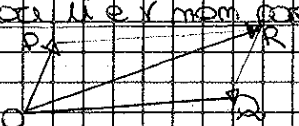


VERSORE: è ogni vettore di modulo 1

SOMMA DI VETTORI

$\bar{u} + \bar{v}$

(I) Vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ non paralleli



la diagonale OR del parallelogramma è per definizione la somma di OP e OQ

(II) Vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ paralleli concordi

$\bar{u} + \bar{v}$ è un vettore parallelo e concorde con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ e il cui modulo è la somma dei due moduli

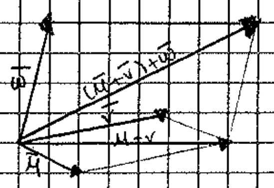
(III) Vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ paralleli discordi

OP + OQ sarà il vettore nullo se OQ è l'opposto di OP. Se $|OP| \neq |OQ|$ la somma sarà il vettore parallelo a OP e OQ con modulo $|OP + OQ| = ||OQ| - |OP||$ e verso del vettore di modulo maggiore

(IV) uno dei vettori $\overline{o}$ è vettore nullo $\overline{O}$ per cui : $\overline{v}+\overline{O}=\overline{v}$ $\forall \overline{v}$

PROPRIETÀ

- $\forall \overline{u}, \overline{v}$ $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$ proprietà commutativa
- $\forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ $(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})$ p. associativa



- Esiste un vettore, il vettore nullo $\overline{O}$, con la proprietà che

$$\overline{O}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{O}=\overline{v}$$

- Per ogni $\overline{v}$ esiste l'opposto, cioè un vettore $\overline{w}=-\overline{v}$ per cui

$$\overline{v}+\overline{w}=\overline{w}+\overline{v}=\overline{O}$$

PRODOTTO PER NUMERI REALI

Sia k un numero reale, $\overline{v}$ un vettore; si indica con $k\overline{v}$ il vettore così definito

- $k\neq 0$, $\overline{v}\neq\overline{O}$

$$k\overline{v}\ \begin{cases} \text{modulo dato da } |k||\overline{v}| \\ \text{direzione: quella di } \overline{v} \\ \text{verso: quello di } \overline{v} \text{ se } k>0 \\ \qquad\text{opposto se } k<0 \end{cases}$$

- se $k=0$, oppure $\overline{v}=\overline{O}$, allora per definizione $k\overline{v}=\overline{O}$

PROPRIETÀ

- $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ $\overline{v}$: $k_1(k_2\overline{v})=(k_1k_2)\overline{v}$
- $1\overline{v}=\overline{v}$
- $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ $\overline{v}$: $(k_1+k_2)\overline{v}=k_1\overline{v}+k_2\overline{v}$
- $k \in \mathbb{R}$, $\overline{v}_1, \overline{v}_2$: $k(\overline{v}_1+\overline{v}_2)=k\overline{v}_1+k\overline{v}_2$

Def: Sono dati n vettori $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n$; si dice COMBINAZIONE LINEARE di $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_n$ con coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ il vettore:

$$\overline{v}=k_1\overline{v}_1+k_2\overline{v}_2+\dots+k_n\overline{v}_n$$

CORRISPONDENZE TRA VETTORI E NUMERI

(I) Consideriamo i vettori appartenenti ad una retta r per O e sceglierne uno (diverso dal vettore nullo: $\overline{u}_0$)

Possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vettori di r e i numeri reali:

$k\in\mathbb{R} \rightsquigarrow \overline{u}=k\overline{u}_0$

Viceversa se $\overline{v}$ è un vettore su r, esiste k per cui $\overline{v}=k\overline{u}_0$

Questa corrispondenza biunivoca tra vettori e numeri reali "rispetta" le operazioni sui vettori

• $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ $\quad \vec{v_1}=k_1\vec{u_0}$, $\vec{v_2}=k_2\vec{u_0}$ $\quad \vec{v_1}+\vec{v_2}=k_1\vec{u_0}+k_2\vec{u_0}=(k_1+k_2)\vec{u_0}$

• $a\in\mathbb{R}$ $\quad \vec{v}=k\vec{u_0}$ $\quad a\vec{v}=a(k\vec{u_0})=(ak)\vec{u_0}$

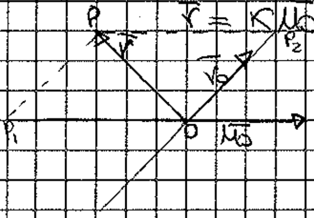
(II) Consideriamo i vettori di un piano per O. Fissiamo 2 vettori del piano non paralleli.

