APPLICAZIONI LINEARI

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso $\mathbb{K}$ e sia $f: V \to W$ una funzione sempre definita.

Def: f si dice APPLICAZIONE LINEARE se: — trasformazione lineare/operatore lineare, omomorfismo

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2$
2. $f(k \cdot v) = k f(v) \quad \forall k \in \mathbb{K}, \ \forall v \in V$

Esempi

① V, W $\quad f: V \to W$ definita da: $f(v) = 0_W$, $\forall v \in V$

f è lineare: 1. $f(v_1 + v_2) = 0_W$, $f(v_1) + f(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$

2. $f(kv) = 0_W \quad k f(v) = k \cdot 0_W = 0_W$

f si dice APPLICAZIONE NULLA

② $f: V \to W$ definita da: $f(v) = v \quad \forall v \in V$

f è LINEARE si chiama APPLICAZIONE IDENTICA (oppure IDENTITÀ) in V

③ $V = C^1(I)$ $\quad I$ intervallo aperto di $\mathbb{R}$

$W = C^0(I)$ $\quad f: V \to W$ è la derivazione: per ogni $v = v(x) \in C^1(I)$ $\quad f(v) = v'(x)$

f è lineare

④ $V = C^0([a,b])$ $\quad W = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

$f: V \to W$ $\quad f: C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ definita da $f(v) = \int_a^b v(x)\,dx$

f è lineare

⑤ $V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \mathbb{R}^2$ $\quad f: V \to W: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

a) $f(x,y,z) = (x,y)$ è un'applicazione lineare

b) $f(x,y,z) = (x^2, y+z)$ non è un'applicazione lineare

c) $f(x,y,z) = (x+y, y+2z+1)$ non è un'applicazione lineare

a) ① $v_1 = (x,y,z) \quad v_2 = (x',y',z')$

$f(v_1 + v_2) = f(x+x', y+y', z+z') = (x+x', y+y')$

$f(v_1) + f(v_2) = f(x,y,z) + f(x',y',z') = (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

② $f(kv) = f(k(x,y,z)) = f(kx, ky, kz) = (kx, ky)$

$k f(v) = k(f(x,y,z)) = k(x,y) = (kx, ky)$

b) $f(v_1 + v_2) = f(x+x', y+y', z+z') = ((x+x')^2, y+y'+z+z')$ — sono diversi

$f(v_1) + f(v_2) = f(x,y,z) + f(x',y',z') = (x^2, y+z) + (x'^2, y'+z') = (x^2+x'^2, y+y'+z+z')$

c) $f(v_1+v_2) = f(x+x', y+y', z+z') = (x+x'+y+y', y+y'+2z+2z'+1)$

$f(v_1) + f(v_2) = f(x,y,z) + f(x',y',z') = (x+y, y+2z+1) + (x'+y', y'+2z'+1) = (x+x'+y+y', y+y'+2z+2z'+2)$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ES. $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \rightsquigarrow f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2) = (y_1, y_2 y_3)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 + 6x_2, 5x_1 + 6x_2, x_1)$$

Questa funzione è un'a.e. $\quad f: V \to W$

① $f(v+v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v'$

$f(v+v') = f(x_1+x_1', x_2+x_2') = (-3(x_1+x_1') + 6(x_2+x_2'), 5(x_1+x_1') + 6(x_2+x_2'), x_1+x_1')$

$f(v) + f(v') = f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2') = (-3x_1 + 6x_2, 5x_1 + 6x_2, x_1) + (-3x_1' + 6x_2', 5x_1' + 6x_2', x_1') =$

$= ((-3x_1 + 6x_2) + (-3x_1' + 6x_2'), (5x_1 + 6x_2) + 5x_1' + 6x_2', x_1 + x_1')$ sì!

② $f(kv) = k f(v) \qquad k \in \mathbb{R}$

$f(kv) = f(kx_1, kx_2) = (-3(kx_1) + 6(kx_2), 5kx_1 + 6kx_2, kx_1)$

$k(fv) = k(fv) = k(-3x_1 + 6x_2, 5x_1 + 6x_2, x_1) = (-3kx_1 + 6kx_2, 5kx_1 + 6kx_2, kx_1)$

CASO IMPORTANTE: $V = \mathbb{K}^n$ $W = \mathbb{K}^m$

Ogni matrice A $m \times n$ ($A \in \mathbb{K}^{m,n}$) definisce un'applicazione lineare $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$f_A(x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_m)$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad AX = Y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3 \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{matrix}$$

$$f_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$$

Calcolare $f_A(1, -2, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_A(1, -2, 1) = (0, 0)$$

Proposizione: $\forall A$, f_A è lineare

TERMINOLOGIA

$f : V \to W$ $\quad V, W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, f lineare

se $f(v) = w$ $\quad (v \in V, w \in W)$, w si dice CORRISPONDENTE o IMMAGINE di v

v si dice CONTROIMMAGINE DI w

si dice IMMAGINE DI f ($\mathrm{Im} f$) il sottoinsieme di W formato dalle immagini di tutti i vettori di V

