MATRICI

- $$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ -1 & -1 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$$

  $3\times 3 \qquad 3\times 2 \qquad 3\times 2$

- $M = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$ $\qquad M, N \in \mathbb{R}^{1,4}$

  $N = (1 \ 0 \ 2 \ 3)$

  ${}^tM \cdot N = ?$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $4\times 1 \qquad 1\times 4 \qquad 4\times 4$

  $N \cdot {}^tM$

  $$(1 \ 0 \ 2 \ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (3)$$

  $1\times 4 \qquad 4\times 1 \qquad 1\times 1$

- $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

  A si dice NILPOTENTE se $\exists\, m \in \mathbb{N} : A^m = 0$

  Provare che $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente di ordine 3

  $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$

  $A \neq B \quad A \neq 0,\ B \neq 0$

  $A \cdot B = 0$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

  A si dice IDEMPOTENTE se e solo se $A^2 = A$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m,m}$ dimostrare che $A \cdot {}^tA$ è una matrice simmetrica

  A si dice SIMMETRICA se ${}^tA = A$

  $${}^t(A \cdot {}^tA) = A \cdot {}^tA \quad \rightsquigarrow \quad {}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA$$

${}^tA\cdot A$ è simmetrico $\quad {}^t({}^tA\cdot A) = {}^tA\cdot A$ $\quad$ si

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = A^{-1}\cdot A$$

$\underline{A^{-1} \text{ esiste se e } \det A \neq 0}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\underline{\det(AB) = \det A\cdot\det B}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\underset{-1}{\det B}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ +1 & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^{-1} = \frac{1}{\underset{-1}{\det AB}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbb{R}^{n,n}\\ A, B \text{ invertibile} \Rightarrow A\cdot B \text{ invertibile}\\ \qquad (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}\end{array}}$$

- $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ verificare che $A^3 + A^2 - 5A = -3I$

dedurre che A è invertibile e calcolare A^{-1}

$$A^2 = \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&6&8\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix}1&6&8\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&9&-13\\0&1&14\\0&0&-27\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&9&-13\\0&1&14\\0&0&-27\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&6&8\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&15&-5\\0&5&10\\0&0&-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} = -3I$$

$$A(A^2 + A - 5) = -3I$$

$$A\left(\frac{A^2 + A - 5I}{-3}\right) = I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1&6&8\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&9&7\\0&-3&-2\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-3&-7/3\\0&1&2/3\\0&0&-1/3\end{pmatrix}$$

• $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

scomporre $A = A_1 + A_2$

A_1 è simmetrica $\quad {}^tA_1 = A_1$

A_2 è antisimmetrica $\quad {}^tA_2 = -A_2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & z' \\ y' & w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' & -y' \\ -z' & -w' \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & +y' \\ -y' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = x \\ b = y + y' \\ c = y - y' \\ d = w \end{cases}$$

$b + c = 2y$

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ +1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\substack{A_1 \\ \text{simmetrica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\substack{A_2 \\ \text{antisimmetrica}}}}$$

Una matrice se trasformata (trasf. elementare) da un'altra matrice equivalente con lo stesso RANGO

• $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$ $\quad R_2 \leftrightarrow R_2 + 2R_1$

$\underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad R_2 \leftrightarrow R_2 + 2R_1$ → è una matrice invertibile

MATRICE ELEMENTARE = matrice IDENTITÀ che ha subito una trasformazione elementare

$$\underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Una matrice elementare moltiplicata per una matrice A, dà come risultato una matrice che è A che ha subito una trasformazione (la stessa che ha subito I per ottenere la matrice elementare)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} = B \qquad \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad R_3 \leftrightarrow R_3 + 2R_1$$

$E \cdot A = B$

$$\overset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}} \sim \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}} \qquad R_3 \leftrightarrow R_3 + 2R_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}}_{E_1} \qquad \therefore E_1 \cdot B = C \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&-5&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&0&17\end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}}_{D} \quad \tfrac{1}{17}R_3$$

$$E' \cdot E \cdot A = C$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/17\end{pmatrix}}_{E''} \qquad E'' \cdot C = D \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&0&17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

DETERMINANTI

- $$\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\5&0&2&1&2\\-1&1&0&3&-4\\2&1&3&-2&0\\1&-1&2&-3&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&-10&-13&1&17\\0&3&3&3&-7\\0&-3&-3&-2&6\\0&-3&-1&-3&4\end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix}-10&-13&1&17\\3&3&3&-7\\-3&-3&-2&6\\-3&-1&-3&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-10&-13&1&17\\0&0&1&-1\\-3&-3&-2&6\\-3&-1&-3&4\end{vmatrix} =$$

proprietà

$$= 3\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&-10&-13&1&17\\0&1&1&1&-7/3\\0&-3&-3&-2&6\\0&-3&-1&-3&4\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&-10&-13&1&17\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&0&1&-1\\0&0&2&0&-3\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&-10&-13&1&17\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&2&0&-3\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&0&-3&11&-19/3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&2&0&-3\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&-3&11&-19/3\\0&0&2&0&-3\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&-3&11&-19/3\\0&0&1&0&-3/2\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&0&11&-65/6\\0&0&1&0&-3/2\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&1&0&-3/2\\0&0&0&11&-65/6\\0&0&0&1&-1\end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix}1&2&3&0&-3\\0&1&1&1&-7/3\\0&0&1&0&-3/2\\0&0&0&11&-65/6\\0&0&0&0&-1/66\end{vmatrix} \overset{-6}{=} 1\cdot1\cdot1\cdot11\cdot\left(-\frac{1}{66}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$= 1$$

- Trovare (se esiste) una relazione tra h_1, h_2, h_3 affinché il sistema lineare abbia una soluzione e determinare la soluzione generale and $h_1=-1$, $h_2=4$, $h_3=3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = h_1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = h_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = h_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&h_1\\1&3&1&-3&h_2\\2&1&2&-1&h_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&h_1\\0&5&0&-5&h_2-h_1\\0&5&0&-5&h_3-2h_1\end{array}\right) \sim$$

$\boxed{\text{SOLO OPERAZIONI DI RIGA}}$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&h_1\\0&5&0&-5&h_2-h_1\\0&0&0&0&h_3-h_2-h_1\end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = h_1 \\ 5x_2 + 5x_4 = h_2 - h_1 \end{cases}$$

$rk(A) = rk(A|B) = 2$ se $h_3 - h_2 - h_1 = 0$ $h_3 = h_2 + h_1$

$$\left[\begin{cases} x_2 = \dfrac{h_2-h_1}{5} - x_4 \\ x_1 - \frac{2}{5}(h_2-h_1) + 2x_4 + x_3 + 2x_4 \end{cases}\right]$$

Il sistema è COMPATIBILE se $h_3 = h_2 + h_1$, altrimenti è incompatibile

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-1\\0&5&0&-5&5\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&2&-1\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$ R fortemente RIDOTTA (c'è solo una x_1, una x_2, ...)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \qquad \infty^{4-2} = \infty^2 \quad \text{2 parametri liberi}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 1 + x_4 \end{cases} \qquad S = \{(1-x_3,\ 1+x_4,\ x_3,\ x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,1,0,1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

- Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k \end{cases}$$

- determinare tutte le soluzioni per $k=-1$
- discutere l'esistenza delle soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ -1 & k & 1 & k \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

è COMPATIBILE $\quad rk(A) = 2 = rk(A|B)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \quad \infty^{3-2} = \infty^1 \text{ soluzioni}$$

$$S = \{(x_1, -x_1, -1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x_1(1,-1,0) + (0,0,-1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

- $k \neq -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ -1 & k & 1 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -k-1 & 0 & -k-1 \\ 0 & k+1 & 2 & 2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 2 & 2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k-1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{k-2}{2} \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{k-1}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{k-2}{2} \end{cases}$$

$rk(A) = 3 = rk(A|B)$

$\downarrow$ soluzione unica

- $$\begin{cases} 2x - 2y + z + 6w = 0 \\ x - y - 6z + 2w = 0 \\ -x + y + 3z - 2w = 0 \\ 3x - 3y + z + 6w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -6 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad rk(A) = rk(A|B) = 2$$

ci sono ∞^2 soluzioni

$$\begin{cases} x - y + 2w = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = y - 2w \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(y - 2w, y, 0, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(0, \cancel{0}, 0, 0) + y(1,1,0,0) + w(-2,0,0,1)\}$$

$$\begin{cases}(2-t)x + z = 1 \\ 2x - ty + 6z = s \\ -x - tz = -1\end{cases}$$

Determinare i valori di s e t per cui:

- il sistema ammette una soluzione
- " " " più di una soluzione
- determinare la soluzione generale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-t & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -t & 6 & s \\ -1 & 0 & -t & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2-t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 6-2t & s-2 \\ -1 & 0 & -t & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2-t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 6-2t & s-2 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & t^2-2t+1 & t-1 \\ 0 & -t & 6-2t & s-2 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 2t-6 & 2-s \\ 0 & 0 & (t-1)^2 & t-1 \end{array}\right)$$

$t \neq 2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 2(t-3) & 2-s \\ 0 & 0 & (t-1)^2 & t-1 \end{array}\right)$$

- se $t = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2-s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $r(A) = 2 = r(A|B)$ è compatibile

∞^1 soluzioni $\forall s \in \mathbb{R}$

- se $t \neq 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & t & 2(t-3) & 2-s \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-1} \end{array}\right)$ $r(A) = r(A|B) = 3$

∞^0 soluzioni $\forall s$ sol unica

$t \neq 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2(t-2)}{t} & \frac{2-s}{t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-1} \end{array}\right)$ $r(A) = r(A|B) = 3$

soluzione unica

- $t = 2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & s-2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-s}{2} \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-s}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ sol unica

•

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ trovare tutte le $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ $A \cdot X = X \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2z & y-2w \\ 2x-3z & 2y-3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & -2x-3y \\ z+2w & -2z-3w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x} - 2z = \cancel{x} + 2y \\ y - 2w = -2x - 3y \\ 2x - 3z = z + 2w \\ 2y - \cancel{3w} = -2z - \cancel{3w} \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2w = 0 \\ 2x - 4z - 2w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x - 2z - w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w = x - 2z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & -z \\ z & x-2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad x, z \in \mathbb{R}$$

• Trovare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ è invertibile

Posto $\lambda=1$, risolvere $AX=B$ dove $X \in \mathbb{R}^{3,2}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda-1) \rightsquigarrow \lambda=0, \ \lambda=\tfrac{1}{2} \Rightarrow \det A=0$$

A è invertibile $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$

↳ se $\lambda=1$ A è invertibile

Calcoliamo A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$I \qquad A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(I)
$AX=B$
$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$
$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$
$IX=A^{-1}B$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$3\times3 \qquad 3\times2$

(II)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1=(8,-1) \\ x_2=(-2,1) \\ x_3=(4,-1) \end{array}$$

• Risolvere le seguenti $AX=B$ se possibile

(a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ non si può

(b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 8/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/3 & 7/6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right) \quad X=\begin{pmatrix} 4/3 & 7/6 \\ 1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

(d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}3&4\\1&5\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&-1&3&4\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&\frac12&-\frac12&\frac32&2\\0&1&\frac13&\frac13&\frac53\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-\frac23&\frac43&\frac76\\0&1&\frac13&\frac13&\frac53\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac23\\0&1&\frac13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac43&\frac76\\\frac13&\frac53\end{pmatrix}$$

$$X_1-\frac23X_3=\left(\frac43,\frac76\right)\qquad X_1=\left(\frac43,\frac76\right)+\frac23(x_3,y_3)$$

$$X_2+\frac13X_3=\left(\frac13,\frac53\right)\qquad X_2=\left(\frac13,\frac53\right)-\frac13(x_3,y_3)$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac43&\frac76\\\frac13&\frac53\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac23t&\frac23s\\-\frac13t&-\frac13s\\t&s\end{pmatrix}\qquad t,s\in\mathbb{R}$$

- Determinare X per cui $\underset{3\times2}{X}\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}}=\underset{3\times2}{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}}$

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times3}{{}^tX}=\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\qquad {}^tX=Y$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&-1&1&0&0\\2&3&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|ccc}1&-1&1&0&0\\0&5&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&\frac45&0&\frac15\\0&1&-\frac15&0&\frac15\end{array}\right)$$

$-\frac15 \quad 0 \quad \frac15$

$${}^tX=\begin{pmatrix}\frac45&0&\frac15\\-\frac15&0&\frac15\end{pmatrix}\qquad Y=\begin{pmatrix}\frac45&-\frac15\\0&0\\\frac15&\frac15\end{pmatrix}$$

- Verificare che $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&1\\-1&-3&0\end{pmatrix}$ è invertibile

Calcolare A^{-1} in 2 modi: - risolvendo un opportuno sistema ad incognite vettoriali

- con complementi algebrici, cioè $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$ ...

