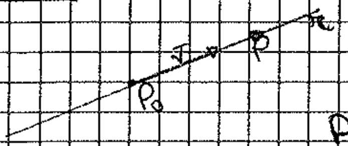
GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO: rette e piani

RETTE



Ogni retta è individuata da un punto e da un vettore libero ad essa parallelo (× cui passa)

$$P \in r \iff P - P_0 \text{ è parallelo a } \bar{v}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \bar{v} = (l, m, n) \neq \bar{0}$ $\quad P(x, y, z)$

$$P - P_0 \parallel \bar{v} \iff \exists t \in \mathbb{R} : \quad P - P_0 = t\bar{v}$$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(l, m, n)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ equazioni parametriche della retta r

OGNI RETTA AMMETTE INFINITE RAPPRESENTAZIONI PARAMETRICHE

• Sia r la retta AB, $A(0,1,2)$, $B(-3,1,4)$. Cerchiamo delle equazioni parametriche per r

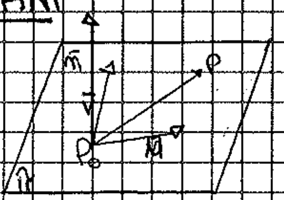
Posso prendere come P_0 A (oppure B) e come $\bar{v}$ $B-A$

$\bar{v} = B - A = (-3, 0, 2)$ $\quad \begin{cases} x = 0 - 3t \\ y = 1 + 0t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Prendo il punto $C(8, 1, 6) \in r$?

Sì, se $\exists! t$: $\begin{cases} 8 = -3t \\ 1 = 1 \\ 6 = 2 + 2t \end{cases}$ $\begin{cases} t = -8/3 \\ t = +2 \end{cases}$ Le tre equazioni non sono compatibili $\rightarrow C \notin r$

PIANI



$P_0(x_0, y_0, z_0)$

$\bar{v} = (l, m, n)$

$\bar{u} = (l', m', n')$ $\quad \Rightarrow \bar{v}$ non parallelo a $\bar{u}$

$P \in \pi \iff P - P_0$ è complanare con $\bar{u}, \bar{v}$

1) $P - P_0$ è complanare con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ se e solo se $P - P_0$ è combinazione lineare di $\bar{u}$ e $\bar{v}$, cioè se e solo se esistono due numeri reali t, s per cui:

$$P - P_0 = t\bar{u} + s\bar{v}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases}$$ equazioni parametriche del piano π

2) $P - P_0$ è complanare con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ $\iff (P - P_0) \cdot (\bar{u} \wedge \bar{v}) = 0$ cioè

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = (x-x_0)\underbrace{\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}}_{a} - (y-y_0)\underbrace{\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}}_{-b} + (z-z_0)\underbrace{\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}}_{c} = 0$$

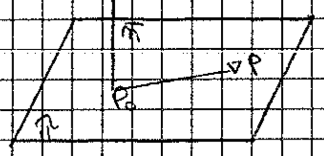
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

⇒ $P(x,y,z) \in \pi$ se e solo se le sue coordinate soddisfano a un'equazione di 1° grado in x, y, z

I coefficienti delle incognite a, b, c sono le componenti di un vettore $\bar{n}\ (= \bar{u} \wedge \bar{v})$ ortogonale al piano

3) Si può arrivare ad un'equazione del tipo: $ax+by+cz+d=0$ pensando π come piano per P_0 ortogonale al vettore $\bar{n}=(a,b,c)$:



$P \in \pi \iff P-P_0$ è ortogonale a $\bar{n} \iff (P-P_0)\cdot \bar{n} = 0$

$\Downarrow$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$

$\bar{n}=(a,b,c)$

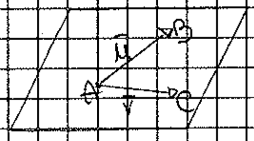
- Consideriamo i punti $A(1,1,0)$ $B(3,-1,2)$ $C(4,-1,3)$

Controlliamo che A,B,C non siano allineati: A,B,C sono allineati se $B-A$ e $C-A$ sono paralleli

$B-A=(2,-2,2)$ $\quad C-A=(3,-2,3)$ $\rightsquigarrow$ non hanno le componenti proporzionali

↳ non sono paralleli

$\exists$ un solo piano π che contiene A,B,C.



Rappresentazioni di π

① equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + 3s \\ y = 1 - 2t - 2s \\ z = 0 + 2t + 3s \end{cases}$$

② equazione cartesiana, cioè $ax+by+cz+d=0$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

(a,b,c) sono le componenti di un vettore $\perp \pi$ $\rightsquigarrow$ es. $(B-A)\wedge(C-A)$

$$(B-A)\wedge(C-A) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{\imath}+0\hat{\jmath}+2\hat{k} = -2\hat{\imath}+2\hat{k} \rightsquigarrow (-2,0,2)$$

$-2(x-1)+0(y-1)+2(z-0)=0$

$-2x+2+2z=0$ $\quad$ equazione che è equivalente a $-x+z+1=0$

③ Sapendo che si deve arrivare ad una equazione del tipo $ax+by+cz+d=0$ si può ragionare così:

$A \in \pi$, cioè le sue coordinate sono una soluzione dell'equazione $a+b+d=$

$B \in \pi$, " " " " " " $3a-b+2c+$

$C \in \pi$, " " " " " " $4a-b+3c+d$

ci sono infinite soluzioni $\rightsquigarrow ka, kb, kc, kd \quad \forall k \in \mathbb{R}$

CASI PARTICOLARI DI EQU. DEI PIANI

$ax+by+cz+d=0$

① $d=0$ $ax+by+cz=0$ equazione omogenea

$\Rightarrow (0,0,0)$ è soluzione, cioè è l'origine è un punto del piano

② $c=0$ $ax+by+d=0$

$\rightarrow$ il piano rappresentato è $/\!/$ all'asse z

(1+2) $ax+by=0$ il piano contiene l'asse z

③ $cz+d=0$ $\rightarrow$ il piano è parallelo al piano xy

(3+1) $cz=0$ $z=0$ $\rightarrow$ rappresenta il piano xy

PASSAGGIO DA UNA RAPPRESENTAZIONE ALL'ALTRA

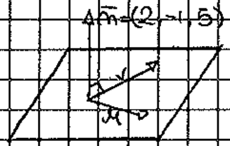
① Scrivere delle equazioni parametriche del piano $\pi: 2x-y+5z-1=0$

