AUTOVALORI - AUTOVETTORI

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; $f: V \to V$ endomorfismo, cioè un applicazione lineare di V in se stesso

Def: $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice autovalore per f se esiste un vettore $v \in V$, $v \neq 0_V$ per cui $f(v) = \lambda v$

Def: se λ è un autovalore, i vettori $v \in V$ per cui $f(v) = \lambda v$ si dicono AUTOVETTORI per f relativi a λ

Che cosa vuol dire che $\bar{v} \neq \bar{0}$ è un autovettore per f?

↳ si controlla se $f(\bar{v}) = \lambda v$ per qualche λ

- $V = \mathbb{R}^2$ $\quad f = f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y) = (x+3y, 2x+2y)$

  Verifichiamo che $v(1,1)$ è un autovettore

  $f(v)$? $\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,1)$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 4$

  ↳ verifichiamo che $\lambda = -1$ è un autovalore per f

  $\exists$ almeno un $v \neq 0_V$ per cui $f(v) = -v$? $\quad v = (x,y)$

  $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+3y = -x \\ 2x+2y = -y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y = 0 \\ 2x+3y = 0 \end{cases} \quad x = -\frac{3}{2}y$$

  sistema omogeneo che ha infinite soluzioni $(t, -\frac{2}{3}t)$ $\forall t$. In particolare $(1, -\frac{2}{3})$ è un vettore $\neq 0_V$ per cui $f(v) = -v$

  ↳ $\lambda = 3$ è un autovalore?

  $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+3y = 3x \\ 2x+2y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y = 0 \\ 2x-y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

  sistema che ha solo la soluzione nulla $\Rightarrow$ 3 non è un autovalore

OSSERVAZIONE: 0 (zero) è un autovalore, se $\exists v \neq 0_V$, $f(v) = 0_V$, cioè $f(v) = 0_V$ segue che 0 è un autovalore quando in $\ker f$ ci sono vettori non nulli; cioè quando l'endomorfismo f non è iniettivo. In questo caso gli autovettori corrispondenti a zero sono i vettori del $\ker f$

Def: Se λ è un autovalore, si dice AUTOSPAZIO per f relativo a λ l'insieme di tutti i vettori v per cui $f(v) = \lambda v$, cioè di tutti gli autovettori relativi a v

↳ Ogni AUTOSPAZIO è un sottospazio di V

Dim: Indichiamo questo sottoinsieme con V_λ

$$V_\lambda = \{v \in V, f(v) = \lambda v\}$$

① $0_V \in V_\lambda$ $f(0_V) = \lambda 0_V$ vero perché $f(0_V) = 0_V$ $\lambda 0_V = 0_V$

② $v, v' \in V_\lambda \Rightarrow v + v' \in V_\lambda$?

sappiamo che $f(v) = \lambda v$, $f(v') = \lambda v'$ allora $f(v) + f(v') = \lambda v + \lambda v'$

$f(v+v') = \lambda(v+v') \Rightarrow v+v' \in V_\lambda$

③ $v \in V_\lambda$, $k \in \mathbb{K} \Rightarrow kv \in V_\lambda$?

sappiamo che $f(v) = \lambda v \Rightarrow k\, f(v) = k(\lambda v)$ $f(kv) = \lambda(kv)$

$\Rightarrow kv \in V_\lambda$

- $V = C^\infty(\mathbb{R})$ $f: V \to V$ derivazione $f(v) = v'$

$v = v(x)$ è un autovettore per f se $v'(x) = \lambda v(x)$

- ogni numero reale è un AUTOVALORE
- 0 è autovalore, gli autovettori corrispondenti sono le f costanti. L'autospazio corrispondente con $V_\lambda = \mathcal{L}(1)$ 1 indico la f costante $= 1$

$\dim V_\lambda = 1$

- un qualunque reale $a \neq 0$ è autovalore: vale $f(e^{ax}) = a\, e^{ax}$
un autovettore corrispondente è e^{ax}. L'autospazio è formato dalle funzioni $v = v(x)$ $\boxed{v' = av}$ eq. differenziale del 1° ordine lineare omogenea

soluzioni $v(x) = c\, e^{\int a\, dx} = c\, e^{ax}$, c costante arbitraria

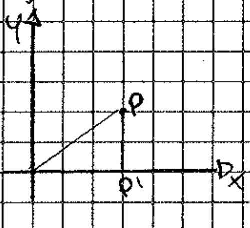
$V_a = \mathcal{L}(e^{ax})$ sottospazio di $\dim = 1$

- $V = \mathbb{R}^{n,n}$ f è la trasposizione $f(M) = {}^tM$
  - 1 è autovalore: $V_1 = \{$matrici simmetriche$\}$
  - -1 è autovalore: $V_{-1} = \{$matrici antisimmetriche$\}$

- $V = \mathbb{R}^2$ identificato con un piano cartesiano

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — $P(x,y)$

$\overrightarrow{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$



endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ proiezione sull'asse x

$f(x, y) = (x, 0)$ $f(v) = \lambda v$ → l'asse x e l'asse y

AUTOVETTORI E DIPENDENZA LINEARE

$f: V \to V$ endomorfismo

PROPRIETÀ
Proposizione I: Siano $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ autovalori distinti e siano $v_1, v_2 \dots v_r$ autovettori non nulli relativi a $\lambda_1 \dots \lambda_r$. Allora $v_1, v_2 \dots v_r$ sono linearmente indipendenti

PROPRIETÀ
Proposizione II: Siano $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ autovalori distinti per f

per ogni $i = 1, 2 \dots r$ consideriamo un insieme di autovettori tra loro l.i.