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow \det A=2\rightsquigarrow \text{è invertibile}$$

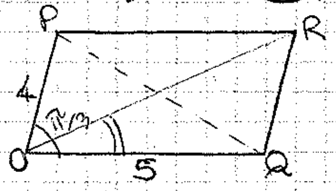
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac32&-\frac32&\frac12\\-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$-\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\-1&-3&0&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&2&0&-1&1&-1\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac52&-\frac32&\frac32\\0&1&0&-\frac12&\frac12&-\frac12\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac32&-\frac32&\frac12\\0&1&0&-\frac12&\frac12&-\frac12\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$-\ {}^tA^*=\begin{pmatrix}3&1&2\\3&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-1&1&-1\\2&0&2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac12A^*=\begin{pmatrix}\frac32&-\frac32&\frac12\\-\frac12&\frac12&-\frac12\\1&0&1\end{pmatrix}$$

VETTORI

• 

$\bar{u} = OP$

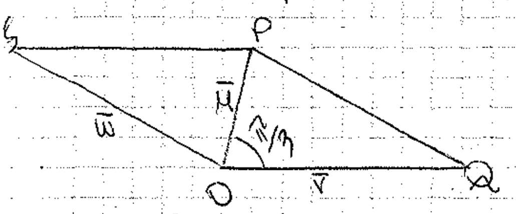
$\bar{v} = OQ$

$\bar{u} + \bar{v} = OR$

? $|OR| = |\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v})} = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u} + \underline{\bar{u}\cdot\bar{v}} + \underline{\bar{v}\cdot\bar{u}} + \bar{v}\cdot\bar{v}} =$

$= \sqrt{|\bar{u}|^2 + 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2} = \sqrt{|\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\frac{\pi}{3} + |\bar{v}|^2} =$

$= \sqrt{16 + \cancel{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 25} = \sqrt{61}$



$\bar{u} = \bar{w} + \bar{v} \Rightarrow \bar{w} = \bar{u} - \bar{v}$

? $|\bar{w}| = \sqrt{(\bar{u}-\bar{v})(\bar{u}-\bar{v})} = \sqrt{|u|^2 - 2\bar{u}\bar{v} + |\bar{v}|^2} =$

$= \sqrt{|\bar{u}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\frac{\pi}{3} + |\bar{v}|^2} = \sqrt{16-20+25} = \sqrt{21}$

? $R\hat{O}Q$ = angolo tra OQ e OR, cioè tra $\bar{v}$ e $(\bar{u}+\bar{v})$

$$\cos(R\hat{O}Q) = \frac{\bar{v}\cdot(\bar{u}+\bar{v})}{|\bar{v}|\,|\bar{u}+\bar{v}|} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u} + \bar{v}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|\,|\bar{u}+\bar{v}|} = \frac{|\bar{v}||\bar{u}|\cos\hat{uv} + |\bar{v}|^2}{|\bar{v}|\,|\bar{u}+\bar{v}|} =$$

$$= \frac{5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + 25}{5\sqrt{61}} = \frac{10+25}{5\sqrt{61}} = \frac{7}{\sqrt{61}}$$

• <u>Sia $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ una base ortonormale positiva</u>

<u>se $\bar{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k} \Rightarrow \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$</u>

• $\bar{u} = (1, -1, 3)$ $\quad\bar{v} = (0, 5, -2)$

$\bar{u}$ e $\bar{v}$ sono ortogonali? $\Rightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$ se e solo se $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 5 + 3\cdot(-2) = -11 \Rightarrow \bar{u}$ e $\bar{v}$ non sono $\perp$

e angolo che formano è $\pi/2 < \hat{uv} < \pi$

non sono neanche paralleli perché $\forall k \in \mathbb{R}\quad k\bar{u} \neq \bar{v}$

$$\cos\hat{uv} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\,\sqrt{0^2+5^2+(-2)^2}} = \frac{-11}{\sqrt{11}\,\sqrt{29}} = -\sqrt{\frac{11}{29}}$$

$\hat{uv} = \arccos\left(-\sqrt{\frac{11}{29}}\right) = 2.23$ rad

• $\bar{u} = (1, -1, 3)$ $\quad\bar{v} = (0, 5, 2)$

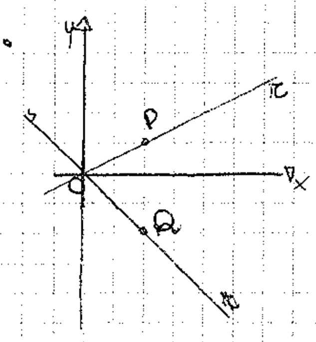
$\hat{u}' = \text{vers}\,\bar{u} \qquad \hat{v}' = \text{vers}\,\bar{v}$

$\text{vers}\,\bar{u} = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{11}} \qquad \hat{u}' = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$

$\text{vers}\,\bar{v} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{29}} \qquad \hat{v}' = \left(0, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

Un vettore che ha la direzione della bisettrice è la loro somma

$$\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{11}}-\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

- 

$r: y = mx$

$s: y = m'x$

Quando sono ortogonali?

Prendiamo un punto P su r $\Rightarrow P(1, m)$
" " " Q su s $\Rightarrow Q(1, m')$

$OP = \hat{\imath} + m\hat{\jmath}$
$OQ = \hat{\imath} + m'\hat{\jmath}$ $\quad \Rightarrow r \perp s \Rightarrow OP \perp OQ \Rightarrow OP \cdot OQ = 0$

$$1 + m \cdot m' = 0$$
$$m \cdot m' = -1$$

- $\bar{u} = (1, 2, 3)$
$\bar{v} = (-1, 4, 5)$

Trovare tutti i vettori ortogonali sia a $\bar{u}$ che a $\bar{v}$

$\Rightarrow \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} \bar{x} \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{x} \cdot \bar{v} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underset{3}{6} & \underset{4}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \left(-\frac{1}{3}x_3, -\frac{4}{3}x_3, x_3\right)$$

Verifico:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 6\hat{k} = (-2, -8, 6)$$

- $\bar{u} = (1, 2, 3)$ $\quad$ trovare i vettori $\bar{x}$: $\bar{u} \times \bar{x} = \bar{v}$
$\bar{v} = (4, -3, a)$

$\bar{u} \perp \bar{v} \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 = 4 - 6 + 3a = 0 \quad 3a = 2 \quad a = \frac{2}{3}$

Osservazione: se $\bar{x}_0$ è una soluzione, sono anche soluzioni i vettori $\bar{x}_0 + t\bar{u}$, $\forall t$

Verifico $\bar{u} \times (\bar{x}_0 + t \cdot \bar{u}) = \bar{u} \times \bar{x}_0 + \cancel{\bar{u} \times \bar{u}(t)} = \bar{u} \wedge \bar{x}_0 = \bar{v}$

$$\bar{u} \wedge \bar{x} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (2x_3 - 3x_2)\hat{\imath} - (x_3 - 3x_1)\hat{\jmath} + (x_2 - 2x_1)\hat{k}$$

$$\begin{cases} 2x_3 - 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 - 2x_1 = a \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2/3 & 4/3+a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2/3 \end{array}\right)$$

$a = \frac{2}{3}$
rk(A) = rk(A|B)
∞ soluzioni

$a=\frac{2}{3}$ $\begin{cases} -3x_2+2x_3=6 \\ 3x_1-x_3=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\frac{2}{3}x_3-\frac{6}{3} \\ x_1=\frac{1}{3}x_3-1 \end{cases}$

$$\bar{x}=\left(\tfrac{1}{3}t-1,\ \tfrac{2}{3}t-\tfrac{6}{3},\ t\right)= \quad \left(-1,-\tfrac{6}{3},0\right)+t\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1\right)$$

- $\bar{u}=(1,2,3)$

$\bar{v}=(0,1,-2)$

$\bar{w}=(1,0,0)$

Calcoliamo $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ e $\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})$

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-7\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

$$(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -7 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\bar{v}\times\bar{w}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2\hat{j}-\hat{k}$$

$$\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & +2 & 3\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}=6\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$$

Controlliamo che $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ sta nel piano di $\bar{u}$ e $\bar{v}$

Poiché $\bar{u}$ e $\bar{v}$ non sono paralleli e formano quindi una base per i vettori del esso piano $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ è complanare con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ se e solo se è combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, cioè se e solo se esistono due numeri t,s per cui $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}=t\bar{u}+s\bar{w}$

$$(0,1,-2)=t(1,2,3)+s(0,1,-2) \qquad t=0,\ s=1$$

- Calcolare $|u+v|^2$

dedurre che ① u e v sono ortogonali se e solo se $|u+v|=|u-v|$

② $u+v$ e $u-v$ sono ortogonali se e solo se $|u|=|v|$

$\underline{|u+v|=\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)}}$ $\qquad |u+v|^2=(u+v)\cdot(u+v)=$

$$=u\cdot u+u\cdot v+v\cdot u+v\cdot v=$$

$$=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$$

$$|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$$

① $u\perp v \Rightarrow u\cdot v=0$

$$|u+v|^2=|u|^2+|v|^2=|u-v|^2$$

$$|u+v|=|u-v|$$

② $u+v\perp u-v \Rightarrow (u+v)(u-v)=0$

$$u\cdot u+\cancel{v\cdot u}-\cancel{u\cdot v}-v\cdot v=0$$

$$u\cdot u-v\cdot v=0 \qquad |u|^2=|v|^2$$

$$|u|=|v|$$

• siano u, v versori. Dimostrare che:

(1) se $u+v$ è un versore, allora $\hat{uv}=\frac{2}{3}\pi$

(2) se $u-v$ è un versore, allora $\hat{uv}=\frac{1}{3}\pi$

(1) $|u+v|^2=|u|^2+|v|^2+2u\cdot v$

$$u\cdot v=|u||v|\cos\hat{uv}$$

$$|u|^2+|v|^2+2|u||v|\cos\hat{uv}=1$$

$$1+\cancel{1}+2\cos\hat{uv}=\cancel{1}$$

$$2\cos\hat{uv}=-1$$

$$\cos\hat{uv}=-\frac{1}{2}\qquad \hat{uv}=\frac{2}{3}\pi$$

(2) $|u-v|^2=|u|^2+|v|^2-2u\cdot v$

$$u\cdot v=|u||v|\cos(\hat{uv})$$

$$|u|^2+|v|^2-2|u||v|\cos(\hat{uv})=1$$

$$\cancel{1}+\cancel{1}-2\cos(\hat{uv})=\cancel{1}$$

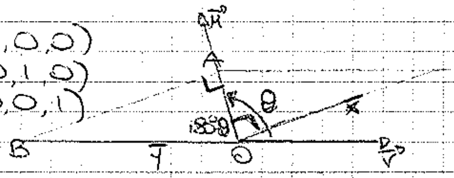
$$\cos(\hat{uv})=\frac{1}{2}\qquad \hat{uv}=\frac{\pi}{3}$$

• Dati i vettori $\bar{u}=\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}$

$\bar{v}=\bar{i}-\bar{j}$

scomporre $\bar{u}$ nella somma di un vettore perpendicolare a $\bar{u}$ e di uno avente la stessa direzione di $\bar{v}$

$\bar{i}=(1,0,0)$
$\bar{j}=(0,1,0)$
$\bar{k}=(0,0,1)$



$\bar{u}\cdot\bar{v}=\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\hat{uv}$

$\bar{u}\cdot\bar{v}=1-3=-2$ $\qquad\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{22}}=-\frac{\sqrt{22}}{11}$

Dobbiamo trovare un vettore $\bar{x}$ e $\bar{y}$: $\begin{matrix}x\perp u\\ y\parallel v\end{matrix}$ $\Rightarrow \bar{u}=\bar{x}+\bar{y}$

$\bar{y}=\alpha\cdot\text{vers}(\bar{v})$

$|\bar{y}|=|pr_{\bar{v}}\bar{u}|$ proiezione di $\bar{u}$ su $\bar{v}$

$\cos(180-\theta)=-\cos(\theta)$

$$|\cos\theta|=\frac{|u|}{|pr_{\bar{v}}\bar{u}|}\Rightarrow |pr_{\bar{v}}\bar{u}|=\frac{|u|}{|\cos\theta|}=\frac{\sqrt{11}}{1}\cdot\frac{\sqrt{22}}{2}=\frac{\sqrt{242}}{2}=\frac{11}{2}\sqrt{2}=|\bar{y}|$$

$$\bar{y}=-\frac{11}{2}\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)=-\frac{11}{2}\hat{i}+\frac{11}{2}\hat{j}$$

$\bar{u}=\bar{x}+\bar{y}$ $\qquad\bar{x}=\bar{u}-\bar{y}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+\frac{11}{2}\hat{i}-\frac{11}{2}\hat{j}=$

$$=\frac{13}{2}\hat{i}-\frac{5}{2}\hat{j}-\hat{k}$$

$$\bar{x}=\left(-\frac{11}{2};\frac{11}{2},0\right)$$

$$\bar{y}=\left(\frac{13}{2},-\frac{5}{2},-1\right)$$

verifichiamo $\bar{x} \perp \bar{u} \iff \bar{x} \cdot \bar{u} = 0$

$$\left(\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}, -1\right) \cdot (1, 3, -1) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2} + 1 = \frac{13-15+2}{2} = 0$$

- Determinare una base ortonormale $B' = \langle u, v, w \rangle$ dei vettori dello spazio ~~spazio~~ sapendo che $u \parallel a = i - 2j + 2k$ $\quad v \perp b = i - j + k$

Trovare le componenti del vettore $z = \frac{1}{3}\hat{i} + j$ con riferimento alla base di prima B'

$u = \frac{1}{3}(i - 2j + 2k) = \frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$ $\quad$ u versore // ad a

$$\tilde{v} = (i - 2j + 2k) \wedge (i - j + k) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & +2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0i + j + k = +j + k$$

$$v = \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k)$$

$$w = u \wedge v = \left(\frac{1}{3}i, -\frac{2}{3}j, \frac{2}{3}k\right) \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{2}}j \; \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\right)\hat{i} - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\hat{j} + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\hat{k} =$$

$$= -\frac{4}{3\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{k} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}\hat{i} - \frac{1}{6}\sqrt{2}\hat{j} + \frac{1}{6}\sqrt{2}\hat{k}$$

$$\frac{1}{3}i + j = \alpha\left(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k\right) + \beta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) + \varphi\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}i - \frac{1}{3\sqrt{2}}j + \frac{1}{3\sqrt{2}}k\right)$$

Dobbiamo determinare α, β, φ

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\alpha - \frac{4}{3\sqrt{2}}\varphi \\ 1 = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - \frac{1}{3\sqrt{2}}\varphi \\ 0 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta - \frac{1}{3\sqrt{2}}\varphi \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right) \quad rk = 3$$

$$\frac{4}{3}\alpha = -1 \quad \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\varphi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \Big/ -\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{7}{12} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{16}$$

- Dati i seguenti vettori nello spazio

$v_1(-1,2,1)$ $\quad v_2(1,1,-2)$ $\quad v_3=(2,-1,3)$

sono complanari?