Allora, dire che $w_0 \in \mathrm{Im} f$, vuol dire che esiste un vettore $v \in V$ per cui $f(v) = w_0$

Def: f si dice SURIETTIVA se $\mathrm{Im} f = W$, cioè se ogni $w \in W$ ha almeno una controimmagine

Proposizione: $\mathrm{Im} f$ è sempre un SOTTOSPAZIO vettoriale di W

Def: $f : V \to W$ si dice INIETTIVA se da $v \neq v_1 \Rightarrow f(v) \neq f(v_1)$ ovvero:

f è iniettiva se $f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$

NUCLEO DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

$f : V \to W$ applicazione lineare

Premessa: $f(0_V) = 0_W$

Dim: $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 f(0_V) = 0_W$

Nell'esempio $f(x, y, z) = (x, y)$ ci sono infiniti vettori v per cui $f(v) = 0_W$

$\forall z$, $f(0, 0, z) = (0, 0) = 0_W$

Lo stesso per $f : C^1(I) \to C^0(I)$ dato dalla derivazione: tutte le funzioni costanti hanno come immagine la funzione nulla.

Def: $f: V \to W$ applicazione lineare, si dice **NUCLEO** di f l'insieme dei vettori $v \in V$, che hanno come immagine 0_W ... nucleo $\to$ $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V,\ f(v) = 0_W\}$

proposizione
Teorema ①: f è iniettiva se e solo se il $\mathrm{Ker}\, f = \{0_V\}$

Teorema ②: il $\mathrm{Ker}\, f$ è un sottospazio vettoriale di V

Caso applicazione lineare $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definita da una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$f_A(x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_m)$ vuol dire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (*)

① Calcolare l'immagine di un vettore, vuol dire, dato $v = (x_1 \dots x_n)$, calcolare $f(v) = (y_1 \dots y_m)$ determinando le y mediante (*)

2) calcolare le controimmagini di un vettore $w = (b_1 \dots b_m)$ vuol dire trovare le soluzioni del sistema $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Osservazione: f è suriettiva se il sistema $AX = w$ è sempre risolubile qualunque siano le componenti $b_1 \dots b_m$ di w

Trovare $\mathrm{Im}\, f$ vuol dire determinare i w per cui il sistema è risolubile

3) Calcolo del nucleo di f: si determinano X per cui $AX = 0$ (cioè si calcolano le controimmagini di $(0, 0 \dots 0) \in \mathbb{K}^m$)

il nucleo è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo

($\mathrm{Ker}\, f_A = S(A)$)

Ricordiamo che $\dim S(A) = n - rk(A)$ ($= n°$ incognite libere del sistema $AX = 0$)

- $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = n - rk(A)$
- f_A è iniettiva $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f_A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ $\iff$ $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 0$ $\iff$ $rk(A) = n$

COMPLETAMENTO SU $\mathrm{Im}\, f_A$

Premessa: $f_A(x_1 \dots x_n) = f_A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$ dove $B(e_1 \dots e_n)$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$ ($e_i = (0, \dots \overset{i\text{-esima posizione}}{1} \dots 0)$)

$f_A(x_1 \dots x_n) = x_1 f_A(e_1) + x_2 f_A(e_2) + \dots + x_n f_A(e_n)$

$\Rightarrow$ i vettori di $\mathrm{Im}\, f_A$ sono combinazione lineare degli n vettori $f_A(e_1), f_A(e_2) \dots f_A(e_n)$. $\mathrm{Im}\, f_A$ è generato da $f_A(e_1) \dots f_A(e_n)$

$\mathrm{Im}\, f_A = \mathcal{L}(f_A(e_1) \dots f_A(e_n))$

Quali sono i vettori $f_A(e_i)$?

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = i$-esima colonna di A

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, f_A$ è generato "dalle colonne di A" $\mathrm{Im}\, f_A = C(A)$ (lo spazio delle colonne di A)

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f_A = rk(A)$

$\Rightarrow f_A$ suriettiva $\iff \mathrm{Im} f_A = \mathbb{K}^m \iff \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{K}^m \iff rk(A) = m$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim \mathrm{Im} f = rk(A) \\ \dim \mathrm{Ker} f = n - rk(A) \end{array} \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V \quad V = \mathbb{K}^n}$$

Si dimostra che tutte le volte che si ha un'applicazione lineare $f: V \to W$ con $\dim V = n$, allora vale il TEOREMA DELLA DIMENSIONE

DIM TEOREMI PAGINA PRECEDENTE

Dim: Teorema ② pagina prima

- $0_V \in \mathrm{Ker} f \to$ vuol dire $f(0_V) = 0_W$ sì! già visto
- $v, v' \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow v + v' \in \mathrm{Ker} f$

  $f(v) = 0_W \quad f(v') = 0_W$

  bisogna dimostrare che $f(v+v') = 0_W$

  $\underbrace{f(v+v') = f(v) + f(v')}_{\text{per linearità}} = 0_W + 0_W = 0_W$ sì!

