3) α e β discordi: $\alpha>0$, $\beta<0$ (per esempio)   PARABOLOIDE IPERBOLICO

$$\begin{cases} z=k \\ \alpha x^2+\beta y^2=k \end{cases}$$ iperbole se $k\neq 0$; coppia di rette se $k=0$

$$\begin{cases} z=\alpha x^2+\beta k^2 \\ y=k \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\beta y^2+\alpha k^2 \\ x=k \end{cases}$$ parabole

- Dire quali quadriche vengono rappresentate dalle equazioni
  1) $x^2+3y^2+z^2-2x+6y=0$
  2) $z^2+2y^2+y+x=0$

1) $(x-1)^2-1+3(y+1)^2-3+z^2=0$

$(x-1)^2+3(y+1)^2+z^2=4$ $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+1 \\ Z=z \end{cases}$

$X^2+3Y^2+Z^2=4$

ELLISSOIDE REALE con centro di simmetria $C(1,-1,0)$

2) $z^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+x=0$

$\underset{Z}{z^2}+2(\underset{Y}{y+\tfrac{1}{4}})^2+(\underset{X}{x-\tfrac{1}{8}})=0$

$Z^2+2Y^2+X=0$

PARABOLOIDE ELLITTICO con centro ~~di simmetria~~ $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{4},0\right)$

Consideriamo i casi di eq. del tipo $z=f(x,y)$ con $f(x,y)$ polinomio di 2° grado

3) $z=\sqrt{1-x^2+5y^2}$ $z^2=1-x^2+5y^2$

$\underset{f(x,y)}{}$ $x^2-5y^2+z^2=1$

MEZZO IPERBOLOIDE

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (A VALORI SCALARI)

$f: A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ A dominio di f

f può essere espresso da una formula $f(x_1, x_2 \dots x_n)$

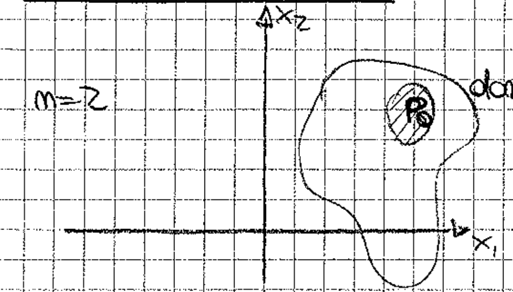
$n=3$ $f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{\log(x_1^2x_2x_3)}$

__dom f__ è costituito dai punti di $\mathbb{R}^n$ per cui è calcolabile f, ovvero da un suo sottoinsieme (se indicato)

__grafico__: insieme dei "punti" di $\mathbb{R}^{n+1}$ che hanno coordinate $(x_1,x_2,\dots,x_n,f(x_1,\dots x_n))$ dove $(x_1,\dots x_n)\in$ dom f

Per $n=2$, il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ (cioè un insieme di punti dello spazio), se $f(x,y)=x^2+y^2$, il grafico è il paraboloide di eq. $z=x^2+y^2$

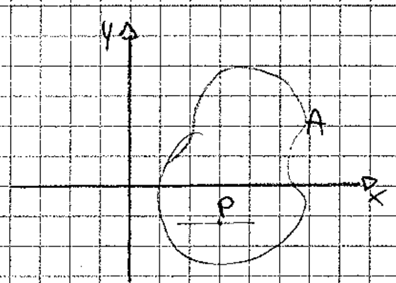
Punto interno a domf



Chiamiamo intorno ..... di P_0 di raggio r l'insieme dei punti del cerchio (aperto) di centro P_0 e raggio r, cioè l'insieme dei punti $P(x_1, x_2)$ tali che $\overline{P_1P_0} < 0$

$$\boxed{\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}<r}$$

DERIVATE PARZIALI - DERIVATE DIREZIONALI



$\underline{m=2}$ $f(x,y)$ $A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$P_0(x_0, y_0)$ interno ad A

Possiamo considerare la funzione

$\varphi(x) = f(x, y_0)$

Si dice DERIVATA PARZIALE rispetto ad x della funzione $f(x,y)$ in (x_0, y_0) la derivata di $\varphi(x)$ rispetto ad x in x_0