$(v_1 \times v_2)\cdot v_3 = 0$

$\cancel{v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + 3\hat{j}}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1(1) - 2(3+4) + 1(-1-2) = -1 -14 - 3 = -18$$ non sono complanari

- $v = 3i - j + k$
  $u = i + 4k$ $\qquad r_h = (7h-2)i + 2(h-2)j + 10(h-1)k$
  $w = 2i + j - k$

  - verificare che v, u, w non sono complanari e determinare h per cui r_h è complanare con v e u
  - determinare il modulo di r_h che è ortogonale a w

$(v \times u)\cdot w \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) + 1(-9) + 1(1) = -12 - 9 + 1 = -20 \neq 0$

$(v \times u)\cdot r_h = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7h-2 & 2h-4 & 10h-10 \end{vmatrix} = -(-10h+10-2h+4) - 4(6h-12+7h-2) = 0$

$10h - 10 + 2h - 4 - 24h + 48 - 28h + 8 = 0$

$-40h = -42 \qquad h = \frac{42}{40} = \frac{21}{20}$

$w \perp r_h \qquad w \cdot r_h = 0$

$(2\hat{i} + j - k)[(7h-2)\hat{i} + 2(h-2)j + 10(h-1)k] = 0$

$14h - 4 + 2h - 4 - 10h + 10 = 0$

$6h = -2 \quad h = -\frac{1}{3}$

$r_h = -\frac{13}{3}i - \frac{14}{3}j - \frac{40}{3}k$

$|r_h| = 14.8$

- Dati i vettori $\bar{u} = i + j - k$, $\bar{v} = i - j + 2k$ decomporre $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$ tali che $\bar{x} \parallel \bar{u}$, $\bar{y} \perp \bar{v}$

$\bar{u} = (1, 1, -1)$ $\qquad \bar{x} \parallel \bar{u}$ $\qquad |\bar{u}| = \sqrt{3}$ $\qquad \text{vers}(\bar{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\bar{v} = (1, -1, 2)$ $\qquad \bar{y} \perp \bar{v}$

$\bar{x} = \alpha \cdot \text{vers}(\bar{u})$

$|\bar{x}| = |\text{proiez di } \bar{v} \text{ su } \bar{u}| = \frac{|v|}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}/3} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{3}$

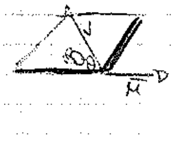
$\bar{x} = 3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (-3, -3, +3)$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cos\hat{uv}$ $\quad (3\sqrt{2})$

$\bar{u}\cdot\bar{v} = -2$

$\cos\hat{uv} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\bar{v} = \bar{x} + \bar{y} \qquad \bar{y} = \bar{v} - \bar{x} = (4, 2, -1)$



• Trovare i vettori complanari con $\bar{u} = i - k$, $\bar{v} = i + j$ ed ortogonali a $\bar{u} + \bar{v} = 2i + j - k$

$\bar{s} = (a, b, c)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \qquad c - (b - a) = 0 \qquad c - b + a = 0$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases}$$

$3a = 0$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$ $\quad \bar{s} = (0, t, t)$

• Trovare la proiezione ortogonale della retta $e: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ sul piano $\pi: x + y - 3z = 0$

$\vec{d_e} = (1, -1, 2)$

$(0, 1, 0) \in e$

$\bar{n} = (1, 1, -3) \perp \pi$

se $e \parallel \pi$: $\bar{n} \cdot \vec{d_e} = 1 - 1 - 6 \neq 0$ → la retta interseca il piano

troviamo il fascio di piani contenenti e

$e: \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 2x \end{cases} \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ $\quad \lambda(x + y - 1) + \mu(2x - z) = 0$

$(\lambda + 2\mu)x + \lambda y - \mu z - \lambda = 0$

il generico piano che contiene e è ortogonale al vettore $\bar{v} = (\lambda + 2\mu, \lambda, -\mu)$

il piano di questo fascio che è $\perp$ al piano π: $\bar{v} \perp \bar{n}$

$\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$

$\lambda + 2\mu + \lambda + 3\mu = 0$

$\lambda = -\frac{5}{2}\mu \qquad \lambda = -5, \ \mu = 2$

$$\begin{cases} -x - 5y - 2z + 5 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad h: \begin{cases} x + 5y + 2z - 5 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

h: proiezione $\perp$ di e

$-4y - 5z + 5 = 0$

$z = -\frac{4}{5}y + 1$

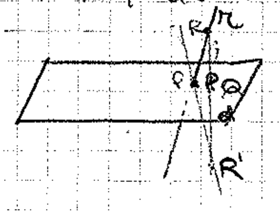
$x + y + \frac{12}{5}y - 3 = 0$

$x = -\frac{17}{5}y + 3$

$$h: \begin{cases} x = -\frac{17}{5}t + 3 \\ y = t \\ z = -\frac{4}{5}t + 1 \end{cases}$$

• Scrivere le eq. della retta r' simmetrica alla retta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = -2t \end{cases}$ rispetto al piano $\alpha: x - y + 4z - 7 = 0$

$R = (1, 0, 0)$



$r \cap \alpha$: $1 + t - 3t - 8t - 7 = 0$

$-10t = 6 \quad t = -\frac{3}{5}$

$P = \left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right)$

s': retta passante per R $\perp d$ $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -t' \\ z = +4t' \end{cases}$

$Q : d \cap s$ $\quad 1 + t' + t' + 16t' - 7 = 0$ $\quad 18t' = 6 \quad t' = \frac{1}{3}$ $\quad Q = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Determiniamo il punto R'

$R(1,0,0)$
$Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
$R'(a,b,c)$

$$\begin{cases} \frac{1+a}{2} = \frac{4}{3} \\ \frac{0+b}{2} = -\frac{1}{3} \\ \frac{0+c}{2} = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{8}{3} \end{cases} \qquad R'\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Retta r' passante per $R'\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $P\left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$$r' \begin{cases} x = \frac{5}{3} + \frac{19}{15}t \\ y = -\frac{2}{3} + \frac{17}{15}t \\ z = \frac{8}{3} + \frac{22}{15}t \end{cases} \qquad d = (R' - P) = \left(\frac{19}{15}, \frac{17}{15}, \frac{22}{15}\right)$$

- Trovare le eq. dei piani che contengono. In ciascun caso, scrivere un vettore $n \perp$ al piano

① $A(1,2,1)$ $\quad X - A$
$B(1,3,-1)$ $\quad B - A$
$C(0,2,-2)$ $\quad C - A$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad -3(x-1) + 1(+2)(y-2) + 1(z-1) = 0$$

$$-3x + 3 + 2y - 4 + z - 1 =$$

$$\boxed{3x - 2y - z + 2 = 0}$$

$\bar{n} \perp$ piano $\quad \bar{n}(3, -2, -1)$

$$\text{vers}(\bar{n}) = \frac{(3,-2,-1)}{\sqrt{14}}$$

② il punto $(1,2,1)$ e la retta $\ell \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 \end{cases}$

$$\ell \begin{cases} x = 1 + 2y - 6 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\lambda(x - 2y + 5) + \mu(z) = 0$ passante il punto

$\lambda(1 - 4 + 5) + \mu(1) = 0$

$2\lambda + \mu = 0 \qquad \mu = 2 \quad \lambda = 1$

$x - 2y - 2z + 5 = 0$

oppure trovo 2 punti della retta e faccio come l'esercizio primo

$t = 0 \to Q = (1,3,0)$
$t = 1 \to Q' = (-1,2,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x-1) + 2(y-2) + 2(z-1) = 0$$

$$-x + 1 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x - 2y - 2z + 5 = 0$$

$$\bar{n} = (1, -2, -2)$$

$$\text{vers}(\bar{n}) = \frac{(1,-2,-2)}{3}$$

• Verificare che le rette $\varrho: (x,y,z)=(1+2t,1-t,3t)$ e $\varrho' \begin{cases} -x+y+z=2 \\ 3y+z=0 \end{cases}$ sono $\parallel$ e trovare il piano che le contiene entrambe e la distanza tra le 2 rette

$\vec{d}_\varrho = (2,-1,3)$ $\quad \vec{d}_{\varrho'} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} = (-2,1,-3)$

ϱ e ϱ' sono paralleli

$\lambda(-x+y+z-2) + \mu(3y+z) = 0 \qquad (1,1,0)$

$\lambda(-1+1-2) + \mu(3) = 0$

$-2\lambda + 3\mu = 0 \qquad \mu = 2 \quad \lambda = 3$

$-3x+3y+3z-6+6y+2z=0$

$3x-9y-5z+6=0$

$P(1,1,0) \qquad A(-2,0,0)$

$d_{(\varrho,r)} = \frac{|(3,1,0)\wedge(-2,1,-3)|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{115}{14}}$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k} \qquad | \quad | = \sqrt{115}$

• Si considerano i piani $\pi_1: ax+y-2z=0$, $\pi_2: y+2z+2b=0$, $\pi_3: 2x+y+2z=1$ trovare i valori di a e b x cui la retta $\pi_1 \cap \pi_2$ è parallela a π_3

$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\hat{i} - 2a\hat{j} + a\hat{k} = (4,-2a,a)$

$\vec{n}_{\pi_3} \perp \pi \quad \vec{n}_{\pi_3} = (2,1,2)$

$\varrho \parallel \pi_3 \qquad (4,-2a,a)\cdot(2,1,2)=0$

$8 - 2a + 2a = 0 \qquad$ mai

• Dato il piano $\pi: x+2y-4z=7$ trovare 3 versori μ, v, w a due a 2 ortogonali : μ e $v \parallel$ a π

$w = \frac{(1,2,-4)}{\sqrt{21}} \qquad \mu = \frac{(0,2,1)}{\sqrt{5}} \qquad v = \frac{(10,-1,2)}{\sqrt{105}}$

$= (-2-1)\hat{i} - (-1)\hat{j} + (-2)\hat{k} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2+8)\hat{i} - (1)\hat{j} + (2)\hat{k} = 10\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

- Verificare che le rette $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ sono incidenti e trovare il piano che le contiene

$\begin{cases} x=2y+1 \\ x=z+1 \\ x=1-y \\ y=z \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{2y-1=1-y} \\ y=z \end{cases}$ $\begin{cases} 2y+1=1-y \Rightarrow y=0 \\ x=1 \\ z=0 \end{cases}$ $(1,0,0)$

$\begin{cases} \lambda(x-2y-1)+\mu(x-z-1)=0 \\ \lambda(x+y-1)+\mu(y-z)=0 \end{cases}$ $\lambda(x-2y-\cancel{1}-x-y+\cancel{1})+\mu(x-\cancel{z}-1-y+\cancel{z})=0$

$\lambda(-3y)+\mu(x-y-1)=0$

$\lambda(x-2y-1)+\mu(x-z-1)=0$ $(0,1,1)$

$\lambda(-3)+\mu(0-1-1)=0$

$-3\lambda=+2\mu$ $\mu=-3$, $\lambda=2$

$\begin{cases} x=1-6y+3z+1 \\ x+y-1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6y+3z+1+y-1=0 \\ y=z \end{cases}$ $\begin{cases} y=z \\ y=z \end{cases}$

$2x-6y-2-3x+3z+3=0$

$-x-6y+3z+1=0$

- Es sulla distanza di un punto da una retta

$r \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ $P(1,1,1)$ $r \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=5t-2 \end{cases}$

