MATRICI

$\mathbb{K}$ campo numerico $\rightsquigarrow \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

MATRICE = tabella di numeri disposti su righe e colonne

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4/5\end{pmatrix}_{2\times 3} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ \pi & \sqrt{2}\end{pmatrix}_{2\times 2} \quad M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix}_{1\times 4}$$

$\mathbb{K}^{2,3}$ è l'insieme delle matrici 2×3 a elementi in $\mathbb{K}$

$A\in\mathbb{K}^{2,3}$ $(A\in\mathbb{R}^{2,3}, A\in\mathbb{C}^{2,3})$

$B\in\mathbb{R}^{2,2}$ $\quad M\in\mathbb{R}^{1,4}, \mathbb{C}^{1,4}$

MATRICE QUADRATA = ha lo stesso numero di righe e colonne

MATRICE NULLA = con tutti elementi nulli $\rightsquigarrow$ rappresentata da 0

$A\in\mathbb{K}^{m,n}$ $\quad A=(a_{ij})$ $\quad i \rightsquigarrow$ indice di riga $\quad i=1,2,\dots m$

$j \rightsquigarrow$ indice di colonna $\quad j=1,2,\dots n$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4/5\end{pmatrix}$$

$a_{12}=2$

$a_{22}=3$

a_{31} non esiste

SOMMA DI MATRICI

matrici dello stesso formato: $A\in\mathbb{K}^{m,n}$, $B\in\mathbb{K}^{p,q}$

si può parlare di somma $A+B$ se $m=p$ e $n=q$

$A+B$ è una matrice $m\times n$ e si ottiene sommando gli elementi posto per posto

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4/5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3 & \pi\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad A+B=\begin{pmatrix}1/2 & 5 & \pi-1\\ 1 & 4 & 14/5\end{pmatrix}$$

PRODOTTO PER ELEMENTI DI $\mathbb{K}$

Se $A\in\mathbb{K}^{m,n}$, $k\in\mathbb{K}$, la matrice kA si ottiene moltiplicando per k tutti gli elementi di A

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4/5\end{pmatrix} \quad 5A=\begin{pmatrix}5 & 10 & -5\\ 0 & 15 & 4\end{pmatrix}$$

in generale se $A=(a_{ij})$, $kA=(ka_{ij})$

PRODOTTO DI MATRICI

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$, B deve essere del tipo $n \times p$

$A: m \times n$ $\quad B: n \times p$

il risultato $C = AB$ sarà una matrice $m \times p$ $\quad C \in \mathbb{K}^{m,p}$

$A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad B \in \mathbb{K}^{n,p}$

$\Downarrow$

$$C = (c_{ij}) = AB$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4/5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = AB = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{3}{2} & 4 & 9 \\ -\frac{49}{5} & \frac{2}{5} & 6 & \frac{27}{5} \end{pmatrix}$$

$\qquad 2 \times 3 \qquad\qquad 3 \times 4 \qquad\qquad 2 \times 4$

PROPRIETÀ:

- proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$
- proprietà distributiva: $A(B+C) = AB + AC$

  $(M+N)P = MP + NP$
- $A(kB) = (kA)B = k(AB) \quad k \in \mathbb{K}$
- non c'è la proprietà commutativa: $AB \neq BA$

MATRICI IDENTICHE

I_n matrice identica $n \times n$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_n = (\delta_{ij}) \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

simbolo di Kronecker

PROPRIETÀ:

$A \; m \times n$ — $A \cdot I_n = A$

$\qquad\qquad$ — $I_m \cdot A = A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad A I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$I_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRICI INVERTIBILI - MATRICE INVERSA

Def: una matrice si dice *invertibile* se esiste una matrice B per cui:

$AB = BA = I \;\rightarrow\; A$ deve essere quadrata

- se A è la matrice nulla, non è invertibile
- $A = I_n$ è invertibile $\rightarrow B = I_n$

- A e B devono essere quadrate

Dim: A $m\times m$ $\quad AB \rightsquigarrow B$ $n\times p \rightsquigarrow AB: m\times p$ $\quad \Rightarrow \begin{matrix} p=m \\ p=m \\ m=m \end{matrix} \Rightarrow$ A e B sono quadrate