Possiamo determinare una corrispondenza biunivoca tra i vettori del piano e $\mathbb{R}^2$ (cioè l'insieme delle coppie ordinate (k,h) di numeri reali)

$(k,h)\in\mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{v}=k\vec{u_0}+h\vec{v_0}$

Viceversa, per ogni vettore $\vec{v}$ del piano esistono due numeri (k,h) per cui

$\vec{v}=k\vec{u_0}+h\vec{v_0}$



$\boxed{\vec{v}=\vec{OP}=\vec{OP_1}+\vec{OP_2}=k\vec{u_0}+h\vec{v_0}}$

$\exists k \quad \vec{OP_1}=k\vec{u_0}$

$\exists h \quad \vec{OP_2}=h\vec{v_0}$

$\vec{v}$ è combinazione lineare di $\vec{u_0}$ e $\vec{v_0}$ con coefficienti k e h

PROPRIETÀ

• $\vec{v}=k\vec{u_0}+h\vec{v_0}$, $\vec{v_1}=k_1\vec{u_0}+h_1\vec{v_0}$ $\Rightarrow \vec{v}+\vec{v_1}=(k+k_1)\vec{u_0}+(h+h_1)\vec{v_0}$

• $a\in\mathbb{R}$

$a\vec{v}=(ak)\vec{u_0}+(ah)\vec{v_0}$

(III) Vettori nello spazio

Fissiamo tre vettori $\vec{u_0},\vec{v_0},\vec{w_0}$ non complanari. Si può definire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori e $\mathbb{R}^3$ (cioè l'insieme delle terne ordinate dei numeri reali)

$(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{v}=a\vec{u_0}+b\vec{v_0}+c\vec{w_0}$

Viceversa, dato un vettore $\vec{v}$, esistono 3 numeri a,b,c per cui $\vec{v}=a\vec{u_0}+b\vec{v_0}+c\vec{w_0}$

Nel caso generale si pensa OP come diagonale di un parallelepipedo con i lati uscenti da O sulle rette che contengono $\vec{u_0}, \vec{v_0}, \vec{w_0}$

$\vec{v}=a\vec{u_0}+b\vec{v_0}+c\vec{w_0}$, $\vec{v_1}=a'\vec{u_0}+b'\vec{v_0}+c'\vec{w_0}$ $\Rightarrow$ $\vec{v_1}+\vec{v}=(a+a')\vec{u_0}+(b+b')\vec{v_0}+(c+c')\vec{w_0}$, $k\vec{v}=(ka)\vec{u_0}+(kb)\vec{v_0}+(kc)\ldots$

Si dice che:

• $\vec{u_0}\neq\vec{0}$ forma una BASE per i vettori della retta a cui appartiene

Se $\vec{v}=a\vec{u_0}$, a si dice COMPONENTE di $\vec{v}$ rispetto alla base $(\vec{u_0})$

• Una coppia ordinata $(\vec{u_0},\vec{v_0})$ di vettori non // forma una base per i vettori del piano che contiene $\vec{u_0}$ e $\vec{v_0}$.

Se $\vec{v}=a\vec{u_0}+b\vec{v_0}$, i numeri a,b si dicono COMPONENTI di $\vec{v}$ rispetto alla base $(\vec{u_0},\vec{v_0})$

• Una terna ordinata $(\vec{u_0},\vec{v_0},\vec{w_0})$ di vettori non complanari forma una base per i vettori dello sp

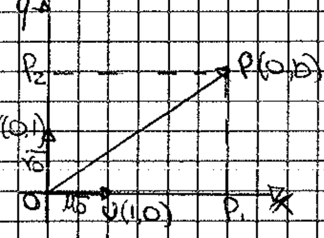
Se $\vec{v}=a\vec{u_0}+b\vec{v_0}+c\vec{w_0}$, a,b,c si dicono COMPONENTI di $\vec{v}$ rispetto alla base