L'unione di questi insiemi è un insieme di vettori l.i.

APPLICAZIONI

① Consideriamo le funzioni $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_r x}$ con $a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_r$

Per la proposizione (I) queste r funzioni sono l.i. (in quanto autovettori per è endomorfismo derivazione relativi agli autovalori $a_1 \dots a_r$)

② Le funzioni 1, $\sin x$, $\cos x$ sono e i, in quanto autovettori dell'endomorfismo derivata seconda: 1 è autovettore relativo a 0, $\sin x$ e $\cos x$ sono autovettori e i relativi all'autovalore -1 (usare la proposizione II)

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI RELATIVI A ENDOMORFISMI DI SP. VETTORIALI F.G.

$f: V \to V$ endomorfismo, V è f.g. e $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ base per V

Dato $v \in V$, $v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \dots + v_m b_m$. Vediamo come si determinano gli autovalori e le componenti $v_1, \dots v_m$ dei relativi autovettori

Consideriamo la matrice $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. La condizione $f(v) = \lambda v$ diventa:

le componenti

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$Av - \lambda I v = 0$$

$$\boxed{(A - \lambda I) v = 0}$$ Le componenti di v sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo.

$(A - \lambda I) X = 0$ sistema che ha come matrice dei coefficienti $A - \lambda I$

Interessano i valori $\lambda \in \mathbb{K}$ per cui il sistema ha soluzioni non nulle

Questo avviene se e solo se $rk(A - \lambda I) < m$, cioè se e solo se

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono gli scalari in $\mathbb{K}$ che annullano un certo determinante

POLINOMIO CARATTERISTICO DI UNA MATRICE $A \in \mathbb{K}^{m,m}$

Consideriamo le matrici $A - tI$ $\quad t \in \mathbb{K}$

Il determinante di queste matrici $\det(A - tI)$ dipende da t. Che tipo di funzione di t è?

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A - tI = \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} \quad \det(A - tI) = (a-t)(d-t) - bc$

  è un polinomio di 2° grado in t: $\boxed{t^2 - (a+d)t + ad - bc}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A - tI = \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 3 \\ 1 & -t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = \det(A - tI) = -3t + (3-t)(t^2 - 2t - 1) =$

  $= -3t + 3t^2 - 6t - 3 - t^3 + 2t^2 + t =$

  $= -t^3 + 5t^2 - 8t - 3$ polinomio di 3° grado

In generale, $\det(A - tI)$ è un polinomio di grado m in t (se $A \in \mathbb{K}^{m,m}$)

$$\boxed{p(t) = (-1)^m t^m + \dots + \det A}$$

Def: Si dice POLINOMIO CARATTERISTICO di A [P.C.(A)] il polinomio che si ottiene calcolando $\det(A - tI)$

Conclusione:

$\lambda \in \mathbb{K}$, un autovalore per un endomorfismo $f: V \to V$ se e solo se è una radice del P.C.(A) dove $A = M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$, per qualche base $\mathcal{B}$.

Se λ è un autovalore, il sistema omogeneo $(A - \lambda I)X = 0$ ha come soluzione le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ dei corrispondenti autovettori

$\downarrow$

NON SI RIDUCONO LE MATRICI! $\to$ cambia il determinante

Esempi

(1) Sia f un endomorfismo associato ad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $f: V \to V$ $\dim V = 2$ $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$

$$P.C.(A) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)(4-t) + 2 = t^2 - 5t + 6$$

autovalori: $t^2 - 5t + 6 = 0$ soluzioni 2, 3

autovettori relativi a $\lambda = 2$ $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ $x_1 = 2x_2$

soluzioni $(2\mu, \mu)$ $\mu \in \mathbb{R}$

una base per lo spazio delle soluzioni è $((2, 1))$

gli autovettori di f corrispondenti a $\lambda = 2$ sono i vettori $v = (2\mu) b_1 + \mu b_2$

una base per V_2 è $(2b_1 + b_2)$

se $V = \mathbb{R}^2$ e la base $\mathcal{B}$ è la base canonica, gli autovettori sono $(2\mu, \mu)$ $\forall \mu \in \mathbb{R}$ e una base per V_2 è $((2, 1))$

In questa situazione si dice che si sono trovati autovalori e autovettori della matrice A

In generale, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $P.C.(A) = t^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{TRACCIA DELLA MATRICE}} t + \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

$$\boxed{P.C.(A) = t^2 - TR(A) \cdot t + \det A}$$

DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI

$f: V \to V$ $\dim V = n$ $A = M_f^{B,B}$

Se λ è un autovalore (cioè una radice del P.C.(A))

$\Downarrow$

$\dim V_\lambda$ = dimensione dello spazio delle soluz. di $(A - \lambda I)X = 0$ =