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad f'_x(x_0, y_0)$$

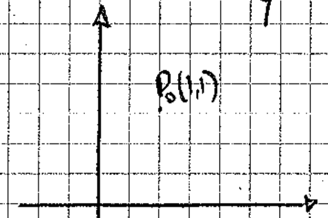
Analogamente la derivata parziale rispetto a y in P_0 sarà

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad f'_y(x_0, y_0)$$

In generale se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x_1, \dots x_n)$ $P_0(x_1^0, \dots x_n^0)$

si può parlare di n derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$ $i = 1, \dots n$

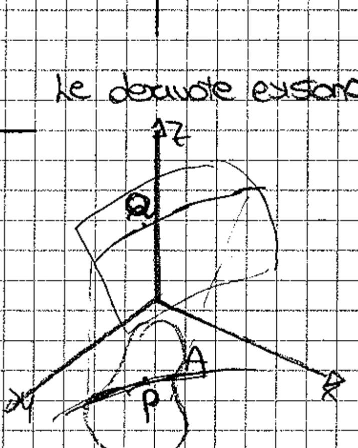
$f(x,y) = x^2 \sin \frac{x}{y}$ domf $= \mathbb{R}^2 -$ asse x



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\frac{x}{y} + x^2 \cos\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}\right) = 2x \sin\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

Le derivate esistono $\forall (x_0, y_0)$ perché $y_0 \neq 0$ cioè in tutti i punti del domf



$Q_0(x^0, y^0, f(x^0, y^0))$

Per una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la derivabilità in x_0 implica $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$. $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ f che ha come grafico la retta tangente al grafico di f in $Q(x_0, f(x_0))$

DIFFERENZIABILITÀ

Def: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ interno ad A se

$$* \; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + h(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) + o(\|(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)\|)$$

h lineare nelle variabili $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$

$n = 2$ $\quad f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \underbrace{a(x_1 - x_1^0) + b(x_2 - x_2^0)}_{h} + o\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}\right)$

trascurando $o(\ )$ si ottiene la funzione

$$g(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + a(x_1 - x_1^0) + b(x_2 - x_2^0)$$

che ha come grafico $z = g(x_1, x_2)$ = polinomio di 1° grado in x_1, x_2 (o costante) cioè un piano

Proposizione: Se f è differenziabile in $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ esiste una sola applicazione lineare per cui vale $(*)$. Più precisamente $h(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)(x_n - x_n^0)$$

Nel caso $n = 2$ risulta

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0)(x_2 - x_2^0) + o\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}\right)$$
$$(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$$

Def: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione nelle variabili $x_1, \dots, x_n$. Diciamo che f è derivabile in $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ se esistono le n derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$ $i = 1, 2, \dots, n$. Il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right) \in \mathbb{R}^n$ si dice gradiente di f in P_0 e si indica con i simboli: $\text{grad}_{P_0} f$, $\nabla_{P_0} f$

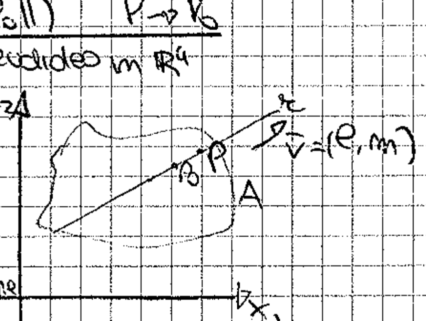
Osservazione: La condizione di differenziabilità di f in P_0 si può scrivere nel modo seguente, posto

$P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $P = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \nabla_{P_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$

$\|P - P_0\| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$:

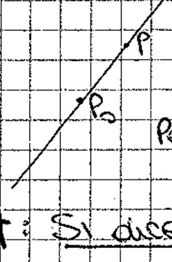
$$f(P) = f(P_0) + \nabla_{P_0} f \cdot (P - P_0) + o(\|P - P_0\|) \quad P \to P_0$$

$\hookrightarrow$ prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$



DERIVATE DIREZIONALI

1° CASO : $n = 2$ $\quad y = f(x_1, x_2)$ $\quad P_0(x_1^0, x_2^0)$



$$r \begin{cases} x_1 = x_1^0 + \ell t \\ x_2 = x_2^0 + m t \end{cases}$$ eq. parametriche di r