Si scrive anche $\bar v=(a,b,c)$, se la base non viene cambiata

$\bar v=(1,-1,5)$ $\quad \bar w=(0,3,\frac{1}{2})$

$5\bar v+6\bar w=5(1,-1,5)+6(0,3,\frac{1}{2})=(5,13,28)$

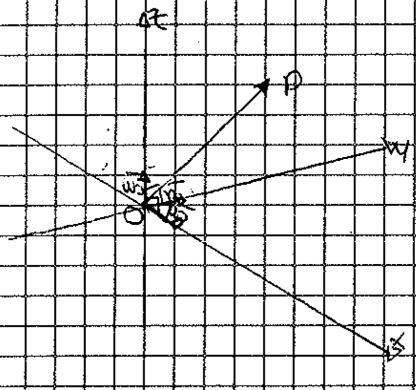
PIANO CARTESIANO - Componenti di vettori e coordinate di punti



$OP=OP_1+OP_2=a\,OU+b\,OV=a\bar u_0+b\bar v_0$

Le componenti di OP rispetto alla base OU, OV sono l'ascissa e l'ordinata di P

Riferimento cartesiano nello spazio:



3 rette per O a due a due ortogonali

OP si può esprimere come combinazione lineare di $\bar u_0, \bar v_0, \bar w_0$

$OP=\underbrace{x\bar u_0}_{OP_1}+\underbrace{y\bar v_0}_{OP_2}+\underbrace{z\bar w_0}_{OP_3}$

(x, y, z) si dicono COORDINATE di P $\begin{cases} x & \text{ascissa} \\ y & \text{ordinata} \\ z & \text{quota} \end{cases}$

Una base come quella indicata si denota usualmente con le lettere $\bar i\ \bar j\ \bar k$

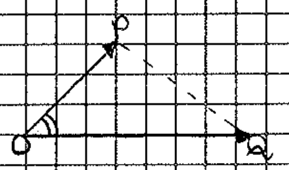
→ $\bar i\ \bar j\ \bar k$ sono VERSORI (cioè di modulo 1) a due a due ortogonali
con il verso di $\bar k$ definito a partire dai versi di $\bar i$, $\bar j$ dalla "regola della mano destra"

PRODOTTO SCALARE

Sia V l'insieme dei vettori dello spazio applicati in un punto O.
vettore è un segmento OP orientato da O a P

ANGOLO tra vettori applicati

- $\bar u=OP$, $\bar v=OQ$ non paralleli



Si indica con $\widehat{\bar u\bar v}$ (e si dice angolo tra $\bar u$ e $\bar v$) la misura in radianti dell'angolo $P\hat{O}Q$

- se $\bar u$ e $\bar v$ sono // e concordi, per definizione $\widehat{\bar u\bar v}=0$
- se $\bar u$ e $\bar v$ sono // e discordi, per definizione $\widehat{\bar u\bar v}=\pi$

↓

In generale risulta: $0\le\widehat{\bar u\bar v}\le\pi$

Def prodotto scalare:
- se $\bar u, \bar v$ sono non nulli: $\bar u\cdot\bar v=|\bar u||\bar v|\cos\widehat{\bar u\bar v}$ $\qquad \langle \bar u,\bar v\rangle$, $\langle \bar u|\bar v\rangle$
- se uno dei vettori è il vettore nullo: $\bar u\cdot\bar v=0$

Il prodotto scalare è $\bar u\cdot\bar v=0$ se $\bar u\perp\bar v$ (appartengono a rette ⊥ tra loro)

Def: Diciamo vettori $\bar u, \bar v$ ortogonali se $\bar u\cdot\bar v=0$

→ $\bar u\cdot\bar v>0$ se $\cos\widehat{\bar u\bar v}>0$ → $0\le\widehat{\bar u\bar v}<\frac{\pi}{2}$

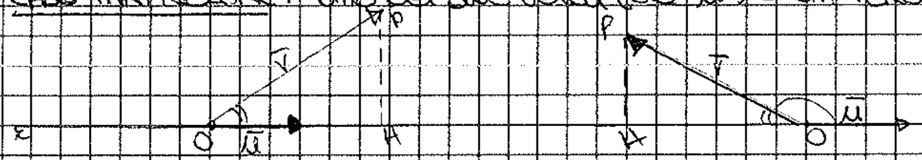
$\bar u\cdot\bar v<0$ se $\frac{\pi}{2}<\widehat{\bar u\bar v}\le\pi$