- $\underset{f(v)=0_W}{k \in \mathbb{K}, v \in \mathrm{Ker} f} \Rightarrow \underset{f(kv)=0_W}{kv \in \mathrm{Ker} f}$

  $\underbrace{f(kv) = k f(v)}_{\text{per linearità}} = k \cdot 0_W = 0_W$

Dim: Teorema ① pagina prima

- $v \in V, v \neq 0_V$. Poiché f è iniettiva $f(v) \neq f(0_V)$ cioè $f(v) \neq 0_W$

  $\to v \notin \mathrm{Ker} f$

- $\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$. Supponiamo che esistono due vettori v, v' per cui

  $f(v) = f(v') \quad f(v) - f(v') = 0_W$ per linearità $f(v - v') = 0_W$

  $v - v' \in \mathrm{Ker} f \quad v - v' = 0_V \Rightarrow v = v'$

APPLICAZIONI LINEARI $f: V \to W$ con V finitamente generato

TEOREMA: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale f.g. e sia $B = (b_1, \dots, b_n)$ una base per V. Siano dati inoltre n vettori $w_1, \dots, w_n \in W$. Esiste una e una sola APPLICAZIONE LINEARE $f: V \to W$ per cui $f(b_1) = w_1, f(b_2) = w_2, \dots, f(b_n) = w_n$

Dim: $v \in V$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ per cui $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$

se f deve essere lineare, necessariamente si ha:

$f(v) = f(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) = x_1 f(b_1) + \dots + x_n f(b_n) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$

si verifica che questa f è proprio lineare

- $V = \mathbb{R}^2 \quad W = \mathbb{R}^4$ Cerchiamo l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ per cui

  $f(\underbrace{1,0}_{b_1}) = \underbrace{(1,2,-1,5)}_{w_1} \qquad f(\underbrace{0,1}_{b_2}) = \underbrace{(0,0,3,\tfrac{1}{2})}_{w_2}$

[$B=(b_1, b_2)$ è la base canonica]

$f(x_1, x_2) = f[x_1(1,0) + x_2(0,1)] = x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1) =$

$= x_1(1,2,-1,5) + x_2(0,0,3,\frac{1}{2}) = (x_1, 2x_1, -x_1+3x_2, 5x_1+\frac{1}{2}x_2)$

- $V=\mathbb{R}^2 \quad W=\mathbb{R}[x] \qquad B=(\underset{b_1}{(1,2)}, \underset{b_2}{(2,3)})$

Cerchiamo l'a. l. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ per cui $\quad f(1,2)=x^2$
$\qquad f(2,3)=1+x$

$f(x_1,x_2)$? Cerchiamo le componenti di $v=(x_1,x_2)$ rispetto a B

$(x_1,x_2) = a_1(1,2) + a_2(2,3) \qquad \begin{cases} a_1+2a_2=x_1 \\ 2a_1+3a_2=x_2 \end{cases} \qquad AX=B$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A = -1 \neq 0$ Regola di Cramer:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 2 \\ x_2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -3x_1+2x_2$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix}}{-1} = -x_2+2x_1$$

$f(x_1,x_2) = f(a_1(1,2)+a_2(2,3)) = a_1 f(1,2) + a_2 f(2,3) = a_1 x^2 + a_2(1+x) =$

$= (-3x_1+2x_2)\cdot x^2 + (-x_2+2x_1)\cdot(1+x)$

$\to$ es $f(\underset{x_1}{0},\underset{x_2}{5}) = 10x^2-5-5x$

- Esistono applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ per cui $\quad f(1,1,0)=(3,4)$
$\qquad f(0,1,0)=(0,5)$?

$(1,1,0)$ e $(0,1,0)$ sono l.i., non formano una base. Aggiungendo (opportunamente) un 3^e vettore si può ottenere una base. Ad esempio si può aggiungere $(0,0,1)$

Per ogni scelta di $\overset{w_3=}{f(0,0,1)}$ il teorema dice che esiste ed è unica l.a.l. per cui

$f(1,1,0)=(3,4) \qquad f(0,1,0)=(0,5) \qquad f(0,0,1)=w_3$

$\Rightarrow$ esistono infinite applicazioni lineari che risolvono il problema

- Esistono a.l. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ per cui $f(1,1,0)=(3,4)$, $f(0,1,0)=(0,5)$ $f(1,2,0)=(a,b)$?