Risolviamo l'equazione $y=2x+5z-1$ ci sono 2 incognite libere

che possiamo prendere come parametri: $\begin{cases} x=t \\ y=2t+5s-1 \\ z=s \end{cases}$ $A=(0,-1,0)$

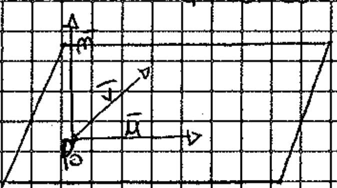
$\bar{v}=(1,2,0)$

$\bar{u}=(0,5,1)$



② È dato il piano π avente eq. parametriche $\begin{cases} x=t+s \\ y=2t-s+1 \\ z=s+3 \end{cases}$

Scrivere un'eq. cartesiana di π



$P_0(0,1,3)$ $\bar{v}=(1,2,0)$

$\bar{u}=(1,-1,1)$

$$\bar{n}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(\underset{a}{2},\underset{b}{-1},\underset{c}{-3})$$

$\pi: 2x-y-3z+d=0$

poiché $P_0 \in \pi \rightarrow 2\cdot 0-1-3\cdot 3+d=0$ $d=10$

$\pi: 2x-y-3z+10=0$

OPPURE: eliminiamo i parametri t e s $\begin{cases} x=t+s \\ y=2t-s+1 \\ z=s+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t+z-3 \\ y=2t-z+4 \\ s=z-3 \end{cases}$ $\begin{cases} s=z-3 \\ t=x-z+3 \\ y=2x-2z+6-z+4 \end{cases}$

$\rightarrow y=2x-3z+10$ $\rightarrow 2x-y-3z+10=0$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DELLE RETTE (nello spazio)

Consideriamo il sistema $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y-5z+1=0 \end{cases}$

Le soluzioni del sistema sono soluzioni sia della 1ª che della 2ª equazione, quindi sono le coordinate dei punti in comune ai due piani (non paralleli), cioè dei punti della retta r intersezione dei due piani.

Diciamo che il sistema rappresenta la retta $r = \pi \cap \pi'$

π e π' sono // se e solo se lo sono $\bar{n}$ e $\bar{n}'$

(nell'esempio $\bar{n}=(2,1,-1)$ $\bar{n}'=(1,1,-5)$ non paralleli, xké le componenti non proporzionali)

In generale un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

con (a,b,c) e (a',b',c') non proporzionali rappresenta una retta:

la retta r intersezione dei piani π e π' di eq. rispettivamente

$\pi: ax+by+cz+d=0$ $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

- La condizione (a,b,c) e (a',b',c') non proporzionali si può esprimere con la formula
$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

- È data la retta r $\begin{cases} 2x-y+z+1=0 \\ y+3z-6=0 \end{cases}$

Scrivere delle equazioni parametriche di r.

Risolviamo il sistema $\begin{cases} x=-z+\frac{3}{2} \\ y=6-3z \end{cases}$ $\begin{cases} x=-t+\frac{3}{2} \\ y=-3t+6 \\ z=t \end{cases}$

- È data la retta $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t \\ z=t+5 \end{cases}$. Pensiamo la retta come intersezione di piani "eliminando" t

$\begin{cases} t=x-1 \\ y=-3x+3 \\ z=x-1+5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x+y-3=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3 \\ z=4t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+1 \\ y=3 \\ t=\frac{z}{4} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y-3=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

- Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ -y+6z=0 \\ x+kz=h \end{cases}$ e interpretarlo geometricamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & k & h \end{array}\right)$$
A

$\det A = 2-k$ $\begin{cases} k\neq 2 \quad \det A\neq 0 \quad rk(A)=3 \rightsquigarrow rk(A|B)=3 \quad \text{1 sola soluzione} \\ \qquad \rightsquigarrow \text{un solo punto in comune} \\ k=2 \quad \det A=0 \quad rk(A)=2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & h \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & h \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{array}\right)$$

$rk(A|B)$ $\begin{cases} 3 \quad h\neq -1 \quad \text{il sistema non ha soluz.} \\ 2 \quad h=-1 \quad \text{la retta } r \text{ è contenuta anche nel 3° piano} \end{cases}$

se $k=2, h=-1 \rightsquigarrow$ la retta è contenuta in 3 piani

Si dimostra che se $r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ tutti i piani che contengono r hanno un'equazione

del tipo: $\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$ al variare di λ, μ non entrambe nulle

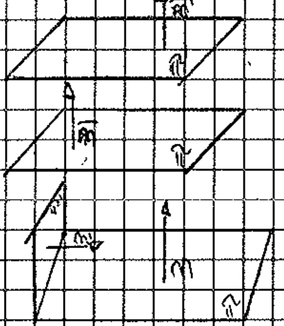
$\downarrow$ equazione del fascio

Def: L'insieme dei piani che contengono una retta r si dice FASCIO PROPRIO DI PIANI di asse la retta r

FASCIO DI PIANI

Fascio proprio di piani = insieme di tutti i piani che contengono una retta. La retta si chiama ASSE DEL FASCIO

$r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \rightsquigarrow \text{eq. di un piano } \pi \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \rightsquigarrow \text{eq. di un secondo piano } \pi' \text{ non parallelo a } \pi \end{cases}$



$\bar{n}(a,b,c) \perp \pi$ $\quad$ $\bar{n} /\!/ \bar{n}'$, cioè (a,b,c) e (a',b',c') sono proporzionali, cioè

$\bar{n}'(a',b',c') \perp \pi'$ $\quad$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$

$\bar{n} \not\parallel \bar{n}'$ $\quad$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$

Si dimostra che i piani del fascio di asse r sono tutti e soli i piani aventi un'eq. del tipo:

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

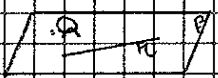
al variare di $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$

Dim: ① È vero che l'equazione rappresenta un piano α che contiene r per ogni scelta di λ e μ?

cioè se $P_0(x_0,y_0,z_0)\in r$, allora P_0 appartiene ad α? Sostituendo nell'equazione si

ottiene $\lambda 0+\mu 0=0$, $\forall \lambda,\mu$. α fa quindi parte del fascio

② Viceversa, sia β un piano del fascio e sia β quello passante per un punto



$Q(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\notin r$. È possibile trovare λ,μ tali che il corrispondente

piano passi per Q?

