b) $h=4 \rightarrow \det A = 0$ $\quad x^2-4xy+4y^2=0$

$(x-2y)^2=0 \rightarrow$ 2 rette coincidenti

c) $h-4>0 \rightarrow h>4 \rightarrow \det A>0 \rightarrow$ conica degenere di tipo ellittico

Non ci sono punti reali salvo $(0,0)$

2° CASO $\quad k=4 \quad x^2-4xy+4y^2+h=0 \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 0 \rightarrow$ conica degenere di tipo iperbolico

$(x-2y)^2=-h$

a) $h<0$: 2 rette parallele $x-2y=\pm\sqrt{-h}$

b) $h>0$: la conica non contiene punti veri

c) $h=0$: $(x-2y)^2=0$ retta doppia

Casi non degeneri : $k \neq h \neq 0$

$\det A = k-4$

1°) $k>4 \quad \det A>0 \quad$ ellissi $\begin{cases} \text{reali} \\ \text{immaginarie} \end{cases} \quad \lambda x^2+\mu y^2+\gamma=0$

2°) $k<4 \quad \det A<0 \quad$ iperbole

$$p_C(t)=t^2-(k+1)+k-4=0$$

$$t=\frac{k+1\pm\sqrt{k^2+1+2k-4k+16}}{2}=\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-2k+17}}{2}$$

LE QUADRICHE

Def : Si dice (SUPERFICIE) QUADRICHE il luogo dei punti P dello spazio le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di 2° grado a 3 variabili $f(x,y,z)=0$

CASI PARTICOLARI

1) $ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0 \qquad a\neq 0$

dividendo per a possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\gamma}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta$$

- se $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta<0$ L'equazione non ha sol.
- se " " $=0$ $\quad x=-\frac{\alpha}{2}, y=-\frac{\beta}{2}, z=-\frac{\gamma}{2} \rightarrow$ l'eq. ha un unico sol. $C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right)$
- se " " $>0 = R^2 \quad R>0$

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\gamma}{2}\right)^2=R^2$$

$P(x,y,z)$, $C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right)$ $\rightarrow$ $d^2(P,C)=R^2$

$$\boxed{d(P,C)=R}$$

L'equazione rappresenta una superficie sferica di centro C e raggio R

2) L'eq. è omogenea, cioè $f(x,y,z)$ è l'espressione di una f.q.

$$f(x,y,z)=0$$

Casi di (2) con f.q. in forma canonica

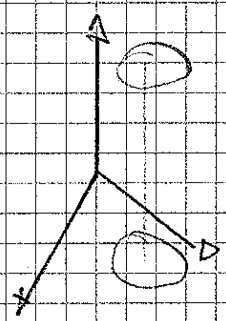
$$f(x,y,z)=2x^2+ay^2+kz^2$$

se $K>0$ $\quad f(x,y,z)>0 \quad \forall (x,y,z)\neq(0,0,0)$ l'eq. è soddisfatta solo da $(0,0,0)$

$K=0$ $\quad 2x^2+ay^2=0$ le soluzioni sono le coordinate dei punti dell'asse t $P(0,0,t)$ $t\in\mathbb{R}$

$K<0$ (esempio $k=-1$)

$$\begin{cases} 2x^2+ay^2-z^2=0 \\ z=\pm1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+ay^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$



$Q(x_0,y_0,z_0)$ su φ ← superficie

$$\begin{cases} \begin{cases} x=x_0 t \\ y=y_0 t \\ z=z_0 t \end{cases} \\ 2x^2+ay^2-z^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ t^2(2x_0^2+ay_0^2-z_0^2)=0 \end{cases}$$

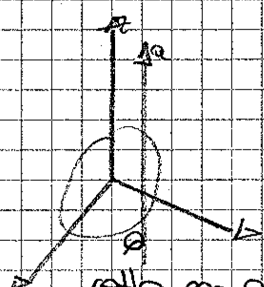
$$0=0 \quad \forall t$$

$$(x_0,y_0,z_0)\in\varphi$$

(3) Nell'eq. non compare una variabile

es. non compare la z

$$f(x,y,z)=3x^2+ay^2-5=0$$



retta par. all'asse z

$P(x_0,y_0,t)\in\varphi \quad \forall t$

- cosa rappresenta l'eq. $y^2+z^2-1=0$?

$$z=1-y^2 \gg \text{cilindro}$$

(4) $f(x,y,z)$ è il prodotto di 2 polinomi di 1° grado

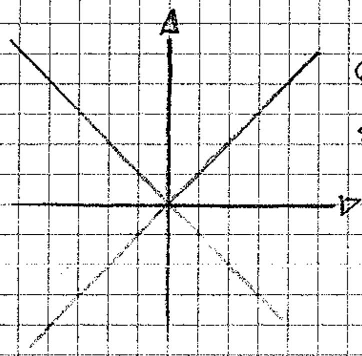
$$f(x,y,z)=(ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

l'eq. è soddisfatta dai punti dei due piani di equazioni rispettivamente $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$