$P_0(x_1^0, x_2^0)$ $\quad P(x_1^0 + \ell t, x_2^0 + m t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Def: Si dice derivata direzionale di f in P_0 nella direzione del vettore $\bar{v} = (\ell, m)$ il limite (se esiste) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0 + \ell t, x_2^0 + m t) - f(x_1^0, x_2^0)}{t}$ $\quad \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\bar{v}) - f(P_0)}{t}$

Proposizione: se f è differenziabile in P_0, le derivate direzionali esistono $\forall \bar{v}$ e risulta $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(P_0) = \nabla_{P_0} f \cdot \bar{v}$

Osservazione: stessa situazione per $n \geq 2$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE PER UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Supponiamo che esistano le derivate parziali di f nel sottoinsieme $A' \subseteq A$ e che P_0 sia interno ad A'

Si hanno cioè le n funzioni $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A' \to \mathbb{R}$

Se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile a sua volta rispetto alla variabile x_j in P_0: diciamo che esiste la derivata seconda di f rispetto a x_i, x_j

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0) \quad , \quad f''_{x_i x_j}(P_0)$$

Se $n=2$ si hanno due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$

Ciascuna, se derivabile, dà origine alle sue 2 derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

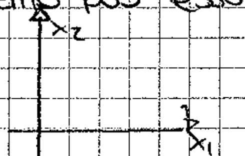
TEOREMA di invertibilità dell'ordine delle derivazioni (teorema di Schwarz)

Se f è di classe C^2 in un intorno di P_0 (cioè se la f ammette derivate seconde continue in un intorno di P_0) allora $\forall i, j \quad i \neq j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0)$$

Osservazione: l'ipotesi del teorema può essere indebolita

$f(x_1, x_2) = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^4}}$



$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^4}} \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^4}} \frac{4x_2^3}{2\sqrt{x_1^2+x_2^4}}$$

Calcoliamo le due derivate seconde miste in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = e^{\sqrt{\ }} \frac{2x_2^3}{\sqrt{\ }} \frac{x_1}{\sqrt{\ }} + e^{\sqrt{\ }} \frac{-x_1 \frac{4x_2^3}{2\sqrt{\ }}}{x_1^2+x_2^4} = \frac{e^{\sqrt{\ }}}{x_1^2+x_2^4}\left(2x_1x_2^3 - \frac{2x_1x_2^3}{\sqrt{\ }}\right) = \frac{e^{\sqrt{\ }}(2x_1x_2^3)}{x_1^2+x_2^4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\ }}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{\sqrt{\ }} \frac{2x_1}{2\sqrt{\ }} \frac{2x_2^3}{\sqrt{\ }} + e^{\sqrt{\ }} \frac{-2x_2^3}{x_1^2+x_2^4} \cdot \frac{2x_1}{2\sqrt{\ }} = \frac{e^{\sqrt{\ }}}{x_1^2+x_2^4}\left(2x_1x_2^3 - 2x_1x_2^3 \frac{1}{\sqrt{\ }}\right)$$

FORMULA DI TAYLOR PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1° ordine: se f è di classe C^1 in un intorno di P_0 (f è differenziabile in P_0 e) si ha

$$f(P) = f(P_0) + \nabla_{P_0} f \cdot (P - P_0) + o(\|P - P_0\|) \qquad P \to P_0$$

$\boxed{n=2}$ $$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\ )(x_2 - x_2^0) + o\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2 + (x_2-x_2^0)^2}\right)$$

2° ordine: se f è di classe C^2 in un intorno di P_0, allora

$$f(P) = f(P_0) + \nabla_{P_0} f \cdot (P - P_0) + \text{forma quadratica nelle variabili } x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots x_n - x_n^0$$
$$+ o(\|P - P_0\|^2) \qquad P \to P_0$$

forma quadratica = forma quadratica in cui i coefficienti sono i seguenti
il coefficiente di $(x_i - x_i^0)^2$ è $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(P_0)$, il coefficiente di $(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$ è $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0)$

se $n=2$ la forma quadratica è la seguente:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0)(x_1 - x_1^0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0)(x_2 - x_2^0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0)(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) =$$

$$= \frac{1}{2}[\ f.q.\ ]$$

f.q. associata alla matrice

$$H_{P_0}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0) \end{pmatrix}$$ matrice hessiana di f in P_0