$\lambda(a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}+d)+\mu(a'\bar{x}+b'\bar{y}+c'\bar{z}+d')=0$: le due parentesi non sono

entrambe nulle. Abbiamo un'eq. in λ,μ che permette di trovarne i valori corrispondenti

• $r \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ -x+3z-4=0 \end{cases}$ $\quad Q(1,0,0)$ $\quad Q\notin r \rightsquigarrow$ esiste uno e un solo piano contenente r e Q

$\lambda(x+2y-z+1)+\mu(-x+3z-4)=0$ $\rightsquigarrow$ poniamo il passaggio per Q

$2\lambda-5\mu=0$ $\qquad \lambda=\frac{5}{2}\mu$

per $\lambda=5$ $\mu=2$: $5(x+2y-z+1)+2(-x+3z-4)=0$

$3x+10y+z-3=0$

$\pi: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ -x+3z-4=0 \end{cases}$ $Q(-1,0,1) \in r$ sostituiamo nell'eq. del fascio

$-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$, μ qualsiasi

se $\mu=1$ $(\lambda=0)$: $-x+3z-4=0$

Rappresentare tutti i piani // al piano π di eq. $ax+by+cz+d$

$\bar{n}(a,b,c)$ è ortogonale a π e quindi anche a π' che avrà eq. del tipo:

$\underline{ax+by+cz+d'=0}$

↳ Rappresenta tutti i piani // a π

· Trovare l'equ. di π' passante per $Q(-1,1,0)$ e // a π: $2x+3y-z+1=0$

π': $2x+3y-z+d'=0$ $-2+3+0+d'=0$, $d'=-1$ $2x+3y-z-1=0$

POSIZIONI RECIPROCHE

POSIZIONI RECIPROCHE tra due piani, tra un piano e una retta, tra due rette

① Siano π e π' due piani $\pi: ax+by+cz+d=0$

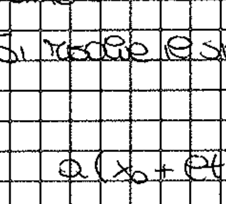
$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Casi possibili

- $\pi=\pi'$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=1$ coefficienti proporzionali
- $\pi /\!/ \pi'$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$ $rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$ sistema non risolubile
- π e π' hanno in comune una retta

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2=rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

② Sia π un piano di eq. $ax+by+cz+d=0$ ed r una retta



· r è incidente il piano, cioè r e π hanno un punto A in comune

$r \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ $\bar{n}(a,b,c) \perp \pi$

$\bar{v}(l,m,n) /\!/ r$

$\bar{v}$ e $\bar{n}$ non sono ortogonali: $\bar{v}\cdot\bar{n} \neq 0$ $al+bm+cn \neq 0$

Come si trova $A=r\cap\pi$?

Si risolve il sistema $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ sistema lineare in x,y,z,t incognite

$a(x_0+lt)+b(y_0+mt)+c(z_0+nt)+d=0$

$(al+bm+cn)t + ax_0+by_0+cz_0+d=0$ risolubile xké $al+bm+cn \neq 0$

Se r è dato come intersezione di piani $\begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$ per decidere se

la retta interseca il piano e per trovare il punto d'intersezione, si deve studi il sistema delle 3 equazioni $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$ il sistema ha una e una sola soluzione se

$rk(A)=3$

- se $al+bm+cn=0$
  - retta // al piano → non ci sono punti in comune. i sistemi scritti x trovare le soluzioni non devono essere risolubili
  - retta r appartiene al piano → il sistema che dà i punti comuni ha infinite soluzioni

⑬ Siano r e r' due rette

- r e r' rette coincidenti → infiniti punti in comune
- r e r' distinte e stanno su uno stesso piano → le rette sono o // o incidenti in un punto
  ↳ complanari
- r e r' distinte ma non stanno sullo stesso piano → r e r' sono **SGHEMBE**

Questa intersezione $r \cap r'$ è vuota in due casi: rette // oppure rette sghembe

$r \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-2t-5 \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y-z+1=0 \end{cases}$

Hanno punti in comune? Consideriamo il sistema

$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-2t-5 \\ x+y+1=0 \to t-t+1=0 \\ 2y-z+1=0 \to -2t+2t+5+1=0 \end{cases}$ sistema non compatibile → r ed s non hanno punti in comune

r ed s sono o // o sghembe

$r \,//\, \vec{v}(1,-1,-2)$ $\quad s: \begin{cases} x=-y-1 \\ z=2y+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-t-1 \\ y=t \\ z=2t+1 \end{cases}$

$s \,//\, \vec{w}(-1,1,2)$

$\Downarrow r//s$ → i $\vec{w}$ e $\vec{v}$ sono //

Determiniamo il piano π che contiene sia r che s

π appartiene al fascio avente s come asse: $\lambda(x+y+1)+\mu(2y-z+1)=0$

π deve contenere anche r → un qualsiasi punto Q su r $\quad$ es $Q(0,0,-5) \to t=0$

