3) $n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$

$PC(A) \quad p(t)=\det(A-tI)=\det\begin{pmatrix} 5/2-t & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2-t & 0 \\ 0 & 0 & a-t \end{pmatrix}=(a-t)\begin{vmatrix} 5/2-t & 1/2 \\ 1/2 & 5/2-t \end{vmatrix}=(a-t)(t^2-5t+6)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2,3$

- $a>0$ A ha tre autovalori >0 : la f. q. è definita positiva
- $a=0$ A ha due autovalori >0, uno nullo la f. q. è semidefinita positiva
- $a<0$ A ha due autovalori positivi e uno negativo: la f. q. non è definita

<u>OSSERVAZIONE</u>: $PC(A)$: $p(t)=-t^3+(5+a)^2+(-6-5a)t+3a$

$\qquad$ $-1 \quad 5+a \quad -6+5a \quad 3a$

LE CONICHE

<u>Def: Si dice conica (nel piano cartesiano Oxy) l'insieme dei punti $P(x,y)$ del piano, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di 2° grado (in x,y)</u>

es. ① $x^2+y^2-R^2=0$ circonferenza di centro O e raggio R

② $xy=0$: coppia degli assi coordinati

③ $x^2+ay^2+1=0$ non ha soluzioni $\rightarrow$ conica vuota

④ $x^2+ay^2=0$ soluzione $(0,0)$ $\rightarrow$ la conica è formata dalla sola origine $(0,0)$

<u>TEOREMA</u>: <u>con un opportuno cambiamento del sistema di riferimento $(O,x,y) \rightsquigarrow (O',X,Y)$</u>

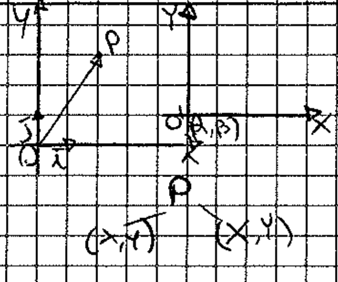
<u>si può trasformare l'equazione della conica in una delle due forme seguenti (forme canoniche)</u>

① $aX^2+bY^2+c=0$

② $aX^2+bY=0 \quad (aX+bY^2=0)$

<u>CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO CARTESIANO IN UN PIANO</u>

① TRASLAZIONE



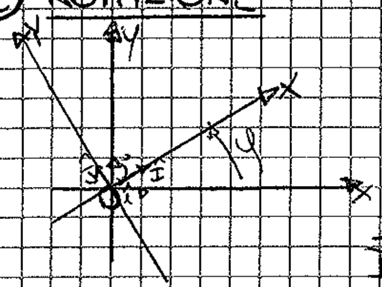
$O'(\alpha,\beta)$ [nel vecchio rif. Oxy]

$P-O=x\hat{i}+y\hat{j} \qquad P-O'=X\hat{i}+Y\hat{j}$

$P-O=(P-O')+(O'-O)$ Passando alle componenti

$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$ equazioni della traslazione $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

② ROTAZIONE



φ misura in radianti

$\vec{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

$\vec{OP} = X\hat{I} + Y\hat{J}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

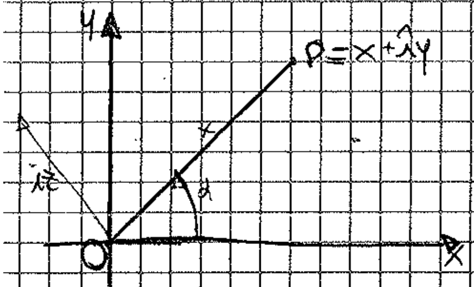
P matrice del cambio base $\quad P = (\bar{I} \mid \bar{J}) \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

$\bar{I} = p_{11}\hat{\imath} + p_{21}\hat{\jmath}$

$\bar{J} = p_{12}\hat{\imath} + p_{22}\hat{\jmath}$

P è una matrice ortogonale perché le sue colonne danno le componenti di due versori ortogonali tra loro