= n° incognite libere del sistema

$\Downarrow$

$$\boxed{\dim V_\lambda = n - rk(A - \lambda I)}$$

PROPOSIZIONE: se λ è un autovalore, radice di molteplicità m del P.C.(A), allora $1 \leq \dim V_\lambda \leq m$

Esempio

(1) Osservazione sulle matrici triangolari (basse o alte) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$P.C.(A) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-t & & \\ & a_{22}-t & \\ & & a_{nn}-t \end{pmatrix} =$

$= (a_{11}-t)(a_{22}-t) \dots (a_{mm}-t)$

Gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale

Se il numero λ compare sulla diagonale m volte, λ è una radice di molteplicità m

Esercizio

Studiare la situazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

autovalori : $2 \to$ molteplicità 2 (autovalore doppio)
$-1 \to$ molteplicità 1

$\dim V_{-1} = 1 \qquad 1 \le \dim V_2 \le 2$

$\dim V_2 = n - rk(A - \lambda I) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{cases} a \neq 0 \to 3-2 = 1 \\ a = 0 \to 3-1 = 2 \end{cases}$

ESISTENZA DI BASI FORMATE DA AUTOVETTORI

Problema: dato $f: V \to V$ endomorfismo ; V f.g. con $\dim V = n$
esiste una base per V formata da autovettori per f?

Un insieme di autovettori e.i. che contenga il massimo numero possibile di vettori si ottiene facendo l'unione di basi per ogni autospazio. Il loro numero se gli autovalori distinti sono $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ è $N = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r}$

Otteniamo una base per V formata da autovettori se $N = n$.

Ma $N \le m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \dots + m_{\lambda_r} \le n$

Perché $N = n$, tutte le disuguaglianze devono essere uguaglianze $\Rightarrow N = n$ se e solo se:

- ogni radice del P.C.(A) $\in K$
- per ogni radice λ deve sussistere: $m_\lambda = \dim V_\lambda$

Def: Se esiste una base B di autovettori per f, f si dice SEMPLICE

Un matrice $M_f^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$ matrice diagonale che presenta sulla diagonale gli autovalori tante volte quant'è la corrispondente molteplicità

$f: V \to V$ endomorfismo (cioè a.l. di uno sp. vett. in sé)

$v \neq \bar{0} \in V$ è un AUTOVETTORE per f se $f(v) = \lambda v$, per qualche λ, λ autovalore per f corrispondente a v

---

Sia V f.g. e sia $B = (b_1, \dots, b_n)$ una sua base

① Costruiamo la matrice $A = M_f^{B,B}$

② Si calcola il polinomio caratteristico di A : $PC(A)$: $P(t) = \det(A - tI)$

- Gli autovalori sono le radici del $PC(A)$ che appartengono a K
- Se λ è una radice del PC i corrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni del sistema omogeneo:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

(N.B. Questo sistema ha soluzioni non nulle)

Se $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ è una soluzione, allora il vettore

$v = t_1 b_1 + t_2 b_2 + \dots + t_m b_m$ è un autovettore per f relativo a λ

- Se λ è un autovalore, il corrispondente autospazio V_λ ha dimensione pari alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema.

$\dim V_\lambda = m - rk(A - \lambda I)$ (= n° di incognite libere)

PROP: $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$ molteplicità di λ come radice del $PC(A)$

molteplicità: ALGEBRICA di λ = molteplicità come radice del $PC(A)$; GEOMETRICA: $\dim V_\lambda$

DEFINIZIONI IN RIFERIMENTO A UNA MATRICE QUADRATA $A \in \mathbb{K}^{m,m}$

AUTOVALORE di A: radice (in $\mathbb{K}$) del $PC(A)$

AUTOVETTORE v RELATIVO A λ per A: soluzione del sistema $(A - \lambda I)x = 0$

N.B. Gli autovalori e autovettori di A sono gli autovalori e autovettori dell'endomorfismo $f_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ associato ad A.

BASI FORMATE DA AUTOVETTORI PER UN ENDOMORFISMO $f : V \to V$

PROPOSIZIONE: Esiste una base formata da autovettori per f se e solo se sono verificate queste condizioni:

1. Tutte le radici del PC appartengono al campo $\mathbb{K}$ degli scalari
2. Per ogni autovalore λ, molteplicità algebrica e geometrica coincidono

Una base B' formata da autovettori per f si ottiene scegliendo per ogni autovalore λ una base per V_λ e facendone l'unione.

VANTAGGI dell'esistenza di una base B' formata da autovettori per $f : V \to V$

$B' = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ e sia λ_1 l'autovalore relativo a u_1, $f(u_1) = \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1 + 0 u_2 + \dots + 0 u_m$

$$M_f^{B',B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

La matrice associata ad f rispetto a una base di autovettori è diagonale. Sulla diagonale ci sono gli autovalori nell'ordine

Qual è il legame tra una generica matrice $A = M_f^{B,B}$ e questa matrice diagonale

$$M_f^{B',B'} = P^{-1} M_f^{B,B} P$$

P matrice del cambio base da B a B': è la matrice che ha nella i-esima colonna le componenti dell'i-esimo vettore di B' rispetto a B

MATRICI DIAGONALIZZABILI

Def: $A \in \mathbb{K}^{m,m}$ si dice DIAGONALIZZABILE (in $\mathbb{K}$) se è SIMILE ad una matrice D diagonale, cioè se esiste una matrice $P \in \mathbb{K}^{m,m}$ invertibile per cui $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale

PROP: A è diagonalizzabile se e solo se l'endomorfismo $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ associato ad A è SEMPLICE, cioè se esiste una base per $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori per f_A.