$\lambda(1)+\mu(6)=0 \qquad \lambda=-6\mu$

se $\mu=-1$, $\lambda=6$ $\qquad 6(x+y+1)-(2y-z+1)=0$

$$\boxed{6x+4y+z+5=0}$$

DISTANZE

① Distanza tra 2 punti PQ

$d(P,Q)=$ (lunghezza del segmento $PQ=$) modulo di $P-Q$

$d(P,Q)=|P-Q|$

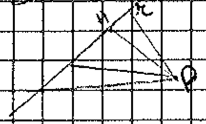
$P(x_1,y_1,z_1)$ $\quad Q(x_2,y_2,z_2)$ $\qquad P-Q=(x_1-x_2,\, y_1-y_2,\, z_1-z_2)$

$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}}$$

② Distanza di un punto P da un insieme Q di punti

$$d(P,Q) = \inf(P,Q) \qquad Q \in Q$$

2.1 distanza di P da una retta r $\qquad P(x_1, x_2, x_3)$

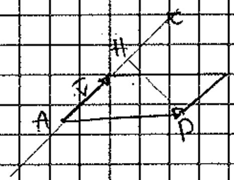


$$d(P,r) = \min(P,Q) \qquad Q \in r$$
$$= d(P,H) \qquad \text{H proiezione ortogonale di P su r} \rightarrow \text{trovare H}$$

- Il metodo più semplice è pensare H come intersezione di r con il piano α passante per P e ⊥ r

α è ortogonale ad $\bar{n}(a,b,c)$ che risulta // r e quindi dato dalle eq. parametriche di r

- Sia A un punto di r e $\bar{v}$ vettore // r



area del parallelogrammo $= |\bar{v}|\, d(P,r)$
$= |\bar{v} \wedge (P-A)|$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|(P-A)\wedge \bar{v}|}{|\bar{v}|}}$$

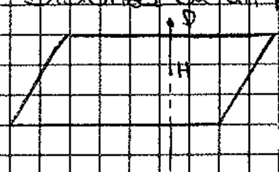
- Dalla definizione: il generico punto Q di r ha coordinate date dalle eq. parametriche di r:

$$Q(x_0+lt,\ y_0+mt,\ z_0+nt)$$

$d(P,Q)$ è una funzione di t $\quad f(t) = \sqrt{(x_0+lt-x_1)^2+(y_0+mt-y_1)^2+(z_0+nt-z_1)^2}$

Basta trovare il valore minimo di $f(t)$ (o di $f^2(t)$ ⇒ se è + facile)

2.2 Distanza di un punto P da un piano

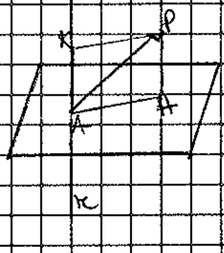


$\inf(P,Q)$ $(Q \in \pi)$ è un minimo che si ottiene calcolando $d(P,H)$, H proiezione ortogonale di P su π

- H si può trovare come intersezione di π con la retta r per P ⊥ a π

$P(x_1, y_1, z_1) \qquad \pi: ax+by+cz+d=0 \qquad$ r è la retta per P parallela a $\bar{n}(a,b,c)$

$$r \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

- 

$d = d(P,H) = d(K,A) \qquad \bar{n} = (a\ b\ c)$

$|d(AK)|$ = misura della proiezione di AP su r ⊥ π

$d = |(P-A)\cdot \text{vers}\, n| = \left|(P-A)\cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| =$

$$\boxed{d = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} \boxed{= \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

MINIMA DISTANZA TRA 2 RETTE SGHEMBE

Siano r ed s due rette sghembe

$d(r,s) = \inf d(P,Q) \quad P \in r, Q \in s$

$= \min d(P,Q) = d(P^*, Q^*) \quad P^* \in r, Q^* \in s$

dove la retta P^*Q^* è ortogonale sia ad r che ad s

P^*Q^* = retta di minima distanza

esempio

$r \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = 2+t' \\ y = 1-t' \\ z = 2t' \end{cases}$

Sono sghembe? — sono parallele? no! $r // \bar{u} = (1,1,-1) \not\parallel (1,-1,2) = \bar{v} // s$

sono incidenti? $\begin{cases} 1+t = 2+t' \\ t = 1-t' \\ t = -2t' \end{cases} \quad \begin{cases} 1+2 = 2-1 \\ t' = -1 \\ t = -2t' = 2 \end{cases} \quad 3 = 1$ no! non ci sono punti comuni

r e s sono SGHEMBE

Ricerchiamo i punti di minima distanza.

Una generica retta incidente r, s è // al vettore $\bar{w} = P - Q$ con $P(1+t, t, -t)$, $Q(2+t', 1-t', 2t')$

Chiediamo che la retta cercata sia $\perp r$: $\bar{w} \perp \bar{u} \Leftrightarrow \bar{w} \cdot \bar{u} = 0$

analogamente la retta è $\perp s$: $\bar{w} \perp \bar{v}$

$\bar{w} = (t-t'-1,\ t+t'-1,\ -t-2t')$ $\qquad \bar{u} = (1,1,-1)$, $\bar{v} = (1,-1,2)$

$\begin{cases} t-\cancel{t'}-1+t+\cancel{t'}-1+t+2t' = 0 \\ \cancel{t}-t'\cancel{-1}-\cancel{t}-t'\cancel{+1}-2t-4t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t+2t'-2 = 0 \\ -6t'-2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t+2t'-2 = 0 \\ t = -3t' \end{cases} \quad \begin{cases} t = +\frac{6}{7} \\ t' = -\frac{2}{7} \end{cases}$

$-9t'+2t' = 2$

$t' = -2/7$

$\bar{w} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right)$

$P^*\left(\frac{13}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

$Q^*\left(\frac{12}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$

La distanza tra r ed s è $|\bar{w}| = \sqrt{\frac{1}{49}+\frac{9}{49}+\frac{4}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

La retta P^*Q^* $\begin{cases} x = 13/7 + 1/7\, t \\ y = 6/7 - 3/7\, t \\ z = -6/7 - 2/7\, t \end{cases}$

OPPURE

La retta cercata deve essere $\perp$ r e s; un vettore $\bar{w}$ ad esso // deve essere $\perp \bar{u}, \bar{v}$