EQUAZIONE CANONICA DELLE QUADRATICHE

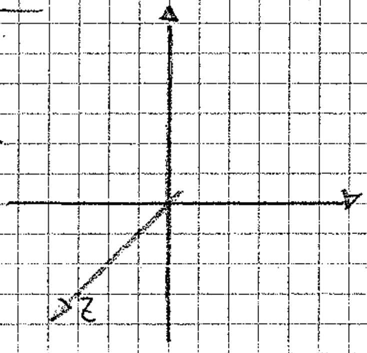
Sono di 2 tipi: → $ax^2+by^2+cz^2+d=0$ i piani coordinati sono piani di simmetria, l'origine è il centro di sim

→ $ax^2+by^2+cz^2=0$ solo due piani di simmetria



$ax^2+by^2=0$

se a e b discordi
$ab<0$



se a e b concordi
$ab>0$

$ax^2+by^2+cz^2+d=0$ non degenere $a\neq0, b\neq0, c\neq0, d\neq0$

possiamo riscrivere l'eq. nella forma $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$

1) α, β, γ concordi

- se α, β, γ sono negativi → no soluzioni reali ELLISSOIDE IMMAGINARIO
- se $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ ELLISSOIDE REALE

sezioni con i piani paralleli al piano xy, $z=K$

$$\begin{cases}\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1\\ z=K\end{cases} \quad \begin{cases}z=K\\ \alpha x^2+\beta y^2=1-\gamma K^2\end{cases}$$

a) $1-\gamma K^2<0$ → $K^2>\frac{1}{\gamma}$ $K<-\sqrt{1/\gamma}$ $K>\sqrt{1/\gamma}$ ⇒ 0 sol

b) $1-\gamma K^2=0$ → $K^2>\pm\sqrt{1/\gamma}$ → ciascuno dei due piani ha un solo punto in comune con la superficie S
$(0,0,\sqrt{1/\gamma})$, $(0,0,-\sqrt{1/\gamma})$

c) $1-\gamma K^2>0$ → $K^2<\frac{1}{\gamma}$ $-\sqrt{1/\gamma}<K<\sqrt{1/\gamma}$

La sezione è un'ellisse

$$\frac{x^2}{\frac{1-\gamma K^2}{\alpha}}+\frac{y^2}{\frac{1-\gamma K^2}{\beta}}=1 \quad \text{semiassi: } \sqrt{\frac{1-\gamma K^2}{\alpha}}, \sqrt{\frac{1-\gamma K^2}{\beta}}$$

numeri crescenti quando il piano $z=K$ si avvicina al piano xy.

La quadrica rappresentata da un'eq. canonica si dice degenere se qualcuno dei coefficienti a, b, c, d è zero

2) α, β, γ segni discordi
due coefficienti >0, uno <0
- se $\alpha, \beta>0$, $\gamma<0$ (per esempio) IPERBOLOIDE IPERBOLICO

sezioni con i piani $z=K$ (piani // al piano xy)

$$\begin{cases}\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1\\ z=K\end{cases} \quad \begin{cases}\overset{+}{\alpha} x^2+\overset{+}{\beta} y^2=1-\gamma K^2\\ z=K\end{cases} \quad 1-\gamma K^2>0 \ \forall K$$

ellissi, $\forall k$ (che sono circonferenze nel caso $\alpha = \beta$)

$$\frac{x^2}{\frac{1-\gamma k^2}{\alpha^2}} + \frac{y^2}{\frac{1-\gamma k^2}{\beta^2}} = 1 \qquad a = \sqrt{\frac{1-\gamma k^2}{\alpha}} \qquad b = \sqrt{\frac{1-\gamma k^2}{\beta}}$$

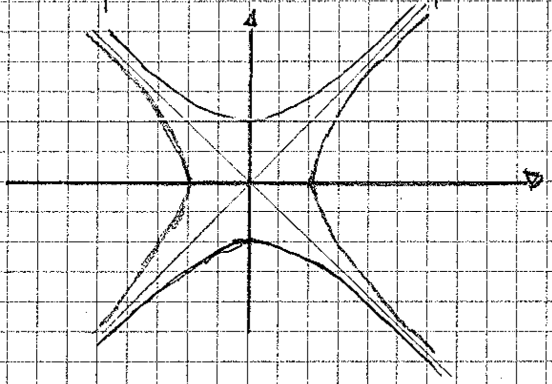
crescono al crescere $|k|$

$$\begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 \\ y = k \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + \gamma z^2 = 1 - \beta k^2 \\ y = k \end{cases}$$

iperbole per $k^2 \neq \frac{1}{\beta}$

se $k^2 = \frac{1}{\beta}$ $\alpha x^2 + \gamma z^2 = 0$

$z = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}\, x$ 2 rette



i) $1 - \beta k^2 > 0$ ($k^2 < \frac{1}{\beta}$)