La matrice P è del tipo: $P = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$



piano di Argand-Gauss

$z = x + iy = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z = x + iy = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad zw = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i(\sin(\alpha+\beta))]$

$w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$

$iz = |z|\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Se $\bar{I} = p\hat{\imath} + q\hat{\jmath} \quad \bar{I} \longleftrightarrow p + iq$

$\bar{J} \longleftrightarrow i(p + iq) = -q + ip \Rightarrow \bar{J} = -q\hat{\imath} + p\hat{\jmath}$

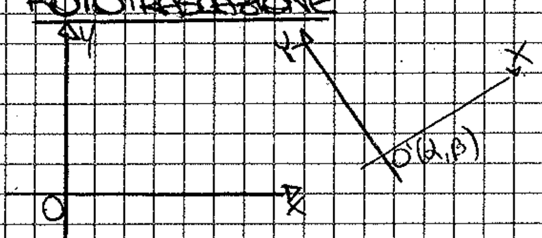
$\bar{I}$ si ottiene da $\hat{\imath}$ con una rotazione di φ radianti

$\bar{I} = p\hat{\imath} + q\hat{\jmath}$. Il n° complesso $p + iq$ si ottiene da 1 moltiplicandolo per w

$w = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow \boxed{p + iq = \cos\alpha + i\sin\alpha}$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ matrice della rotazione

③ ROTOTRASLAZIONE



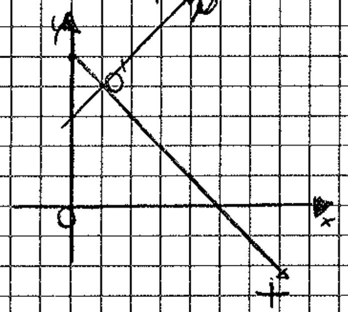
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$ equazioni della rototraslazione

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} P & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \\ \hline 0\;0 & 1 \end{array}\right) \quad 3\times 3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= p_{11}X + p_{12}Y + \alpha \\ y &= p_{21}X + p_{22}Y + \beta \end{aligned}$$

Esercizio: Nel piano xy facciamo un cambiamento di riferimento per cui $r: x+y-5=0$ diventi l'asse X e $O'(1,4)$ il nuovo origine

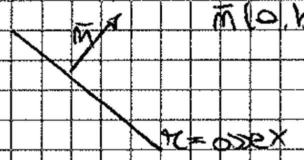


$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

$$P = (I \mid J) \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$P = \begin{pmatrix}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4})\\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$r: ax+by+c=0$



$\bar n(a,b) \parallel \bar J \Rightarrow \bar J$ è il versore di $\bar n$ o il suo opposto

$\bar n = (1,1)$

$\bar n = \hat\imath + \hat\jmath \quad \hat J = \pm\frac{(1,1)}{\sqrt2}$

Domande: 1) quali sono le coordinate "nuove" del punto $A(-1,3)$

2) Qual è l'eq. "nuova" della retta $y=x$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{X+Y}{\sqrt2}\\ y = 4 + \frac{-X+Y}{\sqrt2}\end{cases}$$

2) $y=x \rightarrow 1+\frac{X+Y}{\sqrt2} = 4 + \frac{-X+Y}{\sqrt2} \rightarrow \sqrt2 X - 3 = 0$

1) $\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$

$A = \begin{cases} x=-1\\ y=3\end{cases} \quad \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X = -\frac{2}{\sqrt2} + \frac{1}{\sqrt2} = -\frac{1}{\sqrt2}\\ Y = -\frac{2}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2} = -\frac{3}{\sqrt2}\end{matrix}$

OTTENERE UN'EQUAZIONE CANONICA PER LA CONICA DI DATA EQUAZIONE $f(x,y)=0$ dove questo è un polinomio in x e y di 2° grado

1° CASO Nell'equazione non compare xy. Per scrivere una forma canonica è sufficiente operare un'opportuna traslazione del sistema di riferimento in quanto sono $f(x,y): ax^2+by^2+cx+dy+k=0$