$\bar{w} = \bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$

La retta cercata si può pensare come intersezione di 2 piani α e β appartenenti a fasci di assi r ed s ed individuati dalla condizione di essere // a w

ANGOLI

① ANGOLI TRA 2 RETTE

Def: Si dice che due rette r ed s formano un angolo φ se φ è l'angolo tra un vettore $\bar{u} // r$ e un vettore $\bar{v} // s$

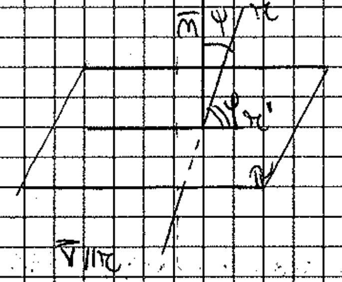
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}}$$

② ANGOLO TRA 2 PIANI

Def: Si dice che π e π' formano angolo φ, se φ è un angolo tra una retta $r \perp \pi$ e una retta $s \perp \pi'$. Cioè se φ è un angolo tra un vettore $\bar{n} \perp \pi$ e un vettore $\bar{n}' \perp \pi'$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}\cdot\bar{n}'}{|\bar{n}|\cdot|\bar{n}'|}$$

③ ANGOLO TRA RETTA E PIANO



Def: L'angolo acuto tra r ed r', proiezione di r su π si dice angolo tra r e π

φ è il complementare dell'angolo ψ tra r ed una retta $\perp$ piano

$$\cos\psi = \frac{|\bar{v}\cdot\bar{n}|}{|\bar{v}|\cdot|\bar{n}|} \implies \sin\varphi = \frac{|\bar{v}\cdot\bar{n}|}{|\bar{v}|\cdot|\bar{n}|}$$

SPAZI VETTORIALI

Def: si dice spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ un insieme $\bar{V}$ in cui sono definite due operazioni dette "somma" e "prodotto per elementi di $\mathbb{K}$" (prodotto per scalare) che soddisfano le seguenti proprietà:

① SOMMA

È un'operazione che ad ogni coppia u, v di elementi di $\bar{V}$ fa corrispondere un elemento di $\bar{V}$, indicato con $u+v$ per cui valgono le proprietà:

- $\forall u, v \in \bar{V}$: $u+v = v+u$ commutativa
- $\forall u, v, w \in \bar{V}$: $(u+v)+w = u+(v+w)$ associativa
- Esiste in $\bar{V}$ un elemento v_0 per cui $v_0 + u = u + v_0 = u$ $\forall u \in \bar{V}$
- $\forall u \in \bar{V}$ esiste un elemento $u' \in \bar{V}$: $u+u' = u'+u = v_0$

② PRODOTTO PER SCALARE

È un operazione che ad ogni coppia k, u dove $k \in \mathbb{K}$, $u \in \bar{V}$ fa corrispondere un elemento di $\bar{V}$, indicato con ku, per cui valgono le proprietà

- $\forall k, h \in \mathbb{K}$, $\forall u \in \bar{V}$ $k(hu) = (kh)u$
- $\forall u \in \bar{V}$, $1u = u$

- $\forall k,h \in \mathbb{K}, \forall u \in V: (k+h)u = ku + hu$ distributivo
- $\forall k \in \mathbb{K}\ \forall u, v \in V: k(u+v) = ku + kv$ "

OSSERVAZIONI

- Nel terzo punto non è richiesto che l'elemento v_0 sia uno solo. In realtà si dimostra che un elemento v_0 che abbia la proprietà richiesta è unico

Dim $\left[\text{se ce ne fossero 2 } v_0 \text{ e } v_0' \text{ si avrebbe: } v_0 + v_0' = \begin{cases} v_0 \\ v_0' \end{cases} \rightarrow v_0 = v_0'\right]$

v_0 si dice elemento neutro rispetto alla somma e si indica con 0

- Nel quarto punto il vettore u' con la proprietà $u + u' = u' + u = 0$ è unico

Dim: supponiamo che esista un vettore u tale che esistono due vettori u' e u'' con la proprietà richiesta:

$$u + u' = u' + u = 0$$
$$u + u'' = u'' + u = 0$$

calcoliamo la somma $u' + u + u'' = (u' + u) + u'' = 0 + u'' = u''$

$= (u + u'') + u' = u' + 0 = u'$

per ogni u, è unico vettore u' per cui $u + u' = u' + u = 0$ si dice

OPPOSTO di u e si indica con $-u$

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI (SIMBOLI)

- $\mathbb{K}^{m,n}$ indica lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a elementi in $\mathbb{K}$ con le usuali operazioni di somma e prodotto per elementi di $\mathbb{K}$
- $\mathbb{K}[x]$ indica lo spazio vettoriale dei polinomi in x con coefficienti in $\mathbb{K}$
- $F(I)$ (I = intervallo reale $I \subseteq \mathbb{R}$) indica lo spazio delle funzioni reali di variabile reale, definite su I
- $C^n(a,b)$ indica lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili n volte con derivate continue nell'intervallo $I = (a,b)$

↳ nel 3° e 4° punto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la somma e il prodotto per i numeri reali sono le operazioni usuali

- $\mathbb{K}^n$ indica lo spazio vettoriale delle successioni ordinate di n elementi di $\mathbb{K}$ con la somma e il prodotto per numeri fatti "elemento × elemento"

$\mathbb{R}^3$ è lo spazio vettoriale i cui elementi sono le terne ordinate di numeri reali con le operazioni

$u = (x, y, z)$ $\quad u + v = (x + x', y + y', z + z')$

$v = (x', y', z')$ $\quad ku = (kx, ky, kz)$

↳ $\mathbb{R}^3$ si può identificare con $\mathbb{R}^{1,3}$ oppure $\mathbb{R}^{3,1}$: (x, y, z) si può identificare con $(x\ y\ z)$ o $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

SOTTOSPAZI

Def: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme W di V si dice **SOTTOSPAZIO** di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V e ristrette a W