$(1,1,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,2,0)$ non formano una base per $\mathbb{R}^3$ perché non generano $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ essendo in numero $=3$ (dimensione $\mathbb{R}^3$) non sono l.i. $\qquad (1,2,0) = (1,1,0)+(0,1,0)$

Allora se f deve essere lineare $\quad f(1,2,0) = f(1,1,0) + f(0,1,0) = (3,4)+(0,5) = (3,9)$

Conclusione: se $(a,b)=(3,9)$ la condizione $f(1,2,0)=(a,b)$ è inutile xché conseguenza delle prime due $\Rightarrow$ infinite a.l. $\qquad$ se $(a,b)\neq(3,9)$ non esistono a.l.

APPLICAZIONI LINEARI $f: V \to W$ con V e W $f.g$ ($\dim V = n$, $\dim W = m$)

TEOREMA: Fissata una base $\mathcal{B}$ per V e una base C per W, esiste una corrispondenza biunivoca tra a.e. $f: V \to W$ e matrici A $m \times n$

Dim: sia $\mathcal{B} = (b_1, b_2 \dots b_n)$, $C = (c_1, c_2 \dots c_m)$

a.l.c del dato $f: V \to W$ costruiamo la corrispondente matrice

generale $A = M_f^{B,C} \in \mathbb{K}$ A si costruisce per colonne. Per costruire la i-esima colonna

Si determina il corrispondente di b_i, $f(b_i) \in W$. Gli elementi della colonna i-esima sono (nell'ordine) le componenti di $f(b_i)$ nella base C

Esempi:

① $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ derivazione

$\dim V = \dim \mathbb{R}_3[x] = 4$; $\dim W = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$

Scegliamo come basi $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ $\quad C = (1, x, x^2)$

$$M_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

1° colonna: $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2$
2° colonna: $f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2$
3° colonna: $f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2$
4° colonna: $f(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0x + 3x^2$

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f = f_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$f_A(x_1, x_2) = (x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2)$

Calcoliamo la matrice $M_{f_A}^{B,C}$ $\quad$ $\mathcal{B}$ base canonica in $\mathbb{R}^2$

C base canonica in $\mathbb{R}^3$

$$M_{f_A}^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

1° colonna: $f_A(1,0) = (0,2,3) \in \mathbb{R}^3$ vettore che nella base C canonica per $\mathbb{R}^3$ ha componenti $0, 2, 3$

2° colonna: $f(0,1) = (1,-1,4)$

Stessa a.l. ma con $\mathcal{B}' = (\underset{b_1}{(1,2)}, \underset{b_2}{(2,3)})$ e C canonica

$$M_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$$

1° colonna: $f_A(b_1) = f_A(1,2) = (2, 0, 11)$ componente rispetto a C

2° colonna: $f_A(b_2) = f_A(2,3) = (3, 1, 18)$

COSTRUZIONE DELL'A.L. $f: V \to W$ a partire da una matrice A $m \times n$

$A \rightsquigarrow f_A^{B,C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(b_1) = a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{m1}c_m = w_1 \\ f(b_2) = a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{m2}c_m = w_2 \\ \dots \\ f(b_n) = a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \dots + a_{mn}c_m = w_n \end{cases}$$

Per il teorema fondamentale esiste una e una sola a.l. $f: V \to W$ per cui valgono

APPLICAZIONE al caso $V=\mathbb{K}^n$, $W=\mathbb{K}^m$ B, C basi canoniche

$f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ a.e. Costruiamo la matrice $A=M_f^{B,C}$, a partire da A costruiamo e'a e f_A $\hookrightarrow f_A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$

se calcoliamo f e f_A su ogni vettore b_i della base canonica otteniamo lo stesso vettore

$w_i = f(b_i) = f_A(b_i) \Rightarrow f \equiv f_A$

Ne segue: ogni a.e. $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ è del tipo f_A per qualche matrice A

$f(x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_m)$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\boxed{f(x_1 \dots x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)}$$

- $f(x_1,x_2) = (2x_1+3x_2, x_2)$ è lineare $[f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2]$ con matrice associata nelle basi canoniche $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 2x_1+x_2+5)$ non è lineare

- $f(x_1,x_2) = (x_1^3, x_1+2x_2)$ non è lineare

GENERALIZZAZIONE: $f: V \to W$ $\quad B=(b_1,\dots,b_n)$ base per V

$C=(c_1,\dots,c_m)$ base per W

se $f(v)=w$ e $v=x_1b_1+\dots+x_nb_n$, $w=y_1c_1+\dots+y_mc_m$ e $A=M_f^{B,C} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

① $f:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ derivazione

$B=(1,x,x^2,x^3)$ $\quad C=(1,x,x^2)$ $\quad A=\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix} = M_f^{B,C}$

$rk(A)=3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad f$ suriettiva

(le controimmagini di un polinomio $p(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ sono le sue primitive)

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - rk(A) = 4-3 = 1 \neq 0$ $\quad \operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$ $\quad f$ non è iniettiva

ok!! RICERCA DI Ker f: la formula $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dice che $v\in V$ $v=x_1b_1+\dots+x_nb_n \in \operatorname{Ker} f$