Risulta dunque A è diagonalizzabile se e solo se

1. le radici del $PC(A)$ appartengono a $\mathbb{K}$
2. Per ogni radice λ coincidono molteplicità algebrica e molt. geometrica

$$m_g = \dim V_\lambda = n - rk(A - \lambda I)$$

Perché $P^{-1}AP$ sia diagonale, è necessario e sufficiente che le colonne di P formino una base per $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A.

La matrice $D = P^{-1}AP$ è diagonale: sulla diagonale compaiono gli autovalori corrispondenti alle colonne di P.

ALCUNI VANTAGGI delle matrici diagonalizzabili

A è diagonalizzabile $\to$ è facile calcolare le potenze di A

per ipotesi esiste P invertibile per cui $P^{-1}AP = D$ diagonale

la condizione $P^{-1}AP = D$ equivale a $A = PDP^{-1}$

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{k \text{ volte}} = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_n \end{pmatrix} \to D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & d_2^k & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}$$

Si può calcolare A^{-1} (se A è invertibile)

N.B.: A è invertibile $\Leftrightarrow$ 0 non è autovalore

se $D = P^{-1}AP$ cioè $A = PDP^{-1} \to A^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

Esempi:

① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x,y,z) = (2x+y-z, y+3z, -5z)$

È semplice?

② $f: V \to V$ (V spazio vettoriale applicati del piano), f proiezione sulla retta $y = x$. È semplice

③ $f: V \to V$ (V sp. vett. ... dello spazio) $f(v) = \hat{\imath} \wedge \hat{v}$ è semplice?
l'unico autovalore è 0. Tutti i vettori // a i sono autovettori

④ a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ +4 & -1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

① $A = M_f^{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ B base canonica di $\mathbb{R}^3$

$PC(A) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 0 & 1-t & 3 \\ 0 & 0 & -5-t \end{pmatrix} = (2-t)(1-t)(-5-t)$

Ci sono 3 radici (autovalori) distinte: 2, 1, -5

f è semplice: una base per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori $B'(u, v, w)$ si ottiene prendendo u autovettore per 2, v autovettore per 1, w autovettore per -5 (in un ordine qualsiasi)

$\cdot\ \lambda = 2 \qquad (A-\lambda I)u = 0 \qquad (A-2I)u = 0 \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} u_2 - u_3 = 0 \\ -u_2 + u_3 = 0 \\ -7u_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 \text{ arbitraria} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$

Gli autovettori sono $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

come 1° autovettore della base possiamo prendere, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \lambda = 1 \qquad (A-I)v = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} v = 0 \quad \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ v_2 \text{ arbitraria} \\ v_3 = 0 \end{cases}$

Un vettore per la base può essere $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cdot\ \lambda = -5 \qquad (A+5I)w = 0$

$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} w = 0 \quad \begin{cases} 7w_1 + w_2 - w_3 = 0 \\ 6w_2 + 3w_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7w_1 + w_2 + 2w_2 \\ w_3 = -2w_2 \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = -\frac{3}{7}w_2 \\ w_3 = -2w_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$

Un vettore x la base può essere $\begin{pmatrix} -3/7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

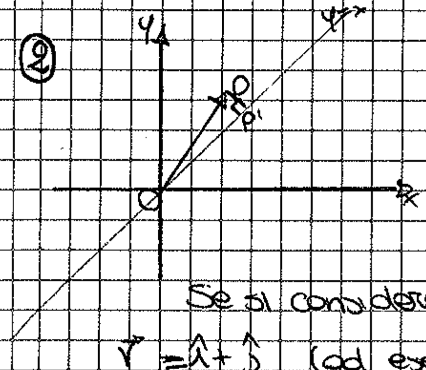
Una base per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per f è, ad esempio

$B' = \left((1,0,0)\ (1,-1,0)\ (-3/7, 1, -2) \right)$

$M_f^{B',B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = D$

$D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{P}$

(2)



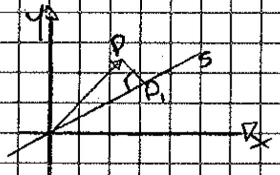
Diamo per verificato che la proiezione sulla retta data è lineare

f è semplice: una base per i vettori del piano formata da autovettori è data da un vettore $\vec{v} \in$ alla 1ª bisettrice degli assi e un vettore $\vec{u} \in$ alla 2ª bisettrice

Se si considera come base la coppia $(\hat{i}, \hat{j})$ dei versori degli assi

$\vec{v} = \hat{i} + \hat{j}$ (ad esempio) $\quad u = \hat{i} - \hat{j} \qquad M_f^{B',B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: Ritroviamo i risultati per via numerica



$P(a, b) \quad P' = (a', b') \qquad f(a,b) = (a', b')$

$P' \begin{cases} r \\ s = \text{retta per } P \perp r \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ y - b = -(x-a) \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ 2x = a+b \end{cases}$