Calcoliamo $d(P_0,r)=\dfrac{|(P-H)\wedge \bar{v}|}{|\bar{v}|}$

$\bar{v}=(-1,1,5)$ $H(1,0,-2)$ $\rightarrow$ ricavati dalle equazioni parametriche di r

$P-H=(0,1,3)$ $(P-H)\wedge\bar{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{4+9+1}}{\sqrt{1+1+25}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{14}{27}}$$

OPPURE

$d(P,r)=d(P,Q)$ Q proiezione ortogonale di P su r

$Q=r\cap\pi$, π piano per $P\perp r$ $\Rightarrow$ prendiamo $\bar{v}=\bar{n}\perp\pi$

π: $-x+y+5z+d=0$ poniamo il passaggio per P

$-\cancel{1}+\cancel{1}+5+d=0$ $d=-5$

π: $x-y-5z+5=0$

$Q-\begin{cases} x-y-5z+5=0 \\ x=1-t \\ y=t \\ z=5t-2 \end{cases}$ $1-t-t-25t+10+5=0$

$-27t=-16$ $t=16/27$

$Q\left(\frac{11}{27},\frac{16}{27},\frac{26}{27}\right)$

$$d(P,r)=d(P,Q)=|P-Q|=\sqrt{\left(1-\frac{11}{27}\right)^2+\left(1-\frac{16}{27}\right)^2+\left(1-\frac{26}{27}\right)^2}=\sqrt{\frac{14}{27}}$$

- $\pi: 2x+3y+z-1=0$

  $\pi': 2x+3y+z+25=0$

$$d(\pi,\pi') = \inf d(P,Q) \text{ con } P\in\pi, Q\in\pi'$$
$$= d(P,\pi') \quad \forall P\in\pi$$

$P=(0,0,1) \quad d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = \dfrac{|0\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 1+25|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{|26|}{\sqrt{14}}$

- Verificare che le seguenti rette sono sghembe e determinare la retta di minima distanza tra loro, indicando il valore di questa distanza.

$r_1(x,y,z) = (2+t, -1-t, 4+3t) \rightsquigarrow d(1,-1,3)$

$r_2(x,y,z) = (3+t, 2+t, 1+t) \rightsquigarrow d(1,1,1)$

$r_1\cap r_2 \begin{cases} \cancel{2+t=3+t} \\ \cancel{-1-t=2+t} \\ \cancel{4+3t=1+t}\end{cases}$ $\begin{cases} 2+t=3+t' \\ -1-t=2+t' \\ 4+3t=1+t'\end{cases}$ $\begin{cases} t'=-1+t \\ -1-t=2-1+t \\ 4+3t=1-1+t\end{cases}$ $\begin{cases} t'=-1+t \\ t=-1 \\ t=-2\end{cases}$ NO!

generico di r_1: $P(2+t, -1-t, 4+3t)$

" di r_2: $Q(3+t', 2+t', 1+t')$

$(Q_0-P_0)\cdot \vec{d}_{r_1} = 0$

$(Q_0-P_0)\cdot \vec{d}_{r_2} = 0$

$(Q_0-P_0) = (1+t'-t;\ 3+t'+t;\ -3+t'-3t)$

$\begin{cases} 1+t'-t-3-t'-t-3+3t'-9t=0 \\ 1+t'-t+3+t'+t-3+t'-3t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -11+3t'-11t=0 \\ 1+3t'-3t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3t'=11t+11 \\ 1+11t+11-3t=0 \end{cases}$

$t' = \dfrac{-\frac{33}{2}+11}{3} = -\dfrac{11}{6} \qquad t=-\dfrac{3}{2}$

$P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad Q_0\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$

$(Q_0-P_0) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$d(Q-P) = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$r \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}t \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t \end{cases}$

- Determinare le rette passanti per il punto $P(2,3,1)$ e che intersecano la retta $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x-z+2=0\end{cases}$ sotto un angolo di $\pi/3$.

$r\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-2x \\ z=x+2 \end{cases}$ $r\begin{cases} x=t \\ y=6-2t \\ z=t+2 \end{cases}$ $\vec{d}_r = (1,-2,1)$

$Q(t, 6-2t, t+2)$

$\bar{v} = Q-P = (t-2, 1-2t, t+1)$

$\cos\varphi = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} \rightsquigarrow \dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{t-2-2+4t+t+1}{\sqrt{6}\ \sqrt{(t-2)^2+(1-2t)^2+(t+1)^2}}$

$6(t^2+4-4t+1+4t^2-4t+t^2+1+2t) =$
$= 4(6t-3)^2$

$\cancel{9}^{3}(6t^2-6t+6) = \cancel{6}^{2}(36t^2+9-36t)$

$\cancel{18}(t^2-t+1) = \cancel{18}(6t^2+1-6t)$

$3t^2-3t=0 \quad 3t(t-1)=0 \quad \begin{matrix} t=0 \\ t=1 \end{matrix}$

$\cdot\ \bar{r}=(-2,1,1) \qquad \begin{cases} x=2-2t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{cases}$

$\cdot\ \bar{v}=(-1,-1,2) \qquad \begin{cases} x=\cancel{2}-t' \\ y=\cancel{3}-t' \\ z=\cancel{1}+2t' \end{cases}$

• Determinare gli angoli individuati dalle seguenti coppie di piani

1. $\alpha: y+z-4=0 \qquad \alpha': x+y-1=0$

$n(0,1,1) \qquad n'(1,1,0)$

$\cos\theta = \pm\frac{\bar{n}\cdot\bar{n}'}{|n||n'|} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2} \qquad \theta=\frac{\pi}{3} \quad \theta=\frac{2}{3}\pi$

2. $\alpha: 3x-4y+5z-1=0 \qquad \alpha': z=3$

$n(3,-4,5) \qquad n'(0\ 0\ 1)$

$\cos\theta = \pm\frac{\bar{n}\cdot\bar{n}'}{|n||n'|} = \pm\frac{5}{\sqrt{50}} = \pm\frac{5}{5\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta=\frac{\pi}{4} \quad \theta=\frac{3}{4}\pi$

• Date la retta $r \begin{cases} x=2t-3 \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$ e il piano $\alpha: x+z-5=0 \quad N(1,0,1)$

determinare: ① il piano passante per r e $\perp$ ad α

② i piani passanti per r che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con α

①

$\begin{matrix} x=2y-3 \\ z=2-y \end{matrix} \qquad \lambda(x-2y+3)+\mu(y+z-2)=0$

$(\lambda)x+(-2\lambda+\mu)y+\mu z+(3\lambda-2\mu)=0$

$N'(\lambda,-2\lambda+\mu,\mu)$

$N \perp N' \rightarrow N\cdot N'=0 \qquad \lambda+\mu=0 \quad \mu=-\lambda \quad \begin{matrix} \lambda=1 \\ \mu=-1 \end{matrix}$

$x-2y+3-y-z+2=0$

$\boxed{x-3y-z+5=0}$

② $\cos\hat{\mu v} = \frac{\bar{\mu}\cdot\bar{v}}{|\mu||v|}$

$\frac{1}{2} = \frac{\overset{\lambda+\mu}{(1,0,1)\cdot(\lambda,-2\lambda+\mu,\mu)}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2+4\lambda^2+\mu^2-4\lambda\mu}}$

$2\lambda+2\mu=\sqrt{2(5\lambda^2+2\mu^2-4\lambda\mu)}$

$8\lambda\mu+4\lambda^2+\cancel{4\mu^2} = 10\lambda^2+\cancel{4\mu^2}-8\lambda\mu$

$6\lambda^2-16\lambda\mu=0 \qquad 2\lambda(3\lambda-8\mu)=0$

$3\lambda(3\lambda-\cancel{8}\,26)=0 \qquad \mu=3$

$\lambda=8 \qquad \lambda=0$

$8x-16y+24+3y+3z-6=0 \qquad \boxed{y+z-2=0}$

$\boxed{8x-13y+3z+18=0}$

SPAZI VETTORIALI

$$\boxed{\begin{array}{l} W \subseteq V \\ \cdot\; 0_V \in W \\ \cdot\; w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W \\ \cdot\; \lambda \in \mathbb{K},\; w \in W \Rightarrow \lambda w \in W \end{array}}$$

- Dire quali delle seguenti condizioni sulla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ determinano un sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$

i) $a=1$ No! ⇝ es. la matrice nulla non è compresa / la somma non appartiene al sottospazio
ii) $a+d=0$ Sì! ⇝ la matrice nulla è compresa
iii) $ad-bc=0$ No! ⇝ non vale la somma
iv) $b=c$ Sì!
v) $b=-c$ Sì!

ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a+d=0$ $\qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $a'+d'=0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$a+a'+d+d'=0$$
$$(a+d)+(a'+d')=0 \quad \text{sì}$$

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \qquad a+d=0 \Downarrow 2a+2d=0$$

iii) $(a+a')(d+d')-(b+b')(c'+c)=0$

$$\cancel{ad}+a'd+ad'+a'd'-bc-b'c-bc'-b'c'=0$$
$$a'd+ad'-(b'c+bc')=0 \quad \text{non sempre}$$

iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $b=c$, $b-c=0$ $\qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $b'=c'$, $b'-c'=0$

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \qquad b+b'=c+c'$$
$$\underbrace{b-c}_{0}+\underbrace{(b'-c')}_{0}=0$$

v) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $b=-c$, $b+c=0$ $\qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $b'=-c'$, $b'+c'=0$

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \qquad b+b'=(c+c')$$
$$(b+c)+(b'+c')=0$$

- In $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:

$U=\{(x,y,z,w) / 2x-y+z=x+y+w=0\}$

$V=\mathcal{L}((0,0,1,1),(1,1,0,0))$

Dimostrare che $U\cap V=\{0\}_{\mathbb{R}^4}$ e trovare una base di U. Cosa si può dire di $U+V$

$V=\{a(0,0,1,1)+b(1,1,0,0) / a,b \in \mathbb{R}\} = \{(b,b,a,a)/b,a \in \mathbb{R}\}$

sostituisco in U: $\begin{cases} 2b-b+a=0 \\ b+b-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+a=0 \\ 2b-a=0 \end{cases} \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases}$

Perciò $U\cap V=\{(0,0,0,0)\}$

- $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y-w=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ $x=\frac{1}{3}w-\frac{1}{3}z$

$y=\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}w$

∞^2 soluzioni

$U=\{(-\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}w, \frac{1}{3}z+\frac{2}{3}w, z, w) / z,w\in\mathbb{R}\}$

$=\{z(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,0)+w(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1) / z,w\in\mathbb{R}\}$

$=\mathcal{L}((-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,0),(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1))$

- $U+V=\mathcal{L}((0,0,1,1),(1,1,0,0),(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,0),(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1))$

siccome $U\cap V=\{(0,0,0,0)\}$ i vettori $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ sono e.i

$U+V=\mathbb{R}^4$

ci manca provare che (v_1,v_2,v_3,v_4) generano $\mathbb{R}^4$

$\forall(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,w)=\lambda(0,0,1,1)+\mu(1,1,0,0)+\beta(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,0)+\alpha(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,1)$

$\begin{cases} x=\mu-\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{3}\alpha \\ y=\mu+\frac{1}{3}\beta+\frac{2}{3}\alpha \\ z=\lambda+\beta \\ w=\lambda+\alpha \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & x \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right)$ $rk(A)=rk(A|B)=4$

- Usando la riduzione per righe, si provi che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ coincidono:

$\mathcal{L}((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7))$, $\mathcal{L}((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rk2

Posso togliere $(3,6,3,-7) \to$ è c.l. degli altri due

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

$U\cap V=U=V=\mathcal{L}((1,2,-1,3),(0,0,3,-8))$

$U+V=U\cap V=U=V$

- in $\mathbb{R}_2[x]$ determinare quali delle seguenti terne costituiscono una base. $\mathbb{R}_2[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2 / a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$

i) $(1+x, x, x^2)$ sì

ii) $(x, x^2, (1+x)^2)$

iii) $(1, 1+x^2, 1-x^2)$

iv) $(1, (1+x)^2, (1-x)^2)$

i) $\alpha(1+x)+\beta(x)+\gamma(x^2)=0+0x+0x^2$ $\boxed{\alpha=\beta=\gamma=0}$

$\alpha+\alpha x+\beta x+\gamma x^2=0$

$\alpha+(\alpha+\beta)x+\gamma x^2=0+0x+0x^2$ $\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta=0 \\ \gamma=0\end{cases}$

$a_0+a_1x+a_2x^2=\alpha(1+x)+\beta x+\gamma x^2$

$=\alpha+(\alpha+\beta)x+\gamma x^2$ $\begin{cases}\alpha=a_0\\ \alpha+\beta=a_1 \quad \beta=a_1-a_0 \\ \gamma=a_2\end{cases}$

sono generatori

• In $\mathbb{R}^5$, si considerano i 2 sottospazi $W_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\}$
$W_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid x_3 + x_4 = 0\}$

Trovare una base per $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ e un vettore non nullo che appartiene a $W_1 \cup W_2$