$\iff y_1=y_2=\dots=y_m=0$ cioè se $(x_1 \dots x_n)$ è soluzione del sist. omogeneo $AX=0$

nell'esempio: il sistema è $\begin{cases} x_2=0 \\ 2x_3=0 \\ 3x_4=0 \end{cases}$ $\quad$ i polinomi $p(x)=x_1+x_2x+x_3x^2+x_4x^3$ che appartengono a Ker f sono i polinomi $p(x)=x_1$ $\quad x_1\in\mathbb{R}$ qualsiasi

$\hookrightarrow$ i polinomi di grado 0 e il polinomio nullo

② Studiare la $f: \bar V \to \bar V$ $\quad \bar V$ spazio reale dei vettori dello spazio (applicati in un punto O)

$f(\bar v) = \bar a \wedge \bar v$ $\quad \bar a = 2\bar i + \bar j - 3\bar k$

- verificare che f è lineare
- trovare la matrice $A\in\mathbb{R}^{3,3}$ $\quad A=M_f^{B,B}$ $\quad B=(\bar i, \bar j, \bar k)$
- verificare direttamente e attraverso A che f non è né iniettiva né suriettiva.
- Determinare Ker f e Im f

- V, W spazi vettoriali sullo stesso campo degli scalari $\mathbb{K}$ entrambi f.g.

$B=(b_1 \dots b_n)$ base per V, $C=(c_1 \dots c_m)$ base per W

Ad $f: V \to W$ a.e. si può associare una matrice

$$A = M_f^{B,C} \quad m \times n$$

1. f è iniettiva, suriettiva?
2. Dato v come si calcola $f(v)$? Dato $w \in W$, come se ne trovano le controimmagini
3. Come trovare una base per $\ker f$, $\operatorname{Im} f$

1. $rk(A) = p \quad (p \le m,\ p \le n)$

<u>iniettività</u>: f iniettiva $\iff \ker f = \{0_V\} \iff \dim \ker f = 0$

$\iff Ax=0$ ha solo la soluzione nulla $\iff rk(A)=n$

$\iff rk(A)=n$

<u>suriettività</u>: $\operatorname{Im} f = W \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W \iff rk(A) = m$

(ricordando che $\dim \operatorname{Im} = rk(A)$)

<u>OSSERVAZIONE</u>: condizione necessaria affinché f sia una corrispondenza biunivoca è che $n=m$

se $n=m$, f è una c.e. se e solo se $n=m=rk(A)$

<u>Def</u>: <u>$f: V \to W$ si dice ISOMORFISMO se f è lineare, iniettiva, suriettiva</u>

<u>Def</u>: <u>due $\mathbb{K}$-spazi V e W si dicono ISOMORFI se è possibile trovare un isomorfismo $f: V \to W$</u>

↳ le due definizioni valgono anche nel caso che V e W non siano f.g.

Nel caso $\dim V = n$, $\dim W = m$, un'a.e. $f: V \to W$ è un isomorfismo se e solo se $A = M_f^{B,C}$, $rk(A) = n = m$

$\Rightarrow f$ isomorfismo $\iff A$ è quadrata, invertibile

OSSERVAZIONE: Qualunque sia la scelta delle basi B per V e C per W, $rk(A)$ è sempre lo stesso perché $rk(A) = \dim \operatorname{Im} f$

2. $v \in V$ come calcolo $f(v)$:

$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$

$v \to (x_1, x_2 \dots x_n)$, si calcola il prodotto $Y = AX$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

il vettore $f(v) = y_1 c_1 + y_2 c_2 + \dots y_m c_m$

Dato w come calcolo le sue controimmagini

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$$

se $w = y_1 c_1 + \dots + y_m c_m$ bisogna risolvere il sistema lineare $AX = Y$ dove i termini noti sono le componenti di w

$\boxed{w \in \mathrm{Im} f}$ $\Leftrightarrow$ w ha almeno una controimmagine $\Leftrightarrow$ $AX=Y$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $\boxed{rk(A)=rk(A|Y)}$

③ $\ker f = \{v \in V, f(v) = 0_W\} = f^{-1}\{0_W\}$

le componenti dei vettori di $\ker f$ sono date dalle sol di $AX=0$

$\boxed{\text{Base per } \ker f}$:

- si risolve il sistema omogeneo $AX=0$

se c'è solo la soluzione nulla, $\dim \ker f = 0$, base è l'insieme vuoto.

se ci sono infinite soluzioni, si cerca una base per $S(A)$ (lo spazio delle sol del sistema) e si determinano i corrispondenti vettori

$\boxed{\text{Base per } \mathrm{Im} f}$: Ricordiamo che le colonne di A danno le componenti di n vettori che generano $\mathrm{Im} f$