$P' = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \qquad f(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \qquad A = M_f^{CC} = \begin{pmatrix} 1/2, & 1/2 \\ 1/2, & 1/2 \end{pmatrix}$ C base canonica

$PC(A): \quad p(t) = t^2 - t \qquad (t^2 - (\mathrm{tr}A)t + \det A)$ Le radici sono 0, 1

$\lambda = 0 \quad AX = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b$

Gli autovettori sono le coppie $(a, -a) \Rightarrow$ vettori OP con $P(a, -a)$ punti della 2ª bisettrice

$\lambda = 1$ $(A - I)x = 0$ $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} x = 0$ $\begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$

(6) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ PC(A) $p(t) = t^2 - t - 6$

$p(t) = 0$ $t^2 - t - 6 = 0$ $t = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$ autovalori reali semplici

A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$), $\exists P$ invertibile : $P^{-1}AP = D$ diagonale

D può essere $\underset{D_1}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$ oppure $\underset{D_2}{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

per avere D_1 come si sceglie P?

$P(u|v)$ = u (1^o colonna) è autovettore relativo a 3; v autovettore relativo a -2

u? $(A - \lambda I)u = 0$ $(A - 3I)u = 0$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} u = 0$ $\begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 6u_1 - 6u_2 = 0 \end{cases}$ $\{ u_1 = u_2$

possiamo prendere $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v? $(A + 2I)v = 0$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 6v_1 + v_2 = 0 \\ 6v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow v_2 = -6v_1$

come v si può prendere $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +3 \end{pmatrix}$ $pc(B) = p(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 6 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & +3-t \end{pmatrix} = (3-t) \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 6 & -1-t \end{vmatrix} = \underset{3}{(3-t)} \underset{3 \; -2}{(t^2 - t - 6)}$

c'è un autovalore doppio (3) e uno semplice (-2)

$\lambda = 3$ $(A - 3I)x = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 \text{ libero} \end{cases}$

$\dim V_3 = 3 - rk(A - 3I) = 3 - 1 = 2$ molteplicità

autovettori (s, s, u) $\forall s, u \in \mathbb{R}$

una base per V_3 è data $((1,1,0),(0,0,1))$

A diagonalizzabile, è simile alla matrice diagonale $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$D = P^{-1}AP$

$P = (u|v|w)$ u, v autovett. l.i. per $\lambda = 3$ (base per V_3); w autovettore relativo a -2

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pc(A) $p(t) = t^2 + 1$

se si lavora in $\mathbb{R}$, non ci sono autovalori reali, A non è diagonale

se si pensa A come matrice complessa, ci sono 2 autovalori (semplici) i e $-i$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$

Esiste P invertibile per cui $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $P = (u|v)$

a autovettore relativo a i

$(A - iI)x = 0 \quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \quad x_2 = ix_1$ come u si può prendere $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

per l'autovalore $-i$

$(A + iI)x = 0 \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{cases} - \\ - \end{cases} \quad x_1 = ix_2$

come 2° colonna si può prendere $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA: $K = \mathbb{R}$. sia A una matrice reale SIMMETRICA

i) A è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$)

ii) Se λ, μ sono autovalori per A, $\lambda \neq \mu$, gli autospazi V_λ e V_μ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$, cioè se $v = (v_1 \dots v_n)$ è un autovettore per λ e $u = (u_1 \dots u_n)$ è autovettore per μ risulta

$v \cdot u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = 0$

COROLLARI:

1. Le radici del $PC(A)$ sono tutte reali
2. Se λ è un autovalore e m_λ è la molteplicità come radice di $PC(A)$ allora
   $\dim V_\lambda = m_\lambda \qquad n - rk(A - \lambda I) = m_\lambda$
3. È possibile trovare una base B per $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori che sia ortonormale: basta scegliere per ogni autospazio una base ortonormale

→ Esiste una matrice P ortogonale per cui:

$${}^tPAP = D \qquad \text{dove } D \text{ è diagonale}$$

infatti è sufficiente costruire la P per cui $P^{-1}AP = D$ mettendo nelle colonne di P le componenti dei vettori di una base ortonormale di autovettori. In questo caso, P è ortogonale, e cioè $P^{-1} = {}^tP$

Caso $n = 2$: A matrice reale 2×2

$PC(A)$: $p(t) = t^2 - (\mathrm{Tr}A)t + \det A$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad p(t) = t^2 - (a+d)t + ad - b^2$

$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4b^2 =$

$= (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$

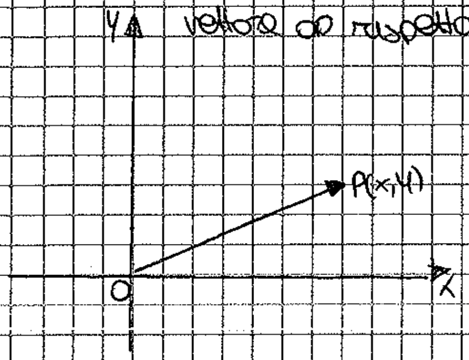
confermato che gli autovalori sono reali