$BA \rightsquigarrow B$ $p\times m \rightsquigarrow BA: p\times m$

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ A è invertibile, perché se $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ non è invertibile $\quad B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in generale le matrici 2×2 del tipo $A=\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ non sono invertibili

PROPRIETÀ: $A \in \mathbb{K}^{m,m}$

- TEOREMA DI UNICITÀ: se A è invertibile, esiste uno solo $B \in \mathbb{K}^{m,m}$: $AB=BA=I_m$

Dim: Siano B_1 e B_2 due matrici:

$AB_1=B_1A=I \qquad AB_2=B_2A=I$

Calcoliamo $B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$
$\qquad\qquad\qquad\quad = B_1(AB_2) = B_1I = B_1$ $\Rightarrow B_1=B_2$

Def: se $A\in\mathbb{K}^{m,m}$ è invertibile, l'unica matrice $B\in\mathbb{K}^{m,m}$ per cui $AB=BA=I$ si dice MATRICE INVERSA di A e si denota con A^{-1}

- se A è invertibile, anche $B=A^{-1}$ è invertibile e $(A^{-1})^{-1}=A$

- Siano $M,N \in \mathbb{K}^{m,m}$ invertibili $\Rightarrow$ MN è invertibile

$(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}$

Dim: $(MN)(N^{-1}M^{-1})=I$

$(N^{-1}M^{-1})(MN)=I$

$(MN)(N^{-1}M^{-1})=M(NN^{-1})M^{-1}=(MI)M^{-1}=MM^{-1}=I$

$(N^{-1}M^{-1})(MN)=N^{-1}(M^{-1}M)N=(N^{-1}I)N=N^{-1}N=I$

CASO $m=2$ $\rightsquigarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(ad-bc)I$$

- se $ad-bc\neq 0 \rightsquigarrow \frac{1}{ad-bc}(AA^*)=A\left[\frac{1}{ad-bc}A^*\right]=I$

$$\left[\frac{1}{ad-bc}A^*\right]A=I$$

$\Downarrow$

A è invertibile e $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- se $ad-bc = 0$ non è invertibile

se $A = 0 \Rightarrow$ non è invertibile

se × esempio $d \neq 0$ $a = \frac{bc}{d}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{bc}{d} & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$ le 2 righe sono proporzionali

$\Downarrow$

A non è invertibile

MATRICE TRASPOSTA

Def: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Si dice trasposta di A la matrice ${}^tA \in \mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene scambiando ordinatamente righe e colonne

$A = (a_{ij})$

${}^tA = (a'_{ij})$ dove $a'_{ij} = a_{ji}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ:

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(kA) = k\,{}^tA$ $k \in \mathbb{K}$
- AB esiste $\Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
- A invertibile $\Rightarrow {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

Def: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice SIMMETRICA se ${}^tA = A$ $(a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j)$

ANTISIMMETRICA se ${}^tA = -A$ $(a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i,j)$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è simmetrica

$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica

qui deve essere lo zero

I DETERMINANTI

Solo in riferimento a MATRICI QUADRATE

$A = (a_{ij})$ $i,j = 1,2 \dots n$ $\det A = |A|$

il determinante di A è un numero

- $n = 1$ $A = (a)$: $\det A = a$
- $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\det A = ad - bc$

$\cdot\, n = 3 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Def: Dato $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, si dice COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento a_{ij} della matrice il determinante della matrice che si ottiene da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima, moltiplicando per $(-1)^{i+j}$.