2) $1 - \beta k^2 = 0$

3) $1 - \beta k^2 < 0$ ($k^2 > \frac{1}{\beta}$)

uno >0, $z<0$

- se $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$ (per esempio) **IPERBOLOIDE ELLITTICO**

sezioni con i piani $z = k$

$$\begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 \\ z = k \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 - \gamma k^2 \\ z = k \end{cases}$$

$\alpha > 0, \beta < 0$ $\to 1 - \gamma k^2 > 0$ $\forall k$

iperbole

situazione analoga con i piani $y = k$

sezioni con i piani $x = k$ (piani $\parallel$ al piano yz)

$$\begin{cases} \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 - \alpha k^2 \\ x = k \end{cases} \qquad \begin{cases} (-\beta) y^2 + (-\gamma) z^2 = \alpha k^2 - 1 \\ x = k \end{cases}$$

ellissi (eventualmente circonferenze se $\beta = \gamma$) se $\alpha k^2 - 1 > 0$ $k^2 > \frac{1}{\alpha}$

Conica ridotta ad un punto solo se $k = \pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$

$Ax^2 + By^2 + Cz = 0$ caso quadriche non degeneri $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$

$$\boxed{z = \alpha x^2 + \beta y^2}$$

1) $\alpha > 0, \beta > 0$ **PARABOLOIDE ELLITTICO**

sezioni con i piani $z = k$

$$\begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 = k \\ z = k \end{cases}$$

ellissi se $k > 0$ (circonferenza nel caso $\alpha = \beta$)

un solo punto $(0,0,0)$ $k = 0$

nessun punto se $k < 0$

sezioni con i piani $y = k$

$$\begin{cases} z = \alpha x^2 + \beta k^2 \\ y = k \end{cases}$$

parabola

2) $\alpha < 0, \beta < 0$ situazione simile: basta scambiare z in $-z$

3) α e β discordi: $\alpha>0$, $\beta<0$ (per esempio) **PARABOLOIDE IPERBOLICO**

$$\begin{cases} z=k \\ \alpha x^2+\beta y^2=k \end{cases}$$ iperbole se $k\neq 0$; coppia di rette se $k=0$

$$\begin{cases} z=\alpha x^2+\beta k^2 \\ y=k \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\beta y^2+\alpha k^2 \\ x=k \end{cases}$$ parabole

- Dire quali quadriche vengono rappresentate dalle equazioni

1) $x^2+3y^2+z^2-2x+6y=0$

2) $z^2+2y^2+y+x=0$

1) $(x-1)^2-1+3(y+1)^2-3+z^2=0$

$(x-1)^2+3(y+1)^2+z^2=4$ $\qquad \begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+1 \\ Z=z \end{cases}$

$X^2+3Y^2+Z^2=4$

ELLISSOIDE REALE con centro di simmetria $C(1,-1,0)$

2) $z^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+x=0$

$\underbrace{z}_{Z}{}^2+2\big(\underbrace{y+\tfrac{1}{4}}_{Y}\big)^2+\big(\underbrace{x-\tfrac{1}{8}}_{X}\big)=0$

$Z^2+2Y^2+X=0$

PARABOLOIDE ELLITTICO con centro $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{4},0\right)$

Consideriamo i casi di eq. del tipo $z=f(x,y)$ con $f(x,y)$ polinomio di 2° grado

3) $z=\underbrace{\sqrt{1-x^2+5y^2}}_{f(x,y)}$ $\qquad z^2=1-x^2+5y^2$

$x^2-5y^2+z^2=1$

MEZZO IPERBOLOIDE

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (A VALORI SCALARI)

$f: A\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ A dominio di f

f può essere espressa da una formula $f(x_1, x_2 \dots x_n)$

$n=3 \quad f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{\log(x_1^2x_2x_3)}$

__dom f__ è costituito dai punti di $\mathbb{R}^n$ per cui è calcolabile f, ovvero da un suo sottoinsieme (se indicato)

__grafico__: insieme dei "punti" di $\mathbb{R}^{n+1}$ che hanno coordinate $(x_1,x_2,\dots,x_n,f(x_1,\dots x_n))$ dove $(x_1,\dots x_n)\in \text{dom} f$

Per $n=2$, il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ (cioè un insieme di punti dello spazio), se $f(x,y)=x^2+y^2$, il grafico è il paraboloide di eq. $z=x^2+y^2$