PUNTI DI ESTREMO RELATIVO

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: $P_0 \in A$ si dice punto di massimo (minimo) relativo o locale se esiste un intorno U di P_0 tale che: $\forall P \in U \cap A$, $f(P) \leq f(P_0)$ $\quad (f(P) \geq f(P_0))$

Proposizione: se P_0 è un pto interno ad A e f è derivabile in P_0, punto di max o min relativo, allora $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$

$$\nabla_{P_0} f = 0$$

Chiamiamo punti stazionari o critici i punti P_0 in cui f è derivabile e $\nabla_{P_0} f = 0$
se f è di classe C^2 in un intorno di P_0 la formula di Taylor di f del 2° ordine in un punto stazionario è

$$f(P) = f(P_0) + \text{f.q. nelle variabili } x_i - x_i^0 + o(\|P - P_0\|)$$

Per $n=2$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0)(x_1 - x_1^0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P_0)(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P_0)(x_2 - x_2^0)^2\right) + o((x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2)$$
$$(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)$$

SCHEMA

Problema: determinare i punti di max o min relativo di una funzione di n variabili

1) Si calcola ∇f e si cercano i punti stazionari, cioè i punti per cui $\nabla_{P_0} f = 0$
(i punti di max o min interni al dom f e dove f è derivabile sono dei punti stazionari)

2) Trovato un punto stazionario P_0, se f è di classe C^2 in un intorno di P_0 si determinano i segni degli autovalori della matrice hessiana

a) autovalori tutti positivi $\Rightarrow$ la forma quadratica che approssima $f(P)-f(P_0)$ è definita positiva $\Rightarrow$ esiste un intorno di P_0 in cui $f(P)>f(P_0)$ $\Rightarrow P_0$ è un punto di minimo relativo

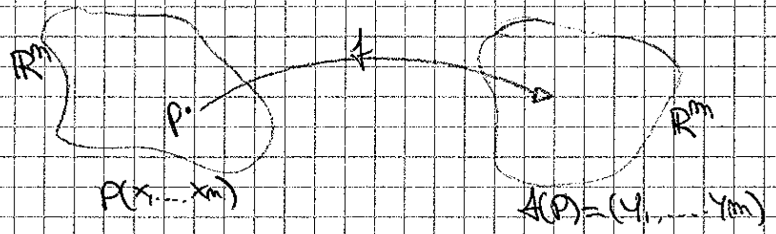
b) autovalori tutti negativi $\Rightarrow$ ..... P_0 è un punto di max relativo

c) Se almeno 2 autovalori sono discordi P_0 non è né di max né di min
↳ si chiama punto di SELLA

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Chiamiamo funzione di n variabili a valori in $\mathbb{R}^m$ una funzione f definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ per cui:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots y_m)$$



Per ogni $i=1, \dots, m$ $\quad y_i = f_i(x_1, \dots x_n)$

il dominio di f è il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^n$ per cui si possono calcolare tutte le f_i e quindi

$$\text{dom} f = \text{dom} f_1 \cap \text{dom} f_2 \cap \dots \cap \text{dom} f_m$$

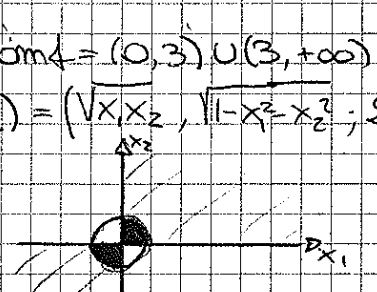
Se indicato, la f si può definire in un sottoinsieme $A \subseteq D$

- es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x) = \left(\log x, \frac{1}{3-x}\right)$

dom f: $x>0$, $x \neq 3 \to \text{dom} f = (0,3) \cup (3,+\infty)$

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x_1,x_2) = \left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}; 2x_1\right)$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 0 \\ 1-x_1^2-x_2^2 \geq 0 \\ \quad x_1^2+x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$



CONTINUITÀ / LIMITI

Le condizioni di continuità e i limiti si possono ricondurre alle corrispondenti definizioni per le funzioni $y_i = f_i(x_1 \dots x_n)$

Ad esempio la condizione $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$ vuol dire che $\forall i = 1 \dots m$