- autovalori coincidenti: λ doppio $\Rightarrow \Delta = 0 \rightarrow a - d = 0$, $b = 0$
  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e l'autovalore doppio è $\lambda = a \quad A = aI$

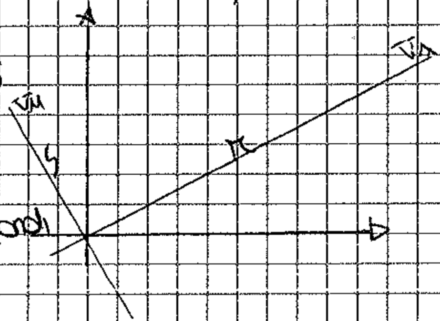
- autovalori λ, μ semplici, distinti. I due autospazi V_λ e V_μ hanno $\dim = 1$ e sono ortogonali

SITUAZIONE GEOMETRICA: Interpretiamo ogni coppia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ come coppia delle coordinate di un punto P in un piano cartesiano, oppure come componenti del corrispondente vettore OP rispetto alla base ortonormale $\hat{i}, \hat{j}$ dei versori degli assi coordinati

$OP = x\hat{i} + y\hat{j}$



r, s ortogonali tra loro



ESEMPIO

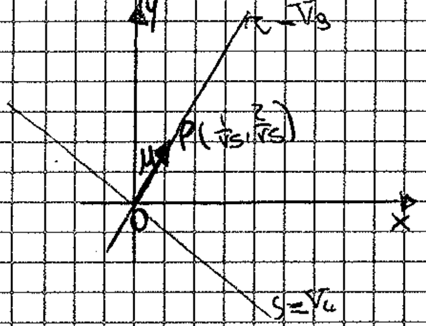
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad pc(A) = p(t) = t^2 - 13t + 36 \qquad \text{radici } 9, 4$$

Cerchiamo l'autospazio V_9 (relativo all'autovalore 9)

$$(A - 9I)X = 0 \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad y = 2x$$

Gli autovettori sono le soluzioni di $2x - y = 0$

Gli autovettori OP sono i vettori per cui P è soluzione di $2x - y = 0$, quindi per cui P è un punto della retta $r: 2x - y = 0$



$r: y = 2x$

Cerchiamo l'autospazio relativo a 4

$$(A - 4I)X = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{2}x \text{ retta } s \perp r$$

Per diagonalizzare A troviamo una base ortonormale formata da autovettori: per ogni autospazio prendiamo un versore

In $\bar{V}_9$ che contiene le soluzioni di $y = 2x$, cioè le coppie $(t, 2t)$

possiamo prendere $\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \bar{u}$

In $\bar{V}_4$ $(x + 2y = 0)$ possiamo prendere $\left(\frac{2, -1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \bar{v}$

OSSERVAZIONE: invece di $\bar{u}$ si può prendere $-\bar{u}$
" " $\bar{v}$ " " " $-\bar{v}$

Se $P(\bar{u} | \bar{v})$ ortogonale

$$^tPAP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Caso $n=3$: $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ (simmetrico)

$pc(A)$ ha grado 3 e ha radici tutte reali

① una radice λ con molteplicità 3 $\iff A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$

② due radici: λ doppia, μ semplice : un autospazio V_λ di dim 2 (piano)
un " V_μ di dim 1 (retta ⊥ piano)

③ tre radici semplici : 3 autospazi di dim = 1, cioè tre rette per l'origine a due a due ortogonali

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

· 0 è un autovalore perchè A è singolare ($\det A = 0$)

· 0 è un autovalore doppio:

$m_0 = 3 - rk(A - 0I) = 3 - rk(A) = 2$

· c'è un altro autovalore λ perchè A non è del tipo aI

· $pc(A) = -T^3 + \dots = T^2(-T+\lambda) = T^2(-T+14)$

autospazio V_0: $AX=0$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases} \to$ piano π $x+2y+3z=0$

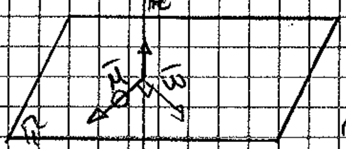
autospazio V_{14} : $(A-14I)X=0$

$\begin{cases} -13x+2y+3z=0 \\ 2x-10y+6z=0 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ -63 & 0 & 21 \\ 42 & 0 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -13x+2y+3z=0 \\ -3x+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x \\ z=3x \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ retta $r \perp \pi$

Base di autovettori per V_{14} $((1,2,3))$, base ortonormale $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right)$

base di autovettori per V_0:



$A(2,-1,0) \in \pi$ $\quad OA = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ è un autovettore $\in V_0$

ne prendo il versore $\bar{u} = \frac{OA}{|OA|} = \frac{2\hat{\imath}-\hat{\jmath}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$

Come vettore $\bar{v}$ che forma con $\bar{u}$ una base ortonormale per V_0 si può prendere $\bar{u} \wedge \bar{w}$ (o il suo opposto)

$\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 5\hat{k})$

$P(-3,-6,5) \in \pi$

Come matrice P ortogonale per cui ${}^tPAP = D$ si può prendere $P(\bar{u}|\bar{v}|\bar{w})$

con questa scelta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: sul segno degli autovalori di una matrice reale simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Vale la regola seguente:

REGOLA DI CARTESIO

Sia $p(x)=0$ un'equazione algebrica di grado n, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di cui si sa che le radici sono tutte reali. Scritto $p(x)$ ordinatamente per gradi crescenti o decrescenti, si considerano i coefficienti non nulli delle potenze nell'ordine.