$f: a\neq0,\ b\neq0$

- $2x^2+5y^2-7x+8y-3=0$

$$2x^2-7x = 2\left(x^2-\frac{7}{2}x\right) = 2\left[\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right] = 2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$$

$$5y^2+8y = 5\left(y^2+\frac{8}{5}y\right) = 5\left[\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{25}\right] = 5\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{5}$$

$$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{8}+5\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{5}-3=0$$

$$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+5\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{533}{40}=0 \qquad \begin{cases}X = x-\frac{7}{4}\\ Y = y+\frac{4}{5}\end{cases} \quad \begin{cases}x = X+\frac{7}{4}\\ y = Y-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$2X^2+5Y^2-\frac{533}{40}=0$$

$$\frac{X^2}{533/80}+\frac{Y^2}{533/200}=1 \qquad a=\pm\sqrt{\frac{533}{80}}\sim\pm\sqrt6 \qquad b=\pm\sqrt{\frac{533}{200}}\sim\pm [illegible]$$

• (Compare un solo quadrato)

$3x^2+5x-6y+3=0$

$3x^2+5x=3\left(x^2+\frac{5}{3}x\right)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$

$3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-6y+\frac{11}{12}=0 \qquad 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-6\left(y-\frac{11}{12}\right)=0$

$\begin{cases} X=x+5/6 \\ Y=y-\frac{11}{12} \end{cases} \qquad 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-6\left(y-\frac{11}{12}\right)=0 \qquad O'\left(-\frac{5}{6},\frac{11}{12}\right)$

$3X^2-6Y=0$

N.B. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$ parabola $\rightarrow O'$ è il vertice della parabola

la sua ascissa è il punto di minimo di $f(x)$, $f'(x)=x+\frac{5}{6}=0$

$\Downarrow$

$x=-5/6$

$\boxed{2^\circ \text{ CASO}}$ nell'equazione canonica c'è xy

Con un'opportuna rotazione si può arrivare ad un'equazione in cui non compare più xy

• $y=\frac{x+1}{2x-3} \qquad y(2x-3)=x+1$

$y(2x-3)-x-1=0$

$2xy-3y-x-1=0$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad t^2-1=0 \quad t=\pm 1$

$\lambda=1 \qquad (A-\lambda I)\vec{v}=0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{v}=0 \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ un vettore è $\pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Matrice della rotazione $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} \\ '' & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

equazioni della rotazione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

L'equazione della conica diventa

$x_1^2-y_1^2-\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}x_1-\frac{3}{\sqrt{2}}y_1-1=0$

$x_1^2-y_1^2-2\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}y_1-1=0$

$(x_1-\sqrt{2})^2-2-\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1=0$

$X^2-Y^2-\frac{5}{2}=0$

$O'\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x'=\sqrt{2} \\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ centro dell'iperbole

asintoti $X^2-Y^2=0 \qquad Y=\pm X \qquad y'+\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm(x'-\sqrt{2})$

$\rightarrow y'+\frac{\sqrt{2}}{2}=x'-\sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\sqrt{2}$

$-x+y+1=x+y-2=0 \qquad 2x=3 \quad x=3/2$

Assi di simmetria → assi coordinati

$$x=0 \to x'-\sqrt{2}=0 \qquad \frac{x+y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=0 \qquad \begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=-1 \end{cases}$$

$$y=0 \to y'-\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \qquad -\frac{x+y}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

- $x^2-4xy+4y^2+2x+6y-3=0$

$q(x,y)=x^2-4xy+4y^2$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad P.C.(A)=t^2-5t=t(t-5)$ $\quad t=0,\ t=5$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\qquad P=(\underset{\lambda}{u}|\underset{\mu}{v})$ $\qquad u$ e v autovettori versori, $\det P=1$

$A'={}^tPAP=P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda x'^2+\mu y'^2$

$P\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ è un autovettore, versore relativo a $\lambda=0$

$(A-\lambda I)\bar{v}=0 \qquad A\bar{v}=0 \qquad \bar{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}v_1-2v_2=0\\ -2v_1+4v_2=0\end{cases} \qquad v_1=2v_2$

Una base per l'autospazio è ad esempio $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5}$