- W_1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$
$x_4 - 3x_5 = 0 \quad x_4 = 3x_5$

$W_1 = \{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_3, x_2, x_3, 3x_5, x_5) / x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x_2(\frac{1}{2},1,0,0,0) + x_3(\frac{1}{2},0,1,0,0) + x_5(0,0,0,3,1) / x_2,x_3,x_5 \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{L}(\underbrace{(\frac{1}{2},1,0,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(\frac{1}{2},0,1,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,3,1)}_{v_3})$ $\quad (v_1,v_2,v_3)$ base per W_1

- $W_2 = \{(x_1, x_2, -x_4, x_4, x_5) / x_1,x_2,x_4,x_5 \in \mathbb{R}\}$
$= \{x_1(1,0,0,0,0) + x_2(0,1,0,0,0) + x_4(0,0,-1,1,0) + x_5(0,0,0,0,1)\}$
$\mathcal{L}(\underbrace{(1,0,0,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0,0,0)}_{e_2}, (0,0,-1,1,0), \underbrace{(0,0,0,0,1)}_{e_5}) =$
$= \mathcal{L}(e_1, e_2, (0,0,-1,1,0), e_5)$

- $W_1 + W_2 = \mathcal{L}(e_1, e_2, (0,0,-1,1,0), e_5, (\frac{1}{2},1,0,0,0), (\frac{1}{2},0,1,0,0), (0,0,0,3,1))$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ \cancel{\frac{1}{2}}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \\ \frac{1}{2}&0&1&0&0 \\ 0&0&0&3&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ \frac{1}{2}&0&0&1&0 \\ 0&0&0&3&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) = \mathbb{R}^5$$

- $W_1 \cap W_2$ $\begin{pmatrix} 2&-1&-1&0&0 \\ 0&0&0&1&-3 \\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&-3 \end{pmatrix}$ ∞^2 soluzioni

$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = -3x_5 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases}$

$W_1 \cap W_2 = \{(\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_5, x_2, -3x_5, 3x_5, x_5) / x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$
$= \{x_2(\frac{1}{2},1,0,0,0), x_5(-\frac{3}{2},0,-3,3,1) / x_2,x_5 \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{L}((\frac{1}{2},1,0,0,0), (-\frac{3}{2},0,-3,3,1))$

- $w \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow w \in W_1 \wedge w \in W_2$ $\quad w = (0,0,0,1,0)$

• V lo spazio vettoriale matrici simmetriche 3×3.
verifichiamo che $\begin{pmatrix} 1&0&3 \\ 0&0&2 \\ 3&2&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&2 \\ 0&1&0 \\ 2&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&5&2 \\ 0&2&0 \end{pmatrix}$ sono l.i.

trovare una base di V che li contiene

① Date le matrici $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ si considerano i sottospazi $U=\mathcal{L}(A,{}^tA,A+{}^tA)$ e $V=\mathcal{L}(A,B)$ di $\mathbb{R}^2$. Trovare delle basi per U, $U+V$, $U\cap V$

· $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix}0&1&0&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ è ridotto rk2

· $V=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ ridotto $\to$ rk2

· $U+V=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix}0&1&0&2\\0&0&1&2\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ $\to$ rk3

· FORMULA DI GRASSMANN

$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$

Nel nostro caso,

$3=2+2-\underbrace{\boxed{1}}_{\dim(U\cap V)}$ vettore comune ad A e B $U\cap V=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right)$

② Siano U e V 2 sottospazi di ~~[illegible]~~ dim 2 di $\mathbb{R}^4$.

Determinare tutte le possibili dimensioni di $U\cap V$ e costruire un esempio in ciascun caso.

$\dim(U+V)=\underbrace{\dim U}_{2}+\underbrace{\dim V}_{2}-\dim(U\cap V)$

Siccome $U+V\leq\mathbb{R}^4$ $\dim(U+V)\leq 4$

① supponiamo $\dim(U+V)=4$ $[U+V=\mathbb{R}^4]$ $\to U\cap V=\{(0,0,0,0)\}$

② " $\dim(U+V)=3 \to \dim(U\cap V)=\boxed{1}$

③ " $\dim(U+V)=2 \to \dim(U\cap V)=\boxed{2}$

$U\cap V\leq U$, $U\cap V\leq V$ $\Rightarrow U\cap V$

esempi: 1) $U=\mathcal{L}(e_1,e_2)$, $V=\mathcal{L}(e_3,e_4)$

2) $U=\mathcal{L}(e_1,e_2)$, $V=(e_2,e_3)$

3) $U=\mathcal{L}(e_1,e_2)$ $V=(e_1,e_2)$

③ In $\mathbb{R}^5$, si considerano i due sottospazi:

$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)/2x_1-x_2-x_3=0=x_4-3x_5\}$

$W_2=\{3x_1-3x_2-x_4=0=2x_1-x_2-x_3\}$

Determinare le dimensioni $W_1, W_2, W_1\cap W_2, W_1+W_2$

· $W_1=$ $\begin{pmatrix}2&-1&-1&0&0\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}$ $\infty^{5-2}=\infty^3$ soluzioni $\dim W_1=3$

· $W_2=$ $\begin{pmatrix}3&-3&0&-1&0\\2&-1&-1&0&0\end{pmatrix}$ ∞^3 sol $\dim W_2=3$

• $W_1 \cap W_2$

$$\begin{pmatrix} 2&-1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&3\\ 3&-3&0&-1&0\\ \cancel{2}&\cancel{-1}&\cancel{-1}&\cancel{0}&\cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&-1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-3\\ 1&-1&0&-\frac{1}{3}&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0&1&-1&\frac{2}{3}&0\\ 0&0&0&1&-3\\ 1&-1&0&-\frac{1}{3}&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&-1&0&-\frac{1}{3}&0\\ 0&1&-1&\frac{2}{3}&0\\ 0&0&0&1&-3\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$rk=3$

$\infty^{5-3}=\infty^2$

$\dim(W_1 \cap W_2)=2$

• GRASSMANN : $\dim(W_1+W_2)=3+3-2=4$

④ In $\mathbb{R}_3[x]$ si considerano i polinomi:

$p_1(x)=3+x^2$, $p_2(x)=x-x^2+2x^3$, $p_3(x)=2-x^2$, $p_4(x)=x-2x^2+3x^3$

Si verifichi che $\overset{B}{(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$ e si trovino le componenti del polinomio x^2 rispetto a questa base.

• $$\begin{pmatrix} 3&0&1&0\\ 0&1&-1&2\\ 2&0&-1&0\\ 0&1&-2&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&1&-1&2\\ 2&0&-1&0\\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&1&-1&2\\ 0&0&-\frac{4}{3}&0\\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&\frac{1}{3}&0\\ 0&1&-1&2\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$ $rk4$ → sono e i → è una base

• $x^2=0\cdot1+0\cdot x+1\cdot x^2+0\cdot x^3$

$[x^2]_B \quad x^2=\alpha(3+x^2)+\beta(x-x^2+2x^3)+\gamma(2-x^2)+\theta(x-2x^2+3x^3)$

$$\begin{cases} 3\alpha+2\gamma=0\\ \beta+\theta=0\\ \alpha-\beta-\gamma-2\theta=1\\ 2\beta+3\theta=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-\frac{2}{3}\gamma\\ \beta=-\theta\\ -2\theta+3\theta=0 \quad \theta=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta=0\\ \beta=0\\ \alpha=-\frac{2}{3}\gamma\\ -\frac{2}{3}\gamma-\gamma=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=\frac{2}{5}\\ \beta=0\\ \gamma=-\frac{3}{5}\\ \theta=0 \end{cases}$$

$-\frac{5}{3}\gamma=1 \quad \gamma=-\frac{3}{5}$

$$[x^2]_B=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\\ 0\\ -\frac{3}{5}\\ 0 \end{pmatrix}$$

⑤ Dati $v_1=(1,-2,3,0)$, $v_2=(2,-2,2,-1)$, $v_3=(0,1,4,-5)$ in $\mathbb{R}^4$

• verificare che $\{v_1,v_2,v_3\}$ è LI

~~$(1,-2,3,0)=\alpha(2,-2,2,-1)+\beta$~~

$$\begin{pmatrix} 1&-2&3&0\\ 2&-2&2&-1\\ 0&1&4&-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&-2&3&0\\ 0&2&-4&-1\\ 0&1&4&5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&-2&3&0\\ 0&-1&2&\frac{1}{2}\\ 0&0&6&-\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$ sono linearmente indipendenti

• completarlo ad una base $B(v_1,v_2,v_3,v_4)$ di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1&-2&3&0\\ 0&-1&2&\frac{1}{2}\\ 0&0&6&-\frac{9}{2}\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \qquad B=\{v_1,v_2,v_3,e_4\}$$

• Trovare le componenti di $w=(0,0,4,-3)$ rispetto a B

$(0,0,4,-3)=\alpha(1,-2,3,0)+\beta(2,-2,2,-1)+\gamma(0,0,0,1)+\theta(0,1,4,-5)$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=0\\ -2\alpha-2\beta+\theta=0\\ 3\alpha+2\beta+4\theta=4\\ -\beta+\gamma-5\theta=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-2\beta\\ \theta=-2\beta\\ -6\beta+2\beta-8\beta=4\\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=\frac{2}{3}\\ \theta=\frac{2}{3}\\ \beta=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Estrarre una base B' contenente w dall'insieme $\{w,v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ rk 4 → sono l.i. → sono una base di $\mathbb{R}^4$

(6) $h \in \mathbb{R}$ dati i vettori:

$v_1 = (1, 1, 1, 6+h)$

$v_2 = (1, 1, 4, 6+h)$

$v_3 = (-1, 1, 8, h^2+4h-10)$

$v_4 = (-1, 1, 2, -5)$ di $\mathbb{R}^4$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si considera

$U_h = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ da essi generato in $\mathbb{R}^4$

1 Determinare i valori di h per cui $U_h = \mathbb{R}^4$

2 Determinare una base di U_1 e calcolare $\dim U_1$

3 Determinare una base di U_{-5} e calcolare $\dim U_{-5}$

4 ~~Dimostrare~~ $\dim(U_1 \cap U_{-5}) \geq 2$?

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \\ 1 & 1 & 4 & 6+h \\ -1 & 1 & 8 & h^2+4h-10 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & h^2+5h-4 \\ 0 & 0 & 5 & h^2+4h-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & h+1 \\ 0 & 0 & 5 & h^2+4h-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \\ 1 & 1 & 4 & 6+h \\ -1 & 1 & 8 & h^2+4h-10 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6+h \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & h^2+4h-5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6+h \\ 0 & 2 & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & h^2+4h-5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2}+\frac{1}{2}h \\ 0 & 2 & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & h^2+4h-5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h^2+4h-5=0$

$h = -2 \pm 3 \nearrow \searrow \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix}}$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$U_1 = \mathcal{L}((1,0,0,6), (0,1,0,1), (0,0,1,0))$

$\dim U_1 = 3$

(3) $U_{-5} = \mathcal{L}((1,0,0,3), (0,2,0,-4), (0,0,1,0))$

$\dim U_{-5} = 3$

(4) $U_1 \cap U_{-5} = \mathcal{L}(0,0,1,0)$ $\quad \dim(U_1 \cap U_{-5}) = 1$

- In $\mathbb{R}^4$ sia $V = \mathcal{L}((1,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2),(-1,-1,-1,-1),(0,0,0,0))$
  - trovare una base di V
  - Completare una base di V ad una base di $\mathbb{R}^4$
  - Completare una base di V ad una base della
  - spazio $W = \{(x,y,z,w) \mid x+y-z-w=0\}$

- Sia in $\mathbb{R}^{2,2}$ il sottospazio $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$
  - trovare una base di U
  - trovare tutte le matrici di rango 1 di U

- Verificare che sono lineari le funzioni:
  1) $f: \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{3,3}$ $\quad f(A) = {}^tA$
  2) $f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ $\quad f(p) = xp$
  e non lineare le funzione
  3) $f: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}^{n,n}$ $\quad f(A) = A^{-1}$

① Sia $f: \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,b)$

a) Verificare che f è lineare

b) Determinare il nucleo e una sua base

c) Verificare che f è suriettiva e determinare $f^{-1}(1,2)$

d) Trovare 2 matrici A, B l.i. per cui $f(A), f(B)$ siano l.d.

e) scelta una base E per $\mathbb{R}^{2,2}$ e una F per $\mathbb{R}^2$, trovare $M_{E,F}(f)$

ⓐ $\cdot\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) = (a+a', b+b')$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = f(a,b) + (a', b') = (a+a', b+b')$

$\cdot\ f\left(k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (ka, kb)$

$k f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k(a,b) = (ka, kb)$

ⓑ $\ker f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid (a,b) = (0,0)\right\}$

$a=0,\ b=0 \qquad \ker f = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{R}\right\} = \left\{c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{R}\right\}$

$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ $\dim \ker f = 2$

Teorema delle dimensioni: $\underset{4}{\dim \mathbb{R}^{2,2}} = \underset{2}{\dim \ker f} + \underset{\to 2}{\dim \operatorname{Im} f}$

ⓒ $\dim \operatorname{Im} f = 2 \quad \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

allora f è suriettiva

$f^{-1}(1,2) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (1,2)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{R}\right\}$ non è un sottospazio vettoriale

ⓓ $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ sono l.i.