Il n° delle radici positive è uguale al numero delle variazioni di segno dei coefficienti

OSSERVAZIONE: 0 è radice di $p(x)$ di molteplicità $m \Leftrightarrow p(x)=x^m q(x)$ $q(0)\neq 0$

$\Rightarrow$ è possibile calcolare il n° delle radici negative = n° - n° radici positive - molt. di 0

La regola si può applicare al PC di una matrice reale simmetrica

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad p(t)=t^2-(\mathrm{Tr}A)t+\det A \quad \det(A-tI)$

$=t^2+7t-17$

$1 \quad 7 \quad -17$ $\quad$ 1 variazione di segno $\rightarrow$ 1 radice >0, 1 radice <0

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad p(t)=t^2-10t$ $\quad$ 0 autovalore semplice

$=t(t-10)$

$1 \quad -10$ $\rightarrow$ 1 variazione di segno

1 autovalore >0

In generale: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad PC(A)=t^2-(a+d)t+\det A$

- $\det A \neq 0$ radici concordi $\Leftrightarrow \det A>0$; radici discordi $\Leftrightarrow \det A<0$ $\quad \boxed{\det A=\lambda\mu}$

FORME QUADRATICHE

Def: Diciamo FORMA QUADRATICA (in n variabili) una funzione $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ espressa da un polinomio omogeneo di 2° grado

Se le variabili sono $x_1, x_2, \dots, x_n$, $q(x_1, \dots x_n)$ è un polinomio di 2° grado omogeneo in $x_1, x_2 \dots x_n$

- $n=2$ $\quad q(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$
- $n=3$ $\quad q(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2^2+ex_2x_3+fx_3^2$

Def: Una forma quadratica si dice una forma canonica se nella sua espressione compaiono solo quadrati

$q(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2 \quad q(x_1,x_2)=-4x_2^2 \dots$

Consideriamo casi:

I) $q(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2 \geq 0 \quad q(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow (x_1,x_2)=(0,0)$

idem $q(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2$ con $a>0$ $b>0$

I) $q(x_1,x_2)=-5x_1^2-\frac{\pi}{2}x_2^2<0 \quad (x_1,x_2)\neq(0,0) \quad q(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2<0$

per $(x_1,x_2)\neq(0,0) \Leftrightarrow a<0,\ b<0$

II) $q(x_1,x_2)=-ax_2^2 \quad (=0x_1^2-ax_2^2)$

≤ 0 Può essere $q(x_1,x_2)=0$ senza che x_1, x_2 siano necessariamente $=0$

ad es. per $(1,0)$ $q(1,0)=0$

III) $q(x_1,x_2)=x_1^2-ax_2^2$ forma quadratica non definita: il segno di $q(x_1,x_2)$ varia a seconda delle scelte delle x

$q(1,0)=1>0$

$q(0,1)=-a<0$

Inoltre: $q(2,1)=0$

È la situazione che si ha quando $q(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2$ con a,b discordi

SCRITTURA MATRICIALE DI UNA FORMA QUADRATICA

$n=2 \quad q(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2+cx_1x_2$

Consideriamo la matrice $A=\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b\end{pmatrix}$

verifichiamo che $q(x_1,x_2)=(x_1,x_2)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=$

$=\left(ax_1+\frac{c}{2}x_2 \quad \frac{c}{2}x_1+bx_2\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\left(ax_1+\frac{c}{2}x_2\right)x_1+\left(\frac{c}{2}x_1+bx_2\right)x_2=ax_1^2+cx_1x_2+bx_2^2$

In generale, data una forma quadratica $q(x_1,\dots x_n)$ risulta:

$q(x_1,\dots x_n)=(x_1,x_2,\dots x_n)\,A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \qquad q(x)={}^tXAX \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

dove A è una matrice $n\times n$ simmetrica così definita

a_{ii} = coefficiente di x_i^2

$i\neq j$, $a_{ij}=a_{ji}=\frac{1}{2}$ coeff. di x_ix_j

La matrice A si dice <u>matrice associata</u> alla forma quadratica

Cerchiamo un cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$ cioè un cambiamento di variabili $X=PX'$ con P invertibile in modo, se possibile, da ottenere una f.q. in forma canonica

$q(x)=q(x_1,\dots x_n)={}^tXAX$ applico la sostituzione $X=PX'$ $\quad X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$

$={}^t(PX')A(PX')$

$={}^tX'\,{}^tPAPX'$

$={}^tX'({}^tPAP)X'$ = forma quadratica nelle variabili $x_1' \dots x_n'$ con matrice associata $A'={}^tPAP$

$q'(X')={}^tX'A'X'$

$q'(X')$ è in forma canonica $\Leftrightarrow$ A' è diagonale

Almeno un modo per avere A' diagonale è quello di usare come P una matrice ortogonale, le cui colonne formano una base ortonormale di autovettori per A.