- W è un sottospazio di V se e solo se:
  1. $0 \in W$
  2. $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$
  3. $\forall k \in \mathbb{K} \quad \forall w \in W, \ kw \in W$

- $V = \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x,y,1), x,y \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio
  $W = \{(x,y,0)\}$ è un sottospazio

- Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ valgono le seguenti proprietà:
  i) $\forall v \in V: \ 0\bar{v} = \bar{0}$
  ii) $\forall a \in \mathbb{K} \quad a\bar{0} = \bar{0}$
  iii) Se $av = \bar{0}$, allora $a = 0$ oppure $v = \bar{0}$ $\qquad \bar{0} = 0_V$ vettore nullo

Dim:

i) $(0+0)\bar{v} = \begin{cases} 0\bar{v} \\ 0\bar{v} + 0\bar{v} \end{cases}$ $\quad 0\bar{v} = 0\bar{v} + 0\bar{v}$ sia $-(0\bar{v})$ è opposto di $0\bar{v}$

$$0\bar{v} + (-0\bar{v}) = [0\bar{v} + 0\bar{v}] + (-0\bar{v})$$
$$\bar{0} = 0\bar{v} + [0\bar{v} + (-0\bar{v})]$$
$$\bar{0} = 0\bar{v} + \bar{0}$$
$$\boxed{\bar{0} = 0\bar{v}}$$

ii) $a(\bar{0} + \bar{0}) = a\bar{0} + a\bar{0} \dots$ come prima

iii) $a\bar{v} = \bar{0}$ Proviamo che se $a \neq 0 \Rightarrow \bar{v} = \bar{0}$

moltiplichiamo per $\frac{1}{a}$: $\quad \frac{1}{a}(a\bar{v}) = \frac{1}{a}\bar{0}$

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\bar{v} = \bar{0} \quad \text{per la (ii)}$$
$$1\bar{v} = \bar{0}$$
$$\bar{v} = \bar{0}$$

- V $\mathbb{K}$ spazio vettoriale
  $\forall v \in V, (-1)v = -v$ opposto di v

Dim: $(-1)v + v = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = [(-1)+1]\bar{v} = 0\bar{v} = 0$

- ~~Sottospazi di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V~~
  ~~Def: Un sottoinsieme W di V si dice sottospazio di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V e ristrette ai vettori di W~~

- ~~$W \subseteq V$ è un sotto~~

SOTTOSPAZI BANALI (IMPROPRI)

- $W = \{0_V\}$ sottospazio $= 0$
- $W = V$ sottospazio $=$ tutto

SOTTOSPAZI $\mathcal{L}(v_1, \dots v_r)$

Consideriamo in V r vettori (distinti o no) $v_1, v_2 \dots v_r$ e costruiamo le loro combinazioni lineari, cioè i vettori del tipo $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_r v_r$ al variare di a_1, a_2, a_r in K

L'insieme W di questi vettori si indica con $\mathcal{L}(v_1 \dots v_r)$

- $\mathcal{L}(v_1 \dots v_r)$ è un sottospazio di V

Dim ($r=2$)

① $0_V \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ $\quad \mathcal{L}(v_1, v_2) = \{v \in V, v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

sì! per $a_1 = a_2 = 0$

② $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 v_1 + a_2 v_2 \\ w' &= a_1' v_1 + a_2' v_2 \end{aligned}\right\} w + w' = a_1 v_1 + a_1' v_1 + a_2 v_2 + a_2' v_2 =$$
$$= (a_1 + a_1') v_1 + (a_2 + a_2') v_2 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$$

③ $k \in K$, $v \in \mathcal{L}(v_1, v_2) \Rightarrow kv \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \qquad kv = k(a_1 v_1 + a_2 v_2) =$
$$= (ka_1) v_1 + (ka_2) v_2 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$$

LINGUAGGIO: se $W = \mathcal{L}(v_1, v_2 \dots v_r)$, si dice che W è GENERATO da $v_1 \dots v_r$ oppure $v_1 \dots v_r$ GENERANO W

- L'ordine di $v_1 \dots v_r$ non ha importanza

- Caso di V spazio vettoriale reale dei vettori geometrici dello spazio applicati in un punto fisso O

Elenco dei sottospazi W di V

1) $W = \{\bar{0}\}$

2) Se in W c'è un vettore $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$, ci devono essere anche tutti i vettori del tipo $a_1 \bar{v}_1$, $\forall a_1$

2.1) $W = \{a_1 \bar{v}_1, a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(v_1)$ retta per O

2.2) $W \neq \{a_1 v_1\}$, cioè in W c'è un vettore $v_2 \neq a_1 v_1$, $\forall a_1$ (cioè v_2 non parallelo a v_1)

3) Nel caso (2.2) in W ci devono essere tutti i vettori $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$

3.1) $W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ $\quad W \leftrightarrow$ piano per O

3.2) Esiste un v_3 in W che non è combinazione lineare di v_1, v_2, cioè non complanare con v_1, v_2. Allora ci devono essere tutti i vettori del tipo $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$. Poiché tutti i vettori di V sono combinazione lineare di 3 vettori non complanari

$$W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \equiv V$$

• Altro caso: $V=\mathbb{K}^n=\{(x_1,x_2 \dots x_n),\ x_i \in \mathbb{K}\}$

consideriamo gli n vettori $e_i=(0,0 \dots 1 \dots 0)$ 1 in i-esima posizione

$n=3$ $e_1=(1\,0\,0)$ $e_2=(0\,1\,0)$ $e_3=(0\,0\,1)$

Osserviamo che $v=(x_1,x_2 \dots x_n)=(x_1,0,\dots 0)+(0,x_2, \dots 0)+\dots+(0 \dots 0\, x_n)=$

$=x_1(1,0,0 \dots 0)+x_2(0,1,0 \dots 0)+\dots+x_n(0 \dots 0,1)$

$v=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n \Rightarrow$

Ogni vettore v di $\mathbb{K}^n$ è una combinazione lineare di $e_1\, e_2 \dots e_n$, ovvero