Indichiamo con A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij}

Def I: il determinante di una matrice A è la somma dei prodotti degli elementi della 1ª riga per i rispettivi complementi algebrici

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

Def (II): REGOLA DI LAPLACE

il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga (colonna) di A per i rispettivi complementi algebrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1(-5) - 3(10) + 6 \cdot 0 = -35$$

$$0\,\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} - 0\,\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} + 5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 5(-1-6) = -35$$

REGOLA DI SARRUS: (nel caso $n = 3$)

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

MATRICI TRIANGOLARI

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22} & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice TRIANGOLARE ALTA

$a_{ij} = 0 \quad \forall i,j : i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice TRIANGOLARE BASSA

$a_{ij} = 0 \quad \forall i,j : i < j$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

MATRICI DIAGONALI = matrici TRIANGOLARI basse e alte insieme

PROPRIETÀ: $A \in \mathbb{K}^{m,m}$

- $\det A = \det {}^tA$
- TEOREMA DI BINET

$A, B \in \mathbb{K}^{m,m} \Rightarrow \det(AB) = (\det A)(\det B)$

COROLLARIO

$\rightsquigarrow$ Sia A una matrice invertibile e A^{-1} la sua inversa

$\Downarrow$

$$\det A \neq 0$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Dim: $AA^{-1} = I \qquad \det(AA^{-1}) = \det I$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1 \qquad \det A \neq 0$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

la condizione $\det A \neq 0$ è una condizione necessaria perché A sia invertibile $\to$ ma la condizione è anche sufficiente proposizione dopo pasqua

- se A ha una riga (colonna) tutta di zeri $\rightsquigarrow \det A = 0$
- se si moltiplica una riga (colonna) di A per un numero K, il $\det A$ viene moltiplicato per K
- se si scambiano due righe (colonne) il determinante di A cambia segno
  - $\hookrightarrow$ e quindi se ci sono due righe o colonne uguali (o proporzionali) il $\det A = 0$
- $\det A$ non cambia se ad una riga (colonna) si aggiunge un'altra riga (colonna) moltiplicata per un numero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad R_3 + 3R_1 \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 15 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \det A = 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 7 & -1 & 15 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\det \underset{R_2 + 7R_1}{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 15 \\ 5 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 15 \\ 54 & 0 & 106 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -(+1)\left(-\det \begin{pmatrix} 54 & 106 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = -(54 \times 6 - 106 \times 5) = 314$$

2° TEOREMA DI LAPLACE:

Dato $A \in \mathbb{K}^{m,m}$, la somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i corrispondenti complementi algebrici di un'altra riga (colonna) è zero.

PROPOSIZIONE:

se $\det A \neq 0$, A è invertibile e risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*} \qquad \text{con } A^{*} = {}^{t}(A_{ij}) \qquad A_{ij} \text{ complemento algebrico di } a_{ij}$$

$n=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{*} = {}^{t}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\det A}\,{}^{t}(A_{ij}) \text{ è l'inverso di } A$$

Lo verifico:

$$AB = \frac{1}{\det A} A A^{*} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = I$$

uguale per BA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ verifichiamo che A è invertibile e calcoliamo A^{-1}

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2(2-5) - 2(2+15) = 6 - 34 = -28$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 10 & 10 & -6 \\ -3 & -17 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -3 \\ -6 & 10 & -17 \\ -6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -5/14 & 3/28 \\ 1/7 & -5/14 & 17/28 \\ 1/7 & 1/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI sulle righe (colonne) di una matrice

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$; $R_1, R_2 \dots R_m \rightsquigarrow$ righe di A; $C_1, C_2, \dots C_n \rightsquigarrow$ colonne di A

I) SOSTITUZIONE $R_i \to R_i' = R_i + kR_j$ $k \in \mathbb{K}$ $i \neq j$

II) SCAMBIO DI RIGHE $R_i \longleftrightarrow R_j$

III) PRODOTTO PER UN NUMERO $R_i \to R_i' = kR_i$ $k \neq 0$

I) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $R_2 \to R_2 + 5R_1$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & -1 & 26 & 34 \end{pmatrix}$

MATRICI RIDOTTE

Def: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice ridotta (per righe) se in ogni riga di A non nulla c'è almeno un elemento $a \neq 0$ con al di sotto tutti zeri

(nessuna condizione sull'ultima riga)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 6 \\ -1 & \boxed{5} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ A è una matrice RIDOTTA

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$ B non è una matrice RIDOTTA

PROPOSIZIONE:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$: con un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe si può ottenere una matrice ridotta per righe

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = R_3 + (-1)R_1 \quad A' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$