In particolare: $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2 > 0$ se $\bar{u} \neq \bar{0}$

PROPRIETÀ:

- $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$ commutativo
- $\bar{u}\cdot(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \bar{u}\cdot\bar{v}_1 + \bar{u}\cdot\bar{v}_2$
- $k\in\mathbb{R}$, $\bar{u}\cdot(k\bar{v}) = (k\bar{u})\cdot\bar{v} = k(\bar{u}\cdot\bar{v})$

CASO PARTICOLARE: uno dei due vettori (sia $\bar{u}$) è un versore



$|OH| = |\bar{v}|\cdot\cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} = \bar{u}\cdot\bar{v}$ $\qquad$ $|OH| = |\bar{v}|\cos(\pi - \widehat{\bar{u}\bar{v}}) = -|\bar{v}|\cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} = -\bar{u}\cdot\bar{v}$

$\vec{OH} = (\bar{u}\cdot\bar{v})\hat{u}$ $\qquad$ $\vec{OH} = (\bar{u}\cdot\bar{v})\hat{u}$

Si dice che il prodotto scalare di un vettore $\bar{v}$ per un versore $\hat{u}$ dà la misura con segno della proiezione ortogonale di $\bar{v}$ sulla retta che contiene $\hat{u}$

⇝ IN COMPONENTI

Fissiamo una base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ formata da tre versori a due a due ortogonali

Siano $\bar{u} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$

$\bar{v} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3)\cdot(b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) =$ $\qquad$ $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 = 1 = \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 = \bar{e}_3\cdot\bar{e}_3$, $\quad \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = 0 = \bar{e}_1\cdot\bar{e}_3 = \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3$

$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

$\bar{u} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$
$\bar{v} = \bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$ $\qquad$ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 = -3$

- $\bar{u}\cdot\bar{u} = \begin{cases} |\bar{u}|^2 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{cases} \Rightarrow |\bar{u}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

- $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} \Rightarrow \cos\widehat{\bar{u}\bar{v}} = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

PRODOTTO VETTORIALE tra due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ $\qquad$ $\bar{u}\wedge\bar{v} = \bar{u}\times\bar{v}$

Def: · se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono paralleli, $\bar{u}\wedge\bar{v}$ è per definizione il vettore nullo

· se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ non sono paralleli $\bar{u}\wedge\bar{v}$ è il vettore definito da:

- $|\bar{u}\wedge\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\widehat{\bar{u}\bar{v}}$
- $\bar{u}\wedge\bar{v}$ è ortogonale sia a $\bar{u}$ che a $\bar{v}$, cioè appartiene alla retta per O perpendicolare al piano che contiene $\bar{u}, \bar{v}$
- verso dato dalla regola della mano destra $\quad$ $\bar{u}$ pollice, $\bar{v}$ indice, $\bar{u}\times\bar{v}$ medio

· $\bar{u}\wedge\bar{v} = \bar{0}$ se e solo se $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono paralleli

PROPRIETÀ:

- $\bar{u}\times\bar{v} = -\bar{v}\times\bar{u}$ anticommutativo
- $\bar{u}\times(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \bar{u}\times\bar{v}_1 + \bar{u}\times\bar{v}_2$

  $(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\times\bar{v} = \bar{u}_1\times\bar{v} + \bar{u}_2\times\bar{v}$
- $k\in\mathbb{R}$ $\quad k(\bar{u}\times\bar{v}) = (k\bar{u})\times\bar{v} = \bar{u}\times(k\bar{v})$
- NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA!