$\mathbb{K}^n=\mathcal{L}(e_1 \dots e_n)$

SPAZI VETTORIALI ASSOCIATI AD UNA MATRICE

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Le righe R_i della matrice si possono pensare come vettori di $\mathbb{K}^n$

Il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato da $R_1 \dots R_m$ si dice spazio delle righe di A (simbolo $\mathcal{R}(A)$)

Le colonne C_i di A si possono pensare come vettori di $\mathbb{K}^m$. Il sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato da $C_1 \dots C_n$ si dice SPAZIO DELLE COLONNE DI A ($\mathcal{C}(A)$)

es $\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lo spazio delle righe è generato da $v_1=(2,3,-1)$ e $v_2=(5,1,1)$

$\mathcal{R}(A)=\mathcal{L}(v_1,v_2)=\mathcal{L}((2,3,-1),(5,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$

Lo spazio delle colonne $\mathcal{C}(A)$ è generato da $u_1=(2,5)$ $u_2=(3,1)$, $u_3=(-1,1)$

$\mathcal{C}(A)=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)=\mathcal{L}((2,5),(3,1),(-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$

Un altro sottospazio associabile ad A, che indicheremo con $S(A)$ è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo $AX=0$

Verifichiamo che $S(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$

- Il vettore nullo $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione
- Siano $X_1=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ e $X_2=\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ soluzioni del sistema; allora anche X_1+X_2 lo è.

$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=0+0=0$

inoltre se X_1 è soluzione, anche kX_1 è soluzione, $\forall k \in \mathbb{K}$

$A(kX)=k(AX)=k0=0$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 7x+4y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z=\frac{13}{7}y \\ x=-\frac{4}{7}y \end{cases}$

soluzioni $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7}t \\ t \\ \frac{13}{7}t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ 1 \\ \frac{13}{7} \end{pmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$

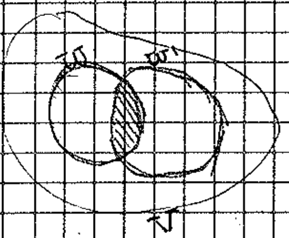
$S(A)=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ 1 \\ \frac{13}{7} \end{pmatrix}\right)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-3x_2-3x_4\\ x_3=-2x_2-3x_4\end{cases}$$

soluzioni: $$\begin{pmatrix}-3t-3s\\ t\\ -2t-3s\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3t\\ t\\ -2t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3s\\ 0\\ -3s\\ s\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$$
$t,s\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow S(A)=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

INTERSEZIONE E SOMMA DI SOTTOSPAZI DI UNO SPAZIO VETTORIALE $\overline{V}$



$\overline{W}, \overline{W}'$ sottospazi

Proposizione: l'intersezione $\overline{W}=\overline{W}_1\cap\overline{W}_2$ di sottospazi è un sottospazio

Dim: ① $\overline{0}\in\overline{W}_1\cap\overline{W}_2$ perché $\overline{0}\in$ qualsiasi sottospazio

② $u,w\in\overline{W}\Rightarrow u+w\in\overline{W}$

$u,v\in\overline{W}_1\Rightarrow u+v\in\overline{W}_1$; analogamente $u+v\in\overline{W}_2\Rightarrow u+v\in\overline{W}_1\cap\overline{W}_2$

③ $a\in K$, $u\in\overline{W}=\overline{W}_1+\overline{W}_2\Rightarrow au\in\overline{W}$

$au\in\overline{W}_1$ perché $u\in\overline{W}_1$ che è un sottospazio; analogamente per $\overline{W}_2$
$\Rightarrow au\in\overline{W}_1\cap\overline{W}_2$

Esempi

① $\overline{V}$ sia $\mathbb{R}$ spazio vettoriale dei vettori geometrici applicati in un punto O dello spazio
$\rightarrow$ semirette non sono sottospazi (non c'è lo zero)

i) $\overline{W}_1$ sia una retta e $\overline{W}_2$ un piano (per O)

$$\overline{W}\cap\overline{W}_2=\begin{cases}\{0\} & \text{retta e piano incidenti (nell'origine)}\\ \overline{W}_1 & \text{retta appartiene al piano}\end{cases}$$

ii) $\overline{W}_1$ e $\overline{W}_2$ sono due piani distinti (per O)

$\overline{W}_1\cap\overline{W}_2=$ retta per O che è un sottospazio

② $\overline{V}=\mathbb{K}^n$

$\overline{W}_1=S(A_1)=$ spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A_1X=0$
dove $A_1\in\mathbb{K}^{m,n}$

$\overline{W}_2=S(A_2)=$ spazio delle soluzioni di $A_2X=0$ con $A_2\in\mathbb{K}^{m_2,n}$

$\overline{W}_1\cap\overline{W}_2$ è lo spazio delle soluzioni del sistema $AX=0$ che si ottiene considerando le equazioni dei due sistemi

OSSERVAZIONE: L'operazione di intersezione si può estendere a 3, 4, ... r sottospazi
$\overline{W}_1\cap\overline{W}_2\cap\ldots\cap\overline{W}_r$ è ancora un sottospazio

UNIONE DI SOTTOSPAZI $\quad\overline{W}_1, \overline{W}_2$ sottospazi

In generale $\overline{W}_1\cup\overline{W}_2$ non è un sottospazio. Si dimostra che $\overline{W}_1\cup\overline{W}_2$ è un sottospazio solo nel caso in cui uno dei due sottospazi è incluso nell'altro

SOMMA DI SOTTOSPAZI $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$

Def: Dati due sottospazi $\overline{W}_1$ e $\overline{W}_2$ si dice SOMMA di $\overline{W}_1$ e $\overline{W}_2$ il sottoinsieme di $\overline{V}$ formato dai vettori che si ottengono sommando un vettore di $\overline{W}_1$ con uno di $\overline{W}_2$ in tutti i modi possibile

$$\overline{W}_1 + \overline{W}_2 = \{ v \in \overline{V},\ v = w_1 + w_2 \text{ con } w_1 \in \overline{W}_1,\ w_2 \in \overline{W}_2 \}$$