$P_0 = (x_1^0 \dots x_n^0)$ $\quad \lim_{P \to P_0} f_i(P) = \ell_i$

$P = (x_1 \dots x_n)$

$L = (\ell_1, \dots, \ell_m)$

Dire che f è continua in P_0 equivale a dire che

1. $P_0 \in \operatorname{dom} f$ $\quad (P_0 \in \operatorname{dom} f_i \quad i = 1, \dots, m)$
2. $\lim_{P \to P_0} f_i(P) = f_i(P_0)$

DERIVABILITÀ

Def: sia $P_0(x_1^0, \dots x_n^0)$ un punto interno al $\operatorname{dom} f$. Diciamo che f DERIVABILE in P_0 se lo sono le m funzioni $f_1(P) \dots f_m(P)$ (che sono funzioni di n variabili a valori scalari)

Nascono $m \cdot n$ derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $\quad i = 1 \dots m$, $j = 1, \dots, n$

Si chiama matrice jacobiana di f in P_0 la matrice $J_{P_0} f$ i cui elementi a_{ij} sono queste derivate parziali

$$J_{P_0} f \, (Jf(P_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla_{P_0} f_1 \\ \leftarrow \nabla_{P_0} f_2 \\ \\ \leftarrow \nabla_{P_0} f_m \end{matrix}$$

- $f(x_1, x_2) = (\underbrace{x_1 x_2}_{f_1}, \underbrace{x_1 x_2^2}_{f_2}, \underbrace{x_1 \sin x_2}_{f_3})$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$J_{P_0} f = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}_{P = P_0} \quad \text{ad esempio } P_0(1,0) \quad J_{P_0} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- f è l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$

$$J_{P_0} f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \; \forall P_0$$

$\rightarrow J_{P_0} f$ è la matrice associata all'applicazione lineare (nelle basi canoniche)

DIFFERENZIABILITÀ

Abbiamo visto che se $\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 nell'intorno del punto P_0 interno ad A, allora φ è differenziabile in P_0, cioè

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) + \nabla_{P_0} \varphi \cdot (P - P_0) + o(\|P - P_0\|) \qquad P \to P_0$$

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = \varphi(x_1^0, \dots x_n^0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(P_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(P_0)(x_n - x_n^0) + o\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}\right)$$

$$(x_1, \dots x_n) \to (x_1^0 \dots x_n^0)$$

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è definito da

$$f(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), f(x_1 \dots x_n) \dots f_m(x_1 \dots x_n))$$

e se, per ogni i $f_i(x_1 \dots x_n)$ è differenziabile in $P_0(x_1^0, \dots x_n^0)$ interno al dom f, risulta

$$f(P) = f(P_0) + (J_{P_0} f)(P - P_0) + o(\|P - P_0\|) \quad P \to P_0$$

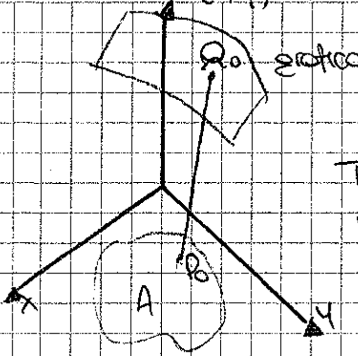
<u>N.B</u> $f(P)$ $f(P_0)$ $P - P_0$ vanno scritti come vettori colonna

$(J_{P_0} f)(P - P_0)$ è l'espressione matriciale di una applicazione lineare nelle variabili $(x_i - x_i^0)$ che si chiama differenziale di f in P_0

il differenziale è quindi una app. lineare $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e precisamente quella associata alla matrice jacobiana

<u>Casi "geometrici"</u>

① $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \to z = f(x, y)$



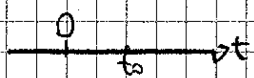
$P_0(x_0, y_0)$ $Q_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

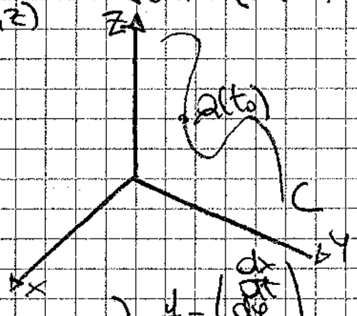
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\dots)$$