Per trovare una base per $\mathrm{Im} f$ si trova una base per lo spazio delle colonne di A ($C(A)$) e si determinano i vettori di W corrispondenti

- Siano V e W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$\dim V = 3$ base $B = (b_1, b_2, b_3)$

$\dim W = 4$ base $= (c_1, c_2, c_3, c_4)$

$f: V \to W$ app. l. per cui $A = M_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcoliamo $f(b_1 - 2b_3) = w$

w ha come componenti y_1, y_2, y_3, y_4 date da $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4×3 $\quad$ 3×1

$f(v) = 3c_1 - 8c_2 - 2c_3 + c_4$

b) Calcoliamo le controimmagini di $w = c_1 - 2c_3 + 3c_4$

$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad rk(A) = rk(A|Y) = 2$

∞ soluzioni

$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$ sol. $(1-t, -2t, t)$

$f^{-1}(c_1 - 2c_3 + 3c_4) = \{(1-t)b_1 - 2t\, b_2 + t b_3,\ t \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\ker f}$: si risolve $AX=0$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$ $\{(-t, -2t, t)\}$ = spazio delle sol

$= \{t(-1, -2, 1)\} = \mathcal{L}((-1, -2, 1))$

Una base per lo sp. delle sol è data dal vettore $(-1, -2, 1)$

Una base per $\ker f$ è data dal corrispondente vettore in V: $-b_1 - 2b_2 + b_3$

$\boxed{Im\, f}$

Si trova una base per lo spazio delle colonne: due qualsiasi delle 3 colonne vanno bene. Ad esempio $(1,0,-2,3)$, $(-1,2,1,-1)$.

Allora una base per $Ker\, f$ è ad es.: $(C_1-2C_3+3C_4,\ -C_1+2C_2+C_3-C_4)$

<u>Esercizio</u>: sia V lo spazio vettoriale dei vettori ordinari nello spazio.

$B=(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ base ortonormale (positiva)

si cons. la funzione $f: V \to V$ definita $f(\bar{v})=\bar{a}\wedge\bar{v}$ $\quad \bar{a}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

① f è lineare

i) $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$? $\quad \begin{cases} f(v_1+v_2)=\bar{a}\wedge(\bar{v}_1+\bar{v}_2) \\ f(v_1)+f(v_2)=\bar{a}\wedge v_1+\bar{a}\wedge v_2 \end{cases}$

VERO $\forall(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ per le proprietà di $\wedge$

ii) $f(kv)=kf(v)$? $\quad f(k\bar{v})=\bar{a}\wedge(k\bar{v})$ $\quad$ = per una proprietà di $\wedge$

$k\in\mathbb{R}$ $\quad kf(\bar{v})=k(\bar{a}\wedge\bar{v})$ $\quad \forall k, \forall\bar{v}$

Troviamo la matrice A associata ad f rispetto a $B=(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$

$A=M_f^{B,B}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1° colonna: $f(\bar{i})=\bar{a}\wedge\bar{i}=(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})\wedge\bar{i}=-\bar{k}-3\bar{j}$

2° " $f(\bar{j})=\bar{a}\wedge\bar{j}=(\quad)\wedge\bar{j}=2\bar{k}+3\bar{i}$

3° " $f(\bar{k})=\bar{a}\wedge\bar{k}=\quad=-2\bar{j}+\bar{i}$

$rk(A)$? $\quad$ è 2 $(\det A=0)$, 3 $(\det A\neq 0)$

$\det A=6-6=0 \Rightarrow rk(A)=2$

$\dim Ker\, f=3-2=1\neq 0$ $\quad f$ non iniettiva

$\dim Im\, f=2$ $\quad f$ non suriettiva

Determinazione del nucleo usando A

$AX=0$ $\quad \begin{cases} 3y+z=0 \\ -3x-2z=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$ $\quad$ soluzioni $\begin{matrix} x=2y \\ z=-3y \end{matrix}$ $\quad (2t,t,-3t)$ base per spazio soluzioni $(2,1,-3)$

$\Rightarrow$ base per $Ker\, f = 2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}$

<u>$Im\, f$</u>.

Quali sono i vettori $\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k}\in Im\, f$?

Sono quelli per cui il sistema $AX=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ è risolubile

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & \alpha \\ -3 & 0 & -2 & \beta \\ -1 & 2 & 0 & \gamma \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & \alpha \\ -3 & 6 & 0 & 2\alpha+\beta \\ -1 & 2 & 0 & \gamma \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & \alpha \\ -3 & 6 & 0 & 2\alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-\frac{1}{3}(2\alpha+\beta) \end{array}\right)$

il sistema è risolubile se e solo se $\quad \gamma-\frac{1}{3}(2\alpha+\beta)=0$

$2\alpha+\beta-3\gamma=0$

$\bar{v}=\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k}=\overline{OP}$, $P(\alpha,\beta,\gamma)\in$ al piano $2x+y-3z=0$ che è $\perp$ a $(2,1,-3)$