$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2x_1-y_1}{\sqrt{5}}\\ y=\frac{x_1+2y_1}{\sqrt{5}}\end{cases}$

$$0x_1^2+5y_1^2+2\frac{2x_1-y_1}{\sqrt{5}}+6\frac{x_1+2y_1}{\sqrt{5}}-3=0$$

$$5\sqrt{5}y_1^2+4x_1-2y_1+6x_1+12y_1-3\sqrt{5}=0$$

$$5\sqrt{5}y_1^2+10x_1+10y_1-3\sqrt{5}=0$$

$$5\sqrt{5}\left(y_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)+10x_1-3\sqrt{5}=0$$

$$5\sqrt{5}\left[\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}\right]+10x_1-3\sqrt{5}=0$$

⋮

LA MATRICE DELLA CONICA B

$B \in \mathbb{R}^{3,3}$ simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{A} & \frac{\text{coeff } x}{2} \\ & & \frac{\text{coeff } y}{2} \\ \frac{\text{coeff } x}{2} & \frac{\text{coeff } y}{2} & \text{termine noto} \end{pmatrix}$$

Si dimostra che se $f(x,y)=0$ è l'eq. della conica e B è la corrispondente matrice $\Rightarrow$ $f(x,y) = (x, y, 1)\, B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

Se si effettua un cambiamento di riferimento è facile vedere come si può ~~trasformare~~ trasformare B

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} P & \alpha \\ & \beta \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α e β coordinate della nuova origine O' nel vecchio riferimento

$$f(x,y) = (x', y', 1) \underbrace{{}^t Q\, B\, Q}_{B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE: B e B' hanno lo stesso determinante (per il Teorema di Binet) $\det Q = 1$

① $ax^2 + by^2 + c = 0$ $\qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\qquad \det B = abc$

② $ax^2 + by = 0$ $\qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 \\ 0 & b/2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \det B = -\frac{ab^2}{4}$

1ª APPLICAZIONE

La conica è degenere $\Rightarrow$ $\det B = 0$

2ª APPLICAZIONE

$f(x,y)=0$ $\qquad B \rightsquigarrow$ eq. canonica

1) $\lambda x^2 + \mu y^2 + \gamma = 0$ $\qquad \lambda, \mu$ autovalori di A $\qquad \det B = \det B'$

2) $(\mu = 0)$ $\quad \lambda x^2 + \gamma y = 0$ $\qquad \lambda$ autovalore non nullo

1) $\det B' = \lambda \mu \gamma$ $\qquad \lambda\mu\gamma = \det B$ $\qquad \gamma = \frac{\det B}{\lambda\mu} \left(= \frac{\det B}{\det A} \right)$

2) $\det B' = -\frac{\lambda \gamma^2}{4}$ $\qquad \gamma^2 = \frac{-4 \det B'}{\lambda}$ $\qquad \gamma = \pm\sqrt{-4 \frac{\det B'}{\lambda}}$

- $2x^2 + 2y^2 - 5xy - 4x + 5y + \alpha = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -2 \\ -5/2 & 2 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & \alpha \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = -\frac{9}{4} < 0 \Rightarrow \text{IPERBOLE}$$

$$\det B = -2\left(-\frac{25}{4} + 4\right) - \frac{5}{2} 0 + \alpha \left(4 - \frac{25}{4}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4}\alpha$$

$\det B = 0 \iff \frac{9}{2} - \frac{9}{4}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

$\to$ se $\alpha = 2$ $\quad f(x,y)=0$

CONICA DEGENERE

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy - 4x + 5y + 2 = 0$$

$$2x^2 - (5y+4)x + 2y^2 + 5y + 2 = 0$$

$$x = \frac{5y+4 \pm \sqrt{25y^2+16+40y-40y-16y^2-16}}{4} =$$

$$= \frac{5y+4 \pm 3y}{4} = \begin{cases} \frac{y+2}{2} \\ 2y+1 \end{cases}$$

$x = \frac{y+2}{2}$

$x = 2y+1$ $\quad$ La conica è l'unione di due rette reali

EQUAZIONE CANONICA: $\lambda x^2 + \mu y^2 - \gamma = 0$ $\quad$ λ e μ sono gli autovalori di A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \qquad P.C.(A) = t^2 - 4t - \frac{9}{4} = 0$$

$$t = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \pm \frac{5}{2} \begin{cases} 9/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