Trascurando $o(\ )$ otteniamo una funzione il cui grafico ha equazione $\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$

eq di un piano passante per Q_0

② $f: I \subseteq \underset{t}{\mathbb{R}} \to \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3}$ $\quad f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in I$





$$f(t) = f(t_0) + J_{t_0} f(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

$$\cancel{\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \\ z &= z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \end{aligned}}$$

$$J_{t_0} f = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}_{t = t_0}$$

Se si trascura $o(\dots)$ si ottengono le eq. parametriche della retta passante per $Q(t_0)$ e // $\bar{v} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

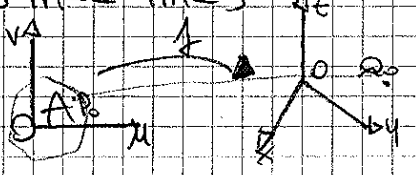
<u>Def</u>: <u>Si dice curva regolare in $\mathbb{R}^n$ una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$</u>

① <u>f iniettiva</u>

② <u>f di classe C^1 in I</u>

③ <u>$f' \neq \bar{0}$ in I $\quad (f_1', f_2', \dots f_n') \neq (0, \dots 0) \quad \forall t \in I$</u>

• Caso $n=2$ $m=3$



$\mathrm{dom} f = A \subseteq \mathbb{R}^2$

$f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$P_0(u_0, v_0)$ $\quad f(u, v_0) = (x(u, v_0), \ldots$ $\quad f(u, v_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita in $I(v_0)$

~~Def: si dice superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$~~

Def: si dice superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$

1. f è iniettiva
2. f di classe C^1 nei punti P_0 interni al dom f
3. $\mathrm{rk}(J_{P_0} f) = 2$ $\quad \forall P_0$ interno ad A

$$n=3 \quad Q = Q(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u_0,v_0) \\ y(u_0,v_0) \\ z(u_0,v_0) \end{pmatrix} + J_{(u_0,v_0)} f \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} + \cancel{o(\ )}$$

Trascurare il resto $o(\ )$ vuol dire sostituire f con

$$\begin{cases} x = x(u_0,v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0) \\ y = y(u_0,v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0) \\ z = z(u_0,v_0) + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0) + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0) \end{cases}$$

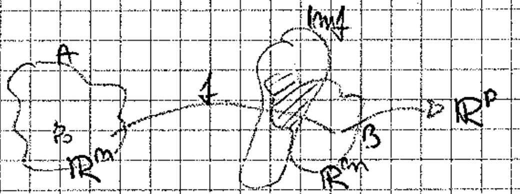
equazioni parametriche del piano passante per $Q_0 = f(u_0,v_0)$ e // ai vettori

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} \qquad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

DERIVAZIONE DELLE FZ COMPOSTE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$



$P_0 \in A'$, $f(P_0) \in B (= \mathrm{dom}\, g)$. Possiamo calcolare $g(f(P_0)) \in \mathbb{R}^p$

Nasce la funzione composta $g \circ f: A' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Si dimostra che se f è differenziabile in P_0 e g è differenziabile in $Q_0 = f(P_0)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in P_0

e risulta: $\boxed{J_{P_0}(g \circ f) = (J_{Q_0} g)(J_{P_0} f)}$

• $n = 1$, $p = 1$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad t \mapsto (x_1, \ldots, x_m) \mapsto z, \quad g \circ f, \quad z = \varphi(t)$$

$\varphi'(t_0)$?

$$J_{t_0} \varphi = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=t_0} = (\varphi'(t_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_m}\right)_{Q = f(t_0)} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} \end{pmatrix}_{t=t_0} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ x_2'(t_0) \\ \vdots \\ x_m'(t_0) \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(t_0) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(Q_0)\, x_1'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(Q_0)\, x_2'(t_0) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(Q_0)\, x_n'(t_0) \qquad Q_0 = f(t_0)$$

derivata di $g \circ f$ in t_0

$f: t \xrightarrow{} (x,y) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad g(x,y) = x^2 + y^2$

$x = \cos t$
$y = \sin t$

$\varphi = g \circ f = 1$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(Q)\, x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(Q)\, y'(t) = 2x(Q)(-\sin t) + 2y(\cos t)$$
$$= 2\cos t(-\sin t) + 2\sin t(\cos t) = 0 \quad \forall t$$