Esercizio 3

Scrivere la matrice associata alla e. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$f(x,y) = (x+2y, y, -x, x+2y)$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$

e dire se f è iniettiva suriettiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk(A) = 2$

dim $= 0$ → è INIETTIVA

non è suriettiva

Esercizio 4

È data la e. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$f(1,2,3) = (1,5)$

$f(0,1,2) = (-2,-10)$ studiare f e determinare l'espressione

$f(0,0,1) = (1,a)$

$((1,2,3),(0,1,2)(0,0,1))$ formano una base per $\mathbb{R}^3$

Per il teorema fondamentale dell'algebra lineare, f è ben definita

OSSERVAZIONI: $v = 2(1,2,3) + (0,1,2) \in Ker f$ $\quad v = (2,5,8)$

$f(v) = 2f(1,2,3) + f(0,1,2) = 2(1,5) + (-2,-10) = (0,0)$

- Per $a \neq 5$ dim Imf = 2 (in Imf ci sono 2 vettori e.i. $(1,5) = f(1,2,3)$, $(1,a) = f(0,0,1)$ ⇒ Im$f = \mathbb{R}^2$ dim Ker$f$ = 3 − dim Imf = 3 − 2 = 1

⇒ $(2,5,8)$ è una base per Ker$f$

- Per $a = 5$, i tre vettori $f(1,2,3)$, $f(0,1,2)$ $f(0,0,1)$ generano Imf non ne formano una base xké sono tutti proporzionali

dim Imf = 1 Ker$f$ ha dimensione 2

$v = (2,5,8) \in Ker f$ $\quad f(1,2,3) - f(0,0,1) = (0,0)$

$v_1 = (1,2,2) \in Ker f$

v e v_1 sono e.i. ⇒ formano una base per Ker$f$ (sempre se $a = 5$)

Matrice associata a f

- $B = ((1,2,3),(0,1,2),(0,0,1))$ base per $\mathbb{R}^3$ e C base canonica per $\mathbb{R}^2$

$$M_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -10 & a \end{pmatrix}$$

L'espressione di f è nota se ho la matrice rispetto alle basi canoniche sia in partenza che in arrivo. Bisogna trovare da f: $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, $f(0,0,1)$

$(1,2,3) = (1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$$\begin{cases} f(1,0,0) + 2f(0,1,0) + 3f(0,0,1) = (1,5) \\ f(0,1,0) + 2f(0,0,1) = (-2,-10) \\ f(0,0,1) = (1,a) \end{cases}$$

Interpretiamo il sistema come un sistema lineare nelle incognite vettoriali $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, $f(0,0,1)$

$$\begin{cases} f(0,0,1) = (1,a) \\ f(0,1,0) = (-2,-10) - 2(1,a) = (-4,-10-2a) \\ f(1,0,0) = (1,5) - 2(-4,-10-2a) - 3(1,a) = (6, a+25) \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ a+25 & -10-2a & a \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = \left[6x - 4y + z,\ (a+25)x + (10-2a)y + az\right]$$

ALTRO MODO

$\Rightarrow v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ v è ℓ di $(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)$ esistono 3 numeri reali α, β, γ dipendenti da x,y,z per cui:

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(0,0,1)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \alpha f(1,2,3) + \beta f(0,1,2) + \gamma f(0,0,1) =$$

$= \alpha(1,5) + \beta(-2,-10) + \gamma(1,a)$ Bisogna trovare α, β, γ e sostituire

$$\rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha + 2\beta + \gamma \end{cases}$$ Sistema nelle incognite α, β, γ e termini noti x, y, z

$\alpha = x$

$\beta = y - 2x$

$\gamma = z - 3x - 2(y-2x) = z + x - 2y$ $\Rightarrow f(x,y,z) = x(1,5) + (y-2x)(-2,-10) + (z+x-2y)(1,a)$

$= (6x - 4y + z, \ldots)$

MATRICI ASSOCIATE A UNA STESSA f RISPETTO A BASI DIVERSE

$f: V \to W$ — B, B' / C, C' — $M_f^{B'C'}$, M_f^{BC}

C e C' basi per W

B e B' basi per V

se v ha componenti $x_1 \ldots x_n$ rispetto a B e $x_1' \ldots x_n'$ rispetto a B' si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$ P matrice del cambio base da B a B'

P ha come ~~colonne~~ colonne le componenti di $b_1' \ldots b_n'$ rispetto a $b_1 \ldots b_n$

$$P_{n\times n} = \begin{pmatrix} & p_{1i} & \\ & p_{2i} & \\ & \vdots & \\ & p_{ni} & \end{pmatrix} \qquad b_i' = p_{1i}b_1 + p_{2i}b_2 + \ldots + p_{ni}b_n$$