$\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \gamma = 0$ $\quad$ oppure $\quad -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 + \gamma = 0$

$$\det B = \det B' \qquad B' = \begin{pmatrix} 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \frac{9}{2} - \frac{9}{4}\alpha = -\frac{9}{4}\gamma$$

$\gamma = -2 + \alpha$

$\to$ eq. canonica $\boxed{\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \alpha - 2 = 0}$

asintoti: $\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 0 \quad y^2 = 9x^2 \quad \boxed{y = \pm 3x}$

La conica ha punti reali in comune con l'asse x?

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \alpha - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 9x^2 + 2\alpha - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \frac{4-2\alpha}{9} \end{cases}$$

- se $4 - 2\alpha > 0$ $(\alpha < 2)$ $\quad$ 2 sol reali
- se $4 - 2\alpha < 0$ $(\alpha > 2)$ $\quad$ no sol reali $\to$ asse x = ASSE TRASVE
- se $4 - 2\alpha = 0$ $(\alpha = 2)$

• Consideriamo l'equazione $x^2 - 4xy + ky^2 + h = 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & k & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \qquad \det B = h(k-4)$$

$h = 0$, $k = 4$ $\to$ CONICA DEGENERE

<u>1° CASO</u>: $h = 0$ $\quad x^2 - 4xy + ky^2 = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & k \end{pmatrix}$ $\quad \det A = k - 4$

a) $k - 4 < 0 \to k < 4 \to \det A < 0 \to$ conica degenere di tipo iperbolico: coppia di rette reali

$$x = 2y \pm \sqrt{4y^2 - ky^2} = 2y \pm y\sqrt{4-k} \to 2 \text{ eq. di } 1° \text{ grado}$$

b) $h=4 \to \det A=0$ $\quad x^2-4xy+4y^2=0$

$(x-2y)^2=0 \to$ 2 rette coincidenti

c) $h-4>0 \to h>4 \to \det A>0 \to$ conica degenere di tipo coincidenti ellittico

Non ci sono punti reali solo $(0,0)$

2° CASO $\quad k=4 \quad x^2-4xy+4y^2+h=0 \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} \to \det A=0$

$(x-2y)^2=-h$

conica degenere di tipo iperbolica

a) $h<0$: 2 rette parallele $x-2y=\pm\sqrt{-h}$

b) $h>0$: la conica non contiene punti veri

c) $h=0$: $(x-2y)^2=0$ retta doppia

Casi non degeneri . $k\neq h\neq 0$

$\det A=k-4$

1°) $k>4 \quad \det A>0 \quad$ ellissi $\begin{cases}\text{reali}\\ \text{immaginarie}\end{cases}$ $\quad \lambda x^2+\mu y^2+\gamma=0$

2°) $k<4 \quad \det A<0 \quad$ iperbole $\qquad pc(t)=t^2-(k+1)+k-4=0$

$$t=\frac{k+1\pm\sqrt{k^2+1+2k-4k+16}}{2}=$$

$$=\frac{k+1\pm\sqrt{k^2-2k+17}}{2}$$

LE QUADRICHE

Def : Si dice (SUPERFICIE) QUADRICHE il luogo dei punti P dello spazio le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di 2° grado a 3 variabili $f(x,y,z)=0$

CASI PARTICOLARI

1) $ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0 \qquad a\neq 0$

dividendo per a possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\gamma}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta$$

- se $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta<0$ L'equazione non ha sol.
- se $\quad$ " $\quad$ " $\quad =0 \quad x=-\frac{\alpha}{2}, y=-\frac{\beta}{2}, z=-\frac{\gamma}{2} \to$ l'eq. ha un unico sol. $C\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right)$
- se $\quad$ " $\quad$ " $\quad >0 \;=R^2 \quad R>0$