$\left\{f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \{(1,0), (3,0)\}$ sono l.d.

ⓔ $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$F = \{(1,0), (0,1)\}$

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0); \quad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1); \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$

$(1,0) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha=1 \quad \beta=0$
$(0,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=1$
$(0,0) = \quad " \quad \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=0$
$(0,0) = \quad " \quad \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=0$

$M_{E,F}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$

② $\Phi : \bar{V} \to \bar{V}$ ($\bar{V}$ vettori ordinari)

$\Phi(v) = a \times v - v \times a$ a fissato $a \neq 0$

a) Verificare che Φ è lineare

b) Provare che il nucleo è formato da tutti e soli i vettori // ad a;

c) Provare che l'immagine è formata da tutti e soli i vettori ortogonali ad a

d) Posto $a = i - j + 2k$, determinare la matrice di Φ rispetto alla base $B = (i, j, k)$

a) $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$?

$\phi(v+w) = a \times (v+w) - (v+w) \times a$
$= a \times v + a \times w - v \times a - w \times a =$
$= a \times v - v \times a + a \times w - w \times a = \phi(v) + \phi(w)$

$\phi(kv) = k\phi(v)$?

ϕ è lineare
$\to$ si dice Endomorfismo $\bar{V}$

$\phi(kv) = a \times (kv) - (kv) \times a =$
$= k(a \times v) - k(v \times a) = k\phi(v)$

ⓑ $\ker \phi = \{ v \in \bar{V} / \phi(v) = 0_v \} = \{ v \in \bar{V} / a \times v - v \times a = 0_v \} =$
$= \{ v \in \bar{V} / a \times v = v \times a \}$
$a \times v = 0_v$ dato $a \neq 0 \Rightarrow a // v$

ⓒ $\operatorname{Im} \phi = \{ w \in \bar{V} / \exists v \in \bar{V}, \phi(v) = w$
$a \times v - v \times a = w \quad \to w \perp a$

$\phi(i) = a \times i - i \times a = (0, 2a_3, -2a_2)$
$\phi(j) = a \times j - j \times a = (-2a_3, 0, 2a_1)$
$\phi(k) = a \times k - k \times a = (2a_2, -2a_1, 0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 \hat{j} - a_2 \hat{k}$ $(0, a_3, -a_2)$ $\quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (+a_3, 0, a_1) \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a_2, -a_1, 0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_3 \hat{j} + a_2 \hat{k}$ $(0, -a_3, a_2)$ $\quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_3, 0, -a_1) \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (-a_2, a_1, 0)$

$\operatorname{Im} \phi = \mathcal{L}((2a_3 j - 2a_2 k, -2a_3 i + 2a_1 k, 2a_2 i - 2a_1 j$

secondo me basta spiegarlo a parole, graficamente

ⓓ $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 2k$

$\Phi(i) = (i - j + 2k) \times i - i \times (i - j + 2k) = \cancel{i \times i} - j \times i + 2k \times i - \cancel{i \times i} + i \times j - i \times 2k =$
$= k + 2j + k + 2j = 2\hat{k} + 4\hat{j}$

$\phi(j) = (i - j + 2k) \times j - j \times (i - j + 2k) = k - 2i + k - 2i = 2k - 4i$

$\phi(k) = (i - j + 2k) \times k - k \times (i - j + 2k) = -j - i - j - i$

$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

③ Sia $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ e' app. lineare associata

alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

i) Determinare una base per $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$

ii) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(-2, h, h^2) \in \operatorname{Im} f$

i) $f(x,y,z,w,t) = (x-z+2w+3t, 2x-y+w+2t, -3x+y+z-3w-5t)$

$\ker f = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \mid f(x,y,z,w,t) = (0,0,0)\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\infty^{5-2} = \infty^3$ soluzioni

$\ker f = \{(z-2w-3t, 2z-3w-4t, z, w, t) \mid z, w, t \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} x-z+2w+3t=0 \\ y-2z+3w+4t=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = z-2w-3t \\ \Rightarrow y = 2z-3w-4t \end{array}$

$\ker f = \ldots$

$= \mathcal{L}((1,2,1,0,0), (-2,-3,0,1,0), (-3,-4,0,0,1))$

$\dim \operatorname{Im} f = \underset{5}{\dim \mathbb{R}^5} - \underset{3}{\dim \ker f}$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}((1,2,-3), (0,-1,1), (-1,0,1), (2,1,-3), (3,2,-5)) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $= \mathcal{L}((1,2,-3)(0,1,-1))$

ii) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & h \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 & h^2 \end{array}\right)$

④ a) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \to (x,y,z)$

trovare $M_{B,B'}(f)$ $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$
$B' = \{(1,0), (1,-1)\}$

$f(1,1,1) = (1,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$f(1,1,0) = (1,1,0)$

$f(1,0,0) = (1,0,0)$

$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(1,0) = (0,0)$

$f(0,1) = (0,0)$

$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

SOMMA DI 2 APPLICAZIONI LINEARI

Siano $f, g : V \to W$ lineari

si definisce $f+g : V \to W$ e' applicazione somma nel seguente modo

$$(f+g)(v) \overset{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

<u>PROPOSIZIONE</u> : $f+g$ è lineare

<u>dim</u> : $(f+g)(v_1+v_2) = f(v_1+v_2) + g(v_1+v_2)$

$\overset{\text{linearità di } f \text{ e } g}{=} f(v_1)+f(v_2)+g(v_1)+g(v_2)$

$= (f(v_1)+g(v_1)) + (f(v_2)+g(v_2))$

$= (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2)$

$(f+g)(\lambda v) = \lambda (f+g)(v)$

Moltiplicazione di un' applicazione lineare $f: V \to W$ per uno scalare $k \in \mathbb{R}$

$(kf)(v) \overset{\text{def}}{=} k(f(v))$

<u>PROPOSIZIONE</u> : L' applicazione $kf : V \to W$ appena definita è lineare

<u>dim</u> : $(kf)(v_1+v_2) = kf(v_1) + kf(v_2)$

$(kf)(\lambda v) = \lambda(kf(v))$ → per dimostrare

COMPOSIZIONE DI 2 APPLICAZIONI LINEARI

Siano $f : V \to W$, $g : W \to U$ 2 applicazioni lineari

si definisce $g \circ f : V \to U$

$(g \circ f)(v) = g(f(v))$

<u>PROPOSIZIONE</u>: f, g lineari $\Rightarrow$ $g \circ f$ è lineare

<u>dim</u> : $(g \circ f)(v_1+v_2) = g(f(v_1+v_2)) \underset{f \text{ lineare}}{=} g(f(v_1)+f(v_2))$

$\underset{g \text{ lineare}}{=} g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)$

INVERSA : sia $f: V \to W$ lineare biettiva $\Rightarrow \exists f^{-1} : W \to V$ funzione

<u>PROPOSIZIONE</u> : f è lineare biettiva $\Rightarrow$ f^{-1} è lineare

<u>LEGAME CON LE MATRICI ASSOCIATE QUANDO U, V, W sono FINIT. GENERATI</u>

A) SOMMA $f : V \to W$ $g : V \to W$

~~[illegible]~~ E base di V G base di W

~~① Siano $f: V \to W$, $g: W \to U$ 2 applicazioni lineari $g\circ f: V \to$~~

① Siano $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 2 applicazioni lineari

$f(x,y,z) = (x+y,\ x+y-z)$, $g(s,t) = (3s-t,\ 3t-s,\ s)$

ⓐ completare $(g\circ f)(x,y,z) = (2x+2y+z,\ ?)$

ⓑ calcolando le matrici $M_f, M_g, M_{g\circ f}$ verificare $M_{g\circ f} = M_g \cdot M_f$

ⓐ $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (x+y,\ x+y-z) \longrightarrow g(x+y,\ x+y-z)$

$$(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x+y,\ x+y-z) = (3x+3y-x-y+z,\ 3x+3y-3z-x-y,\ x+y)$$
$$= (2x+2y+z,\ 2x+2y-3z,\ x+y)$$

ⓑ

$$M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{g\circ f} = M_g \cdot M_f$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sì!}$$

② Siano $\pi: x+y+z=0$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to P_{r_\pi}(x,y,z)$ proiezione di P su π

Determinare $M_f = A$. Provare che $A^2 = A$

$f(1,0,-1) = (1,0,-1)$

$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ > appartengono al piano

$f(0,0,1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ - non appartiene al piano

retta per $(0,0,1)$ $\perp$ al piano $= \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ intersezione retta - piano $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ $t+t+1+t=0$, $3t=-1$, $t=-\frac{1}{3}$

$$M_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & -1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$(1,0,-1) = (1,0,0) - (0,0,1)$

$f(1,0,-1) = f(1,0,0) - f(0,0,1)$

$(1,0,-1) = f(1,0,0) + \left(+\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$f(1,0,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$(1,-1,0) = (1,0,0) - (0,1,0)$

$f(1,-1,0) = f(1,0,0) - f(0,1,0)$

$(1,-1,0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - f(0,1,0)$

$f(0,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$M_f^{\text{canonica}} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z,\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z,\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{si! } A^2 = A$$

③ Sia $\pi: z=0$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \mapsto \text{simmetrico}_\pi(x,y,z)$

$f(1,0,0) = (1,0,0)$
$f(0,1,0) = (0,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,0,-1)$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(x,y,z) = (x, y, -z)$

④ Determinare la matrice associata alla base canonica dell'app. lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dai vettori $\{(1,1,-1), \overset{\text{base}}{(1,1,0)}, (1,0,0)\}$ così:

$f(1,1,-1) = (2,2,-2)$ $\qquad f(1,1,-1) = 2(1,1,-1)$
$f(1,1,0) = (2,2,0)$ $\qquad f(1,1,0) = 2(1,1,0)$
$f(1,0,0) = (3,0,0)$ $\qquad f(1,0,0) = 3(1,0,0)$

METODO DENNY

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpretare geometricamente l'azione di f)

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$f(x,y,z) = (3x - y, 2y, 2z)$

① Verificare che la matrice $A=\begin{pmatrix}5&1\\3&7\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

Trovare una matrice D simile ad A e determinare P in modo che $D=P^{-1}AP$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$
$(x,y)\to(5x+y,3x+7y)$

applicazione lineare (endomorfismo) semplice (se A diagonaliz

$A=M_f^{C,C}$

C base canonica di $\mathbb{R}^2$

polinomio caratteristico : $|A-xI|=0$

λ è un autovalore di A $\iff \exists v\neq 0_v$: $Av=\lambda v$

$Av-\lambda v=0_v$

$(A-\lambda I)v=0_v \quad rk(A-\lambda I)<n$

$\Downarrow$

$\det(A-\lambda I)=0$

$|A-xI|=\det\begin{vmatrix}5-x&1\\3&7-x\end{vmatrix}=(5-x)(7-x)-3=x^2-12x+32=0$
$=(x-4)(x-8)=0$

$\left.\begin{matrix}\lambda_1=4\\\lambda_2=8\end{matrix}\right\}$ autovalori di A $\qquad D=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}$

- $V_4=\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,-1))$

$\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\sim\underset{rk(1)}{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}$ $\quad x+y=0 \Rightarrow y=-x$

$\dim V_4=1$

- $V_8=\{(x,3x)/x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,3))$

$\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad -3x+y=0\Rightarrow y=3x$

$\dim V_8=1$

$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/4&-1/4\\1/4&1/4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}=D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3/4&-1/4\\1/4&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\3&7\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2=V_4\oplus V_8$

$f(x,y)=(5x+y,3x+7y)$

$E=\{(1,-1),(1,3)\}$ base di autovettori di A

$f(1,-1)=(4,-4)=4(1,-1)$

$f(1,3)=8(1,3) \qquad M_f^{E,E}=\begin{pmatrix}4&0\\0&8\end{pmatrix}$

$(4,-4)=\alpha(1,-1)+\beta(1,3) \quad \alpha=4 \ \beta=0$

$(8,24)=\alpha(1,-1)+\beta(1,3) \quad \alpha=0 \ \beta=8$

② Studiare $A=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile o no?

$$\begin{vmatrix}-2-x&3&-3\\0&1-x&0\\1&1&2-x\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}-2-x&-3\\1&2-x\end{vmatrix}=(1-x)\left[(-2-x)(2-x)+3\right]=(1-x)(x^2-1)=(1-x)(x-1)(x+1)$$

$$=-(x-1)^2(x+1)$$

$\lambda=1$ molteplicità algebrica 2

$\lambda=-1$ molteplicità " 1

- $V_1=\{(x,0,-x)/x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,0,-1))$

$$\begin{pmatrix}-3&3&-3\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&6&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{cases}y=0\\x+z=0\end{cases}\begin{cases}y=0\\x=-z\end{cases}\quad rk=2\quad\infty^{3-2}=\infty^1$$

$\dim V_1=1\neq$ molteplicità $=2\Rightarrow$ <u>A non è diagonalizzabile</u>

③ È dato $A=\begin{pmatrix}4&1\\3&6\end{pmatrix}$. Verificare che $v=(1,3)$ e $w=(4,-4)$ sono autovettori per A

È possibile, senza fare calcoli espliciti di A^2 e A^{-1}, determinare autovalori e autovettori?