Con questa scelta di P, $q'(x') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_m x_m'^2$ dove $\lambda_1 \dots \lambda_m$ sono gli autovalori corrispondenti

$\Rightarrow$ le informazioni sul segno della f.q. sono date dagli autovalori di A o meglio dal loro segno

es. $q(u,v,w,t) = 2u^2 + 3wt + 5w^2 - \frac{1}{2}vt$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

SEGNO DI UNA FORMA QUADRATICA

Studiare il segno di una forma quadratica vuol dire studiare il segno di $q(x)$ al variare dei valori dati alle variabili

Si può decidere della situazione studiando il segno degli autovalori della matrice A associata alla f.q.

OSSERVAZIONE: $x=0 \quad q(x)=0$

1) se gli autovalori di A sono tutti positivi, $q(x)>0$ per qualsiasi scelta dei valori dati ad x, non tutti nulli

2) ... autovalori $<0 \Rightarrow q(x)<0$

3) se gli autovalori sono ≥ 0, $q(x) \geq 0$, $\forall x$

4) " " " ≤ 0, $q(x) \leq 0$

5) Se c'è un autovalore positivo e uno negativo, allora $q(x)$ è indefinita, cioè esistono valori dati alle x per cui $q(x)>0$, e altri valori per cui $q(x)<0$; più precisamente, se λ è un autovalore >0 e v un autovettore corrispondente, μ un autovalore <0 e w un autovettore corrispondente.

Risulta:

$v=(v_1,\dots,v_m) \quad q(v_1 \dots v_m) = (v_1 \dots v_m)\left[A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}\right] = (v_1 \dots v_m)\lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} =$

$= \lambda\left((v_1,\dots,v_m)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}\right) = \lambda(\underbrace{v_1^2+v_2^2+\dots+v_m^2}_{\|v\|^2}) > 0$

$w=(w_1 \dots w_m) \quad q(w_1,\dots,w_m) = \mu\|w\|^2 < 0$

Esempi

1) $m=2 \quad A=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad q(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + xy$

PC(A): $p(t) = (\det(A-tI)) = t^2 - 5t + 6 \qquad \lambda=2, \ \mu=3$

Gli autovalori sono entrambi positivi $\Rightarrow q(x,y)>0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

A questa conclusione si può arrivare anche nel seguente modo

$q(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + xy + \frac{5}{2}y^2 = \frac{5}{2}(x+\frac{1}{5}y^2) + \frac{12}{5}y^2$

$\frac{5}{2}x^2 + xy = \frac{5}{2}(x^2 + \frac{2}{5}xy) = \frac{5}{2}[(x+\frac{1}{5}y)^2 - \frac{1}{25}y^2] = \frac{5}{2}(x+\frac{1}{5}y)^2 - \frac{1}{10}y^2$

2) $n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad a\in\mathbb{R}$

PC(A) $\quad p(t)=\det(A-tI)=\det\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-t & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}-t & 0 \\ 0 & 0 & a-t \end{pmatrix}=(a-t)\begin{vmatrix} \frac{5}{2}-t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}-t \end{vmatrix}=(a-t)\underbrace{(t^2-5t+6)}_{2,3}$

- $a>0$ A ha tre autovalori >0 : la f.q. è definita positiva
- $a=0$ A ha due autovalori >0, uno nullo : la f.q. è semidefinita positiva
- $a<0$ A ha due autovalori positivi e uno negativo: la f.q. non è definita

OSSERVAZIONE: PC(A): $p(t)=-t^3+(5+a)t^2+(-6-5a)t+3a$

NO!! $\quad -1 \quad 5+a \quad -6-5a \quad 3a$

LE CONICHE

Def: Si dice conica (nel piano cartesiano Oxy) l'insieme dei punti $P(x,y)$ del piano, le cui coordinate soddisfano ad un'equazione di 2° grado (in x,y)

es. ① $x^2+y^2-R^2=0$ circonferenza di centro O e raggio R

② $xy=0$: coppia degli assi coordinati

③ $x^2+4y^2+1=0$ non ha soluzioni → conica vuota

④ $x^2+4y^2=0$ soluzione $(0,0)$ → la conica è formata dalla sola origine $(0,0)$

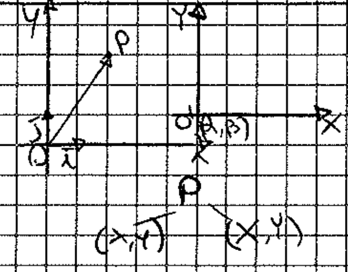
TEOREMA: con un opportuno cambiamento del sistema di riferimento $(O,x,y) \rightsquigarrow (O',X,Y)$ si può trasformare l'equazione della conica in una delle due forme seguenti (forme canoniche)

① $aX^2+bY^2+c=0$

② $aX^2+bY=0$ $\quad (aX+bY^2=0)$

CAMBIAMENTI DI RIFERIMENTO CARTESIANO IN UN PIANO

① TRASLAZIONE



$O'(\alpha,\beta)$ [nel vecchio rif. Oxy]

$P-O=x\hat{i}+y\hat{j} \qquad P-O'=X\hat{i}+Y\hat{j}$

$P-O=(P-O')+(O'-O)$ Passando alle componenti

$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases}$ equazioni della traslazione $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$