Analogamente si ha una matrice di cambio base Q in W

Q è $m \times m$, P e Q sono matrici invertibili

Si può dimostrare che vale questa formula:

$$\boxed{Q^{-1}_{m\times m} M_{f\,m\times n}^{BC} P_{n\times n} = M_{f\,m\times n}^{B'C'}}$$

Caso particolare: $f: V \to V$ (ENDOMORFISMO) — B, B' / B, B'

$$M_f^{B'B'} = P^{-1} M_f^{BB} P$$ P matrice cambio base in V ("spazio partenza")

Def: Se date due matrici quadrate $M, N \in \mathbb{K}^{n,n}$, risulta $N = P^{-1}MP$ per qualche P invertibile, allora si dice che N è **SIMILE** ad M

SOMMA DI DUE APPLICAZIONI LINEARI

Siano $f, g: V \to W$ lineari

si definisce $f+g: V \to W$ l'applicazione somma nel seguente modo $(f+g)(v) \overset{def}{=} f(v) + g(v)$

PROPOSIZIONE: $f+g$ è lineare

Dim: $(f+g)(v_1+v_2) = f(v_1+v_2) + g(v_1+v_2)$

$= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2)$ linearità di f e g

$= (f(v_1) + g(v_1)) + (f(v_2) + g(v_2))$

$= (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2)$

$(f+g)(\lambda v) = \lambda (f+g)(v)$ ...

PROPOSIZIONE: L'applicazione $kf: V \to W$ appena definita è lineare

Dim: $(kf)(v_1+v_2) = kf(v_1) + kf(v_2)$

$(kf)(\lambda v) = \lambda (kf(v))$ ...

COMPOSIZIONE DI 2 APPLICAZIONI LINEARI

Siano $f: V \to W$, $g: W \to U$ 2 applicazioni lineari

si definisce $g \circ f: V \to U$

$(g \circ f)(v) = g(f(v))$

PROPOSIZIONE: f, g lineari $\Rightarrow g \circ f$ è LINEARE

Dim: $(g \circ f)(v_1+v_2) = g(f(v_1+v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2))$ f lineare

$= g(f(v_1)) + g(f(v_2))$ g lineare

$= (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)$

INVERSA $\to$ sia $f: V \to W$ lineare biettiva $\Rightarrow \exists f^{-1}: W \to V$ funzione

PROPOSIZIONE: f è lineare biettiva

LEGAME CON LE MATRICI ASSOCIATE QUANDO U, V, W SONO F.G.

A) SOMMA
B) MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE
C) COMPOSIZIONE
D) INVERSA

A) SOMMA $f: V \to W$ E base di V

$g: V \to W$ G base di W

$M_f^{E,G}$ $M_g^{E,G}$

$f+g: V \to W$ $M_{f+g}^{E,G} = M_f^{E,G} + M_g^{E,F}$

B) MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

$f: \overset{E}{V} \to \overset{G}{W}$ $M_f^{E,G}$

$kf: V \to W$ $M_{kf}^{E,G} = k M_f^{E,G}$

C) COMPOSIZIONE

$f: \overset{E}{V} \to \overset{F}{W}$ $M_f^{E,F}$

$g: \overset{F}{W} \to \overset{G}{U}$ $M_f^{F,G}$

$g \circ f: \overset{E}{V} \to \overset{G}{U}$

$$\boxed{M_{g\circ f}^{E,G} = M_g^{F,G} \cdot M_f^{E,F}}$$

D) INVERSA

$f: V \to W$ lineare biettiva (isomorfismo)

$$\boxed{M_{f^{-1}}^{E,G} = \left(M_f^{E,G}\right)^{-1}}$$

$f^{-1}: \underset{G}{W} \to \underset{E}{V}$

- Siano $f: V \to W$, $g: W \to U$ 2 applicazioni lineari

$g \circ f: \cancel{}\ V \to U$

$\Downarrow$

$\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$

$\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im} g$

$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$

Dim:

$v \in \ker f \Rightarrow f(v) = 0_W$

$\Rightarrow g(f(v)) = g(0_W) = 0_U$

$\Rightarrow v \in \ker(g \circ f)$

- $f: V \to W$ $g: W \to U$ 2 applicazioni lineari $f: \overset{E}{V} \to \overset{F}{W} \to \overset{G}{U}$

$g \circ f: V \to U$ V, W, U sono f.g.

$\Downarrow$

$rk(B \cdot A) \leq rk(A)$

$rk(B \cdot A) \leq rk(B)$

$A = M_f^{E,F}$ $B = M_g^{F,G}$

$M_{g \circ f}^{E,G} = B \cdot A$

$\dim V = \dim \ker f + \underset{rk(A)}{\dim \operatorname{Im} f}$

$\dim V = \dim \ker(g \circ f) + \underset{rk(B \cdot A)}{\dim \operatorname{Im}(g \circ f)}$

per la proposizione precedente $\dim \ker f \leq \dim \ker(g \circ f)$