Esempio: $\overline{V}$ spazio vettoriale geometrico, $W_1\ W_2$ due rette distinte per O

$W_1 + W_2$ contiene tutti e soli i vettori del piano (per O) che contiene le due rette, che è un sottospazio

Proposizione: $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ è il più piccolo sottospazio di $\overline{V}$ contenente sia $\overline{W}_1$ che $\overline{W}_2$ cioè è il più piccolo sottospazio che contiene $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2$

Esempio: $\overline{V}$ $\mathbb{K}$ spazio vettoriale $v_1 \dots v_r$, $u_1 \dots u_s$ vettori di $\overline{V}$

$\overline{W}_1 = \mathcal{L}(v_1 \dots v_r) = \{ v \in \overline{V},\ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots + a_r v_r \text{ al variare di } a_1 \dots a_r \text{ in } \mathbb{K} \}$

$\overline{W}_2 = \mathcal{L}(u_1 \dots u_s) = \{ u \in \overline{V},\ u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_s u_s, \text{ al variare di } b_1 \dots b_s \text{ in } \mathbb{K} \}$

$\overline{W}_1 + \overline{W}_2 = \{ v + u,\ v \in \overline{W}_1 \text{ e } u \in \overline{W}_2 \} = \{ a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_r v_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s \} =$
$\mathcal{L}(v_1, \dots v_r, u_1 \dots u_s)$

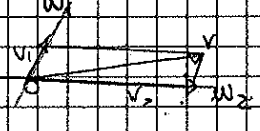
SOMMA DIRETTA $\overline{W}_1 \oplus \overline{W}_2$

Def: La somma di due sottospazi $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ si dice DIRETTA se ogni vettore di $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ si ottiene in un solo modo come somma di vettore di $\overline{W}_1$ con uno di $\overline{W}_2$

Esempi: ① $\overline{V}$ spazio dei vettori geometrici. $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ due rette per il punto di applicazione

$\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ è il piano contenente le rette

in questo caso la somma $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ è diretta



Ogni vettore $\overline{v}$ del piano si può decomporre come somma di due vettori $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$, $\overline{v}_1 \in \overline{W}_1$, $\overline{v}_2 \in \overline{W}_2$ in modo unico

- $\overline{V} = \mathbb{R}^3$

Consideriamo i sottoinsieme $\overline{W}_1 = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$, $\overline{W}_2 = \{(0, 0, z)\ z \in \mathbb{R}\}$

① $\overline{W}_1$ e $\overline{W}_2$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$

② $\overline{W}_1 + \overline{W}_2 = \mathbb{R}^3$ $\quad (\forall (x, y, z) : (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z))$

③ $\overline{W}_1 + \overline{W}_2$ è diretto (x, y, z) è $\forall x, y, z$ la somma $(x, y, 0) + (0, 0, z)$ e i due addendi sono univocamente determinati

$$(3, 4, -1) = (3, 4, 0) + (0, 0, -1)$$

- $\overline{V} = \mathbb{R}^3$ $\quad \overline{W}_1 = \{(x, y, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad \overline{W}_2' = \{(0, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}$

$\overline{W}_1 + \overline{W}_2' \supseteq \overline{W}_1 + \overline{W}_2$ $\quad \overline{W}_1 + \overline{W}_2' = \mathbb{R}^3$ ma la somma non è diretta

$$(1,2,3) = \begin{cases} (1,2,0) + (0,0,3) \\ (1,1,0) + (0,1,3) \end{cases}$$

<u>PROPOSIZIONE</u>: $\overline{W_1 + W_2}$ è diretto $\Longleftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$

<u>Dim</u>: ① Diretta: dimostrazione per assurdo

se $\exists u \in W_1 \cap W_2$, $u \neq \bar{0}$ allora $0 + u = u + 0$ ⇝ assurdo perché $W_1 + W_2$ è diretto

② Inverso: per assurdo

sia $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ per qualche scelta di w_1, w_2, w_1', w_2'

$\underbrace{w_1 - w_1'}_{\in W_1} = \underbrace{w_2' - w_2}_{\in W_2} \Rightarrow w_1 - w_1' = \bar{0}$ $\quad w_1 = w_1'$

$w_2' - w_2 = 0 \quad w_2 = w_2'$

GENERATORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

È dato uno spazio vettoriale V su K, i vettori $v_1, \dots v_r$ si dicono <u>GENERATORI</u> di V se ogni vettore v di V si può esprimere come loro combinazione lineare, cioè esistono $a_1, \dots a_r \in K$ per cui $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$ e quindi se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots v_r)$

<u>PROPOSIZIONE</u>: $\mathcal{L}(v_1 \dots v_{r-1}, \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i v_i) = \mathcal{L}(v_1, \dots v_{r-1})$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Lo spazio delle righe di A è il s.s. di $\mathbb{R}^3$ generato da

$v_1 = (1,2,3)$ $\quad v_2 = (-1,1,0)$ $\quad v_3 = (2,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 - 3v_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} v_3 \\ v_2 \\ v_1 - 3v_3 - 5v_2 = 0 \end{matrix}$$

$$R(A) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(\cancel{3v_3 + 5v_2}, v_2, v_3) = \mathcal{L}(v_2, v_3)$$

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI / INDIPENDENTI

V K-spazio vettoriale: $v_1 \dots v_r \in V$

<u>Def</u>: I vettori $v_1 \dots v_r$ si dicono <u>linearmente dipendenti</u> (l.d.) se esiste una combinazione lineare di $v_1 \dots v_r$ con coefficiente $a_1 \dots a_r$ non tutti nulli per cui

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_r v_r = \bar{0}$$

<u>Def</u>: I vettori $v_1 \dots v_r$ si dicono <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica combinazione lineare $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$ che dà il vettore nullo è quella coi coefficienti $a_1 \dots a_r$ tutti zero

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = \bar{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$

<u>Esempi</u>

ⓐ $V = K^n$ i vettori $e_1, e_2 \dots e_n$ sono linearmente indipendenti $