Verificare che $v+w$ è un autovettore di A

- $\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}4&1\\3&6\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}=\lambda\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}7\\21\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (1,3) è un autovettore per A relativo all'autovalore $\lambda=7$

$\begin{pmatrix}4&1\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ (4,-4) è un autovettore per A relativo all'autovalore $\lambda=3$

- $Av=\lambda v$

$A^2v=A(\lambda v)=\lambda(Av)=\lambda^2v$

$\Downarrow$

$A^2v=\lambda^2v$

(1,3) è un autovettore per A^2 relativo all'autovalore $\lambda^2=49$

(4,-4) è un autovettore per A^2 " " " $\lambda_1^2=9$

$A^{-1}\to A$ è invertibile

$Av=\alpha v$ $v\neq 0_V$

$A^{-1}(Av)=A^{-1}(\alpha v)$

$v=A^{-1}(\alpha v)=\alpha(A^{-1}v)$ $\alpha\neq0$

$\frac{1}{\alpha}v=A^{-1}v$ $\qquad\frac{1}{\alpha}$ è un autovalore per A^{-1}

$\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{3}$ sono autovalori per A^{-1} con rispettivi autovettori (1,3), (4,-4)

- $v+w=(5,-1)$

$\begin{pmatrix}4&1\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-13\\8\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ NO!

④ Esiste un valore di K per cui la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & K & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ammette 2 come autovalore?

Se un tale valore di K esiste, trovare gli altri autovalori

- $rk(M-2I) \leq 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & K & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & K & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & +2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & K & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & K & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & K & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2+2K & 3-K \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & K & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & K+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{K=-1}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ammette come autovalore $\lambda = 2$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2-x & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1-x & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-x)\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 0 \\ 0 & -1-x & 2 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1-x & 2 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2-x & -2 \\ 1 & 0 & -1-x \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

viene un polinomio $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \div x-2$

⑤ Sia $A \in \mathbb{R}^{n n}$, dimostrare o dare un controesempio di:

Le matrici non invertibili ammettono sempre 0 come autovalore

1) A diagonalizzabile $\Rightarrow$ A invertibile F

2) A invertibile $\Rightarrow$ A diagonalizzabile F

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile ma non invertibile

2) vedi esercizio 2

⑥ Data $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$, trovare i valori di a per cui $rk(A)=2$.

Posto $a=2$, trovare autovalori e autovettori di A

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{a}{2} \\ 2 & 0 & 1-\frac{a}{2} \\ a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se $a=2 \to rk(A)=2$

- $a=2$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A-xI=\begin{pmatrix} -x & 2 & 2 \\ 2 & 1-x & 1 \\ 2 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$

$$\det|A-xI| = -x(1-x^2-1) - 2(\cancel{2}-2x-\cancel{2}) + 2(\cancel{2}-\cancel{2}+2x) =$$
$$= -\cancel{x} - x^3 + \cancel{x} + 4x + 4x =$$
$$= -x^3 + 8x = -x(x^2-8) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\lambda=0$
$\lambda=2\sqrt{2}$ sono autovalori
$\lambda=-2\sqrt{2}$

- $\lambda=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{cases} 2v_2+2v_3=0 \\ 2v_1+v_2+v_3=0 \\ 2v_1+v_2+v_3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_2=-v_3 \\ v_1=0 \end{cases}$ $(0,t,-t$

- $\lambda=2\sqrt{2}$

(7) Si considerano $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

determinare delle matrici P_1, P_2 invertibili tale che

$$P_1^{-1} A P_1 = B_1 \quad e \quad P_2^{-1} A P_2 = B_2$$

CONICHE IN FORMA CANONICA

$\Gamma: f(x,y)=0$

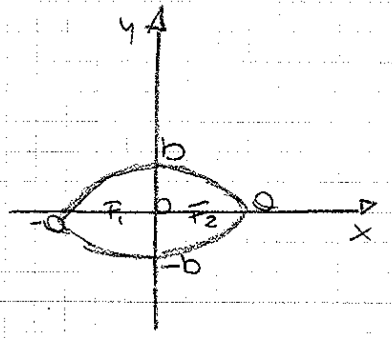
In un appropriato sistema di riferimento $R(Oxy)$ l'equazione assume una delle due forme:

$$(I): \alpha x^2+\beta y^2=\gamma \qquad (II): \beta y^2 = 2\gamma x$$

se tutti i coefficienti sono non nulli si dice che la conica è NON DEGENERE

(I) <u>Caso 1</u> Se α, β, γ non nulli e dello stesso segno

$\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$ rappresenta un'<u>ellisse</u>



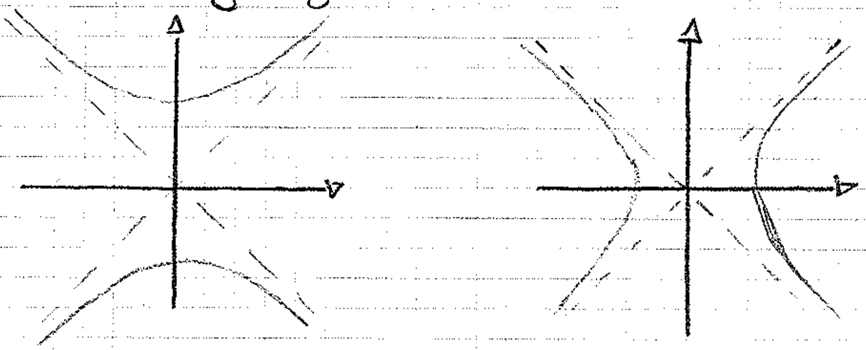
$$\frac{x^2}{\gamma/\alpha}+\frac{y^2}{\gamma/\beta}=1$$

$$a^2=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad b^2=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

<u>Caso 2</u> se α, β, γ non nulli e α e β con segni diversi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \underline{\text{IPERBOLE}}$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

$(x,y) \to (y,-x)$

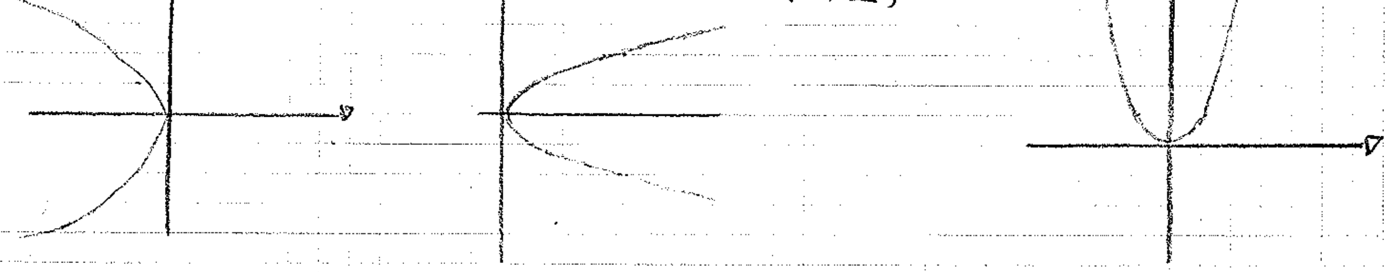
$y=\pm\frac{b}{a}x$ asintoti

<u>Caso 3</u> Se α, β, γ non nulli e α e β hanno segni uguali tra di loro ma diversi da γ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad \underline{\text{ELLISSE IMMAGINARIA}}$$

se $a=b$ → CIRCONFERENZA IMMAGINARIA

(II) PARABOLA



CONICHE DEGENERI

Una conica degenere è l'unione ~~rette~~ di due rette: 2 complesse coniugate ∨ coincidenti

I) $\alpha x^2+\beta y^2=0$ $\quad \alpha,\beta\neq 0$ è una conica spezzata in 2 rette incidenti

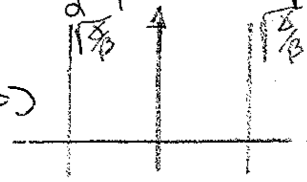
$y=\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\,x$ reali e distinte se α e β hanno segni discordi, complesse coniugate se α e β hanno lo stesso segno

$\alpha x^2+\beta y^2=0$

$\alpha x^2=-\beta y^2 \quad x^2=-\frac{\beta}{\alpha}y^2 \quad x=\pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\,y$

II) $\alpha x^2=\gamma \quad (\beta=0) \rightarrow x=\pm\sqrt{\gamma/\alpha}$

$\beta y^2=\gamma \quad (\alpha=0) \rightarrow y=\pm\sqrt{\gamma/\beta}$ $\Rightarrow$



III) $\alpha x^2=0 \quad \beta=\gamma=0$

$\beta y^2=0 \quad \alpha=\phi=0$

1) Determinare l'equazione dell'iperbole Γ avente gli assi coincidenti con gli assi coordinati e passante per $A(-1,2)$, $B(0,-1)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1 \quad \begin{cases}\frac{1}{a^2}-\frac{4}{b^2}=\pm1\\ -\frac{1}{b^2}=\pm1\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{a^2}-\frac{4}{b^2}=\pm1\\ -\frac{1}{b^2}=-1\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{a^2}-4=\pm1\\ \frac{1}{b^2}=1\end{cases} \quad \begin{cases}1=5a^2 \;\vee\; 1=3a^2\\ b=\pm1\end{cases} \quad \begin{cases}a=\pm\frac{\sqrt5}{5} \;\vee\; a=\pm\frac{\sqrt3}{3}\\ b=\pm1\end{cases}$$

2) Data la conica $\Gamma: 4x^2+3y^2-2=0$

a) Si riconosca che è un'ellisse e se ne ricavi centro, asse di simmetria, semiassi, fuochi

$\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{2/3}=1 \qquad a^2=\frac12 \to a=\pm\frac{\sqrt2}{2}$

$b^2=\frac23 \to b=\pm\sqrt{\frac23}=\pm\frac{\sqrt6}{3}$

- centro $(0,0)$
- assi di simmetria → assi x e y
- $a=\sqrt2/2$, $b=\sqrt6/3$

$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{\frac23-\frac12}=\sqrt{\frac16}=\frac{\sqrt6}{6}$

b) Verificare che il $P_0(\frac{1}{\sqrt2},0)\in\Gamma$ e si trovi la tg a Γ in P_0

$y=mx+q \qquad m/\sqrt2+q=0 \quad q=-\frac{m}{\sqrt2}$

$\begin{cases}y=mx-\frac{m}{\sqrt2}\\ 4x^2+3y^2-2=0\end{cases} \quad 4x^2+3(m^2x^2+\frac{m^2}{2}-\sqrt2m^2x)-2=0$

$4x^2+3m^2x^2-3\sqrt2m^2x+3\frac{m^2}{2}-2=0$

$(4+3m^2)x^2-(3\sqrt2m^2)x+(\frac32m^2-2)=0$

$\Delta=0 \qquad 18m^4-(16+12m^2)(\frac32m^2-2)=0$

$\cancel{18m^4}-\cancel{24m^2}+32-\cancel{18m^4}+\cancel{24m^2}=0$ mai!