  $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} \neq \bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})$

⇝ IN COMPONENTI

Fissiamo una base $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ ORTONORMALE (3 vettori ortogonali versori) positiva, cioè tale che

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$\bar{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\bar{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\bar{u}\times\bar{v} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) =$$

$$= a_1b_2\,\hat{i}\times\hat{j} + a_1b_3\,\hat{i}\times\hat{k} + a_2b_1\,\hat{j}\times\hat{i} + a_2b_3\,\hat{j}\times\hat{k} + a_3b_1\,\hat{k}\times\hat{i} + a_3b_2\,\hat{k}\times\hat{j} =$$

$$= (a_1b_2-a_2b_1)\hat{k} - (a_1b_3-a_3b_1)\hat{j} + (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i} =$$

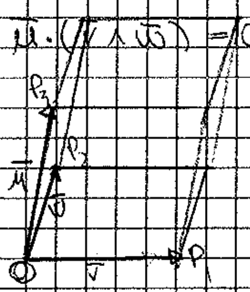
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{k} =$$

$$\boxed{\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

PRODOTTO MISTO (o triplo) di TRE VETTORI APPLICATI

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\wedge\bar{w})$ è un numero reale

- $\bar{u}\cdot(\bar{v}\wedge\bar{w})=0$ se e solo se $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ appartengono ad uno stesso piano, cioè sono COMPLANARI



$\bar{u}\cdot(\bar{v}\wedge\bar{w}) = |\bar{u}||\bar{v}\wedge\bar{w}|\cos\widehat{\bar{u}(\bar{v}\wedge\bar{w})}$

$|\bar{u}|$ = misura del segmento OP_3

$|\bar{v}\wedge\bar{w}| = |\bar{v}||\bar{w}|\sin\varphi$ = base × altezza del parallelogramma = area del parallelogramma

$|\bar{u}\cdot(\bar{v}\wedge\bar{w})|$ = volume del parallelogramma

se $\bar{u}\cdot\bar{v}\wedge\bar{w}\neq 0$ il suo modulo è il volume del parallelepipedo

↳ $\bar{u}\cdot\bar{v}\wedge\bar{w}$ al massimo cambia segno al variare dell'ordine di $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$

↝ IN COMPONENTI

Sia $B=(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$ una base ortonormale positiva $(\bar{k} = \bar{\imath} \wedge \bar{\jmath})$

$\bar{u} = u_1 \hat{\imath} + u_2 \hat{\jmath} + u_3 \hat{k}$ $\qquad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\bar{v} = v_1 \hat{\imath} + v_2 \hat{\jmath} + v_3 \hat{k}$ $\qquad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\bar{w} = w_1 \hat{\imath} + w_2 \hat{\jmath} + w_3 \hat{k}$ $\qquad \bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\bar{v} \wedge \bar{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w})} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \underline{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

• $\bar{u} = (1, -1, 3)$ $\quad \bar{v} = (0, 1, 2)$ $\quad \bar{w} = (3, 4, a)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Determinare a in modo che $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sono complanari. Per tale valore esprimere $\bar{w}$ come combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sono complanari $\Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} \wedge \bar{w} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = 3(-5) - 4(2) + a(1) = -23 + a = 0 \Rightarrow$$

$$a = 23$$

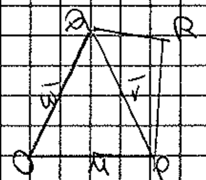
Esistono 2 numeri x, y per cui $\bar{w} = x\bar{u} + y\bar{v}$

$(3, 4, 23) = x(1, -1, 3) + y(0, 1, 2)$

$$\begin{cases} 3 = x \\ 4 = -x + y \\ 23 = 3x + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ 23 = 9 + 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$$

- prendiamo $a = 0$ $\quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ non sono complanari

il volume (T) è $\frac{1}{6} |\bar{u} \wedge \bar{v} \cdot \bar{w}| = \frac{1}{6} \cdot |-23| = \frac{23}{6}$



Osservazione: sia $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ sono condizioni equivalenti

- A non è invertibile
- $\det A = 0$
- $rg(A) < 3$
- il sistema $AX = 0$ ha soluzione non nulla
- il prodotto misto dei 3 vettori riga è nullo
- i 3 vettori riga sono complanari
- almeno un vettore riga è combinazione lineare degli altri 2
- ${}^tA$ non è invertibile
- i tre vettori colonna di A sono complanari
- Almeno uno dei 3 vettori colonna è combinazione lineare degli altri

$$|(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{w}| = |\bar{w} \cdot (\bar{u} \wedge \bar{v})| = |\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w})|$$