$\Rightarrow \cancel{x}=\sqrt2$

③ Data l'equazione della parabola avente per direttrice la retta $d: y-2=0$ e per fuoco $F(4,-1)$

↓ asse verticale $x-4=0$

↓

$x^2=2py$

V punto medio tra d e F

$(4,2)$, $(4,-1)$

$V(4,\frac{1}{2})$

④ Classificare le seguenti coniche

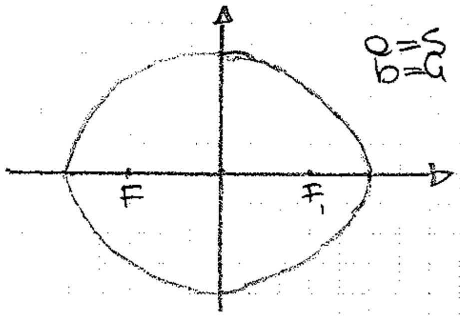
i) $4x^2+y^2=4 \to \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1 \to$ ellisse

ii) $4x^2-y^2=0 \to (2x-y)(2x+y)=0 \to \begin{matrix} y=2x \\ y=-2x \end{matrix} \to$ conica degenere

iii) $4x^2-y^2=4 \to x^2-\frac{y^2}{4} \to$ iperbole

⑤ Sia Γ l'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Si considerino i punti $F(-3,0)$ e $F_1(3,0)$. Se $P(x,y)$ è un punto di Γ verificare che la distanza $|PF|$ soddisfa $|PF|^2=(5+\frac{3}{5}x)^2$ e anche che $|PF_1|$ soddisfa $|PF_1|^2=(5-\frac{3}{5}x)^2$

Dimostrare che $|PF|+|PF_1|=10$ indipendentemente da P



$a=5$
$b=4$

$y^2=16(1-\frac{x^2}{25}) \to y=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$

$|PF|=\sqrt{x^2+9+6x+16-\frac{16}{25}x^2}=\sqrt{\frac{9x^2+150x+25^2}{25}}=\sqrt{\frac{(3x+25)^2}{25}}=$

$=\frac{(3x+25)^2}{25}=(5+\frac{3}{5}x)^2$

$\frac{3x+25}{25}=\frac{25+3x}{25}$

$|PF'|=\sqrt{x^2+9-6x+16-\frac{16}{25}x^2}= \dots =\frac{(3x-25)^2}{25}=(5-\frac{3}{5}x)^2$

$5+\frac{3}{\cancel{5}}x+5-\frac{3}{\cancel{5}}x=10 \Rightarrow$ sempre

1) Studiare la parabola $P: 4(x^2+xy+y)+y^2=0$

$4x^2+4xy+4y+y^2=0$

$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 0 \rightsquigarrow$ parabola

$\det B = -2(8) = -16 \rightsquigarrow$ non degenere

Gli autovalori di A

$P.C.(A)=(4-x)(1-x)-4=0$

$= \cancel{4}-x-4x+x^2-\cancel{4}=0$

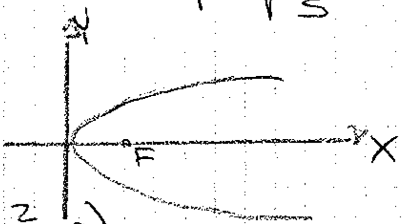
$= x^2-5x=0$

$= x(x-5)=0 < \begin{matrix} \lambda_1=0 \\ \lambda_5=5 \end{matrix}$

$\boxed{\beta Y^2 = 2\varphi X}$ $\boxed{\varphi = \pm\sqrt{-\frac{\det B}{\beta}}}$ parabole

$5Y^2 = 2\sqrt{\frac{16}{5}}X$ $\varphi=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}$

$\boxed{Y^2 = 2\frac{4}{\sqrt{5}\cdot 5}X}$



$Y^2=2pX$

$F\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{2}{5\sqrt{5}},0\right)$

Gli autospazi di A

$V(0)=\{(x,-2x)/x\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((1,-2))=\mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$\begin{pmatrix} 4-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $y=-2x$

$V(5)=\{(2y,y)/y\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}((2,1))=\mathcal{L}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x=2y$

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ $\det P = \frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1 \to$ rotazione in senso antiorario

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y=\frac{-2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{matrix}$

sostituendo

$4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2+4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)+\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2=0$

$5y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'+\frac{4}{\sqrt{5}}y'=0 \Rightarrow 5y'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}y'=\frac{8}{\sqrt{5}}x'$

$5(y'-k)^2+2p(x'-h)=0$

$5\left(y'+\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2=\frac{8}{\sqrt{5}}x'+\frac{4}{25}=\frac{8}{\sqrt{5}}\left(x'+\frac{4}{25}\cdot\frac{\sqrt{5}}{8}\right)$

$5\left(y'^2+\frac{4}{5\sqrt{5}}y'+\frac{4}{125}\right)$

$$5\left(y'+\frac{2}{5\sqrt5}\right)^2=\frac{8}{\sqrt5}\left(x'+\frac{\sqrt5}{50}\right)$$

$$Y=y'+\frac{2}{5\sqrt5} \qquad X=x'+\frac{\sqrt5}{50} \qquad V\left(-\frac{\sqrt5}{50},-\frac{2}{5\sqrt5}\right) \text{ in } O'x'y'$$

il vertice nel sistema Oxy

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt5}{50}\\ -\frac{2}{5\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{50}\\ -\frac{1}{25}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X-\frac{\sqrt5}{50}\\ Y-\frac{2}{5\sqrt5}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-P\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{50}\\ \frac{2}{5\sqrt5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{9}{50}\\ -\frac{1}{25}\end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{9}{50}\\ -\frac{1}{25}\end{pmatrix}}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt5}X+\frac{2}{\sqrt5}Y-\frac{9}{50}$$
$$y=-\frac{2}{\sqrt5}X+\frac{1}{\sqrt5}Y-\frac{1}{25}$$

Moltiplichiamo per ${}^tP=P^{-1}$ a sinistra!

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{9}{50}\\ -\frac{1}{25}\end{pmatrix}$$

$a_{11}x+a_{12}y=0$ asse

(2) Verificare che la sfera S di eq $x^2+y^2+z^2-3x-y+3z+4=0$ è tangente al piano $x+y+z-2=0$

$$\left(x-\frac32\right)^2-\frac94+\left(y-\frac12\right)^2-\frac14+\left(z+\frac32\right)^2-\frac94+4=0$$
$$\left(x-\frac32\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2+\left(z+\frac32\right)^2-\frac34=0$$

$$C\left(\frac32,\frac12,-\frac32\right) \qquad R=\frac{\sqrt3}{2}$$

$$d(C,\pi)=\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\frac{\left|\frac32+\frac12-\frac32-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3/2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt3}=\frac32\cdot\frac{\sqrt3}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$$

(3) Provare che la sfera $x^2+y^2+z^2+2x+3y-4z+1=0$ e il piano $\pi: x+2y-2z+1=0$ hanno in comune una circonferenza γ. Trovare il centro e il raggio di γ

$$(x+1)^2-\cancel{1}+\left(y+\frac32\right)^2+(z-2)^2-\frac94-4+\cancel{1}=0$$
$$(x+1)^2+\left(y+\frac32\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{4}$$

$$C\left(-1,-\frac32,2\right) \qquad R=\frac52$$

$$d(C,\pi)=\frac{|-1-3-4+1|}{\sqrt{1^2+4+4}}=\frac{7}{\sqrt9}=\frac73$$

retta per C ⊥ a $\tilde{\pi}$ $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-\frac{3}{2}+2t \\ z=2-2t \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-\frac{3}{2}+2t \\ z=2-2t \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases} \quad \cancel{-1}+t-3+4t-4+4t\cancel{+1}=0$$

$$9t=7 \quad t=\frac{7}{9}$$

centro di φ $\left(-\frac{2}{9};\ \frac{1}{18};\ \frac{4}{9}\right) C'$

$$r=\sqrt{R^2-d(C,C')}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{49}{9}}=\frac{\sqrt{29}}{6}$$

(4) Studiare la quadrica $Q: x^2+ay^2-z^2=a,\ a\neq 0$

- Dire cosa rappresenta
- verificare che la retta $\begin{cases} x=z \\ y=1 \end{cases}$ sta su Q
- scegliere a, se è possibile, in modo che $P(1,3,0)\in Q$ e determinare le rette per P che stanno in Q

- $\frac{x^2}{a}+y^2-\frac{z^2}{a}=1$ iperboloide

- $x^2+a1-x^2=a$
  $0=0$ sì

- $1+9a=a \quad a=-\frac{1}{8}$

$$\begin{cases} x=1+bt \\ y=3+ct \\ z=0+dt \end{cases}$$

$$(1+bt)^2-\frac{1}{8}(3+ct)^2-d^2t^2=-\frac{1}{8}$$

$3c=8b$

se $b=1 \Rightarrow c=\frac{8}{3}$ sostituendo $d=\pm\frac{1}{3}$

1. Sia $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-4y^2}$

a) Determinare il dominio di f e disegnarlo

b) Dire che tipo di quadrica è $z=(f(x,y)$

c) determinare se il punto $A(1,\frac{1}{2})$ appartiene all'interno del dom f. Trovare un punto di $\mathbb{R}^2$ non interno a dom f

d) Calcolare le derivate parziali di $f(x,y)$

e) Scrivere la formula di Taylor di I° ordine e determinare il piano approssimato di f nel punto A

f) Trovare i punti stazionari di f e determinare la natura

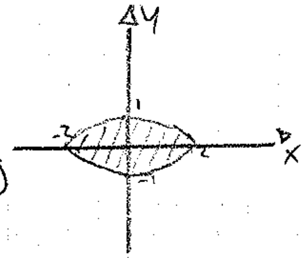
a) $4-x^2-4y^2\geq 0$

$-x^2-4y^2\geq -4$

$x^2+4y^2\leq 4$

$\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1$

$\text{dom} f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1\}$



$f: \text{Dom} f\subseteq\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$
$(x,y)\rightarrow f(x,y)=z$

$z=f(x,y)$
$((x,y),f(x,y))$

b) $z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$

$z^2=4-x^2-4y^2$

$x^2+4y^2+z^2=4 \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1$ ellissoide

c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\leq 1$ sì!

punto non appartenente $(3,4)\notin \text{Dom} f$
$\frac{9}{16}+16\geq 1$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2-4y^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2-4y^2}}(-8y)=\frac{-4y}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}$

e) $z=f(x_0,y_0)+f_x|_A(x-x_0)+f_y(y-y_0)+o$

$z=f(1,\frac{1}{2})+\frac{-1}{\sqrt{4-1-1}}(x-1)+\frac{-2}{\sqrt{4-1-1}}(y-\frac{1}{2})+o$

il piano richiesto sarà

$z=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)-\sqrt{2}(y-\frac{1}{2})=$

$=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}y$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}y+z=2\sqrt{2}$

$x+2y+\frac{2}{\sqrt{2}}z-4=0$

$x+2y+\sqrt{2}z-4=0$

1) $\nabla f = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{-1\sqrt{4-x^2-4y^2} + x\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}}{(4-x^2-4y^2)} = -\frac{\sqrt{4-x^2-4y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}}{4-x^2-4y^2} = \frac{(4-x^2-4y^2)-x^2}{(4-x^2-4y^2)\sqrt{4-x^2-4y^2}} = \frac{4y^2-4}{(4-x^2-4y^2)\sqrt{4-x^2-4y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{-4\sqrt{\;} + 4y\frac{-4y}{\sqrt{\;}}}{(4-x^2-4y^2)} = \frac{-4(4-x^2-4y^2) - 16y^2}{(4-x^2-4y^2)\sqrt{4-x^2-4y^2}} = \frac{4x^2-16}{(4-x^2-4y^2)\sqrt{4-x^2-4y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{x\frac{-4y}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}}{(4-x^2-4y^2)} = \frac{-x \cdot 4y}{(4-x^2-4y^2)\sqrt{4-x^2-4y^2}}$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$O(0,0)$ è un massimo relativo (tutti e 2 gli autovalori negativi)

2) Sia $f(x,y) = x^2 + \sin y$

Determinare i punti stazionari

$\nabla f = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\quad \begin{cases} 2x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$P_1(0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$P_2(0, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y$ $\qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Per i punti del tipo P_1 $\quad H_{P_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ punti di sella

Per i punti del tipo P_2 $\quad H_{P_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ punti di minimo

3) $f(x,y,z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$

Trovare i punti stazionari

$\nabla f = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 + 8y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 + 8x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 8z^3 = 0$

$\begin{cases} x^3 + y = 0 \\ y^3 + x = 0 \\ z^3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x^3 \\ -x^9 + x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x^8 - 1) = 0 \\ y = -x^3 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, +1, -1 \\ y = 0, +1, +1 \\ z = 0 \end{cases}$

$(0,0,0)$
$(1,-1,0)$
$(-1,1,0)$

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=24y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}=0 \qquad H_0\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=24z^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}=0$$

Gli autovalori $\begin{vmatrix} 0-x & 8 & 0 \\ 8 & 0-x & 0 \\ 0 & 0 & 0-x \end{vmatrix}$ $\quad -x\begin{vmatrix} -x & 8 \\ 8 & -x \end{vmatrix}=0$

$-x(x^2-64) \Rightarrow x=\pm 8$ $\quad$ $(0,0,0)$ punto di sella

$$H_{(1,-1,0)}=\begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 24-x & 8 & 0 \\ 8 & 24-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} 24-x & 8 \\ 8 & 24-x \end{vmatrix} = -x\left((24-x)^2-64\right) = -x\cancel{(512+x^2-48x)}$$

$$= -x(24-x+8)(24-x-8) =$$

$$= -x(-x+32)(-x+16) \qquad x=0 \quad x=3 \quad x=16$$

$(1,-1,0)$ minimo

---- $(-1,1,0)$ minimo

(4) Studiare $f(x,y)=\log(1+x^2y^2)$

La funzione logaritmica è ~~strett~~ strettamente crescente nel suo dominio allora basta studiare i punti stazionari di $g(x,y)=1+x^2y^2$

$\nabla g=0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}=2y^2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=2x^2y$

$2y^2x=0 \qquad 2x^2y=0 \qquad \begin{cases} x=0 & y \text{ libero} \\ y=0 & x \text{ libero} \end{cases}$

Sono punti stazionari tutti i punti dell'asse y
asse x

$$H=\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Purtroppo la matrice Hessiana risulta nulla per $(0,0)$ e semidefinita per i punti degli assi. Non possiamo dire nulla sulla natura dei punti stazionari

Perciò $x^2y^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2y^2 > 0 \Rightarrow 1+x^2+y^2 \geq 1 \Rightarrow f(x,y)=\log(1+x^2y^2) \geq 0$

$f(x,y)=0$

sugli assi, tutti punti stazionari risultano essere punti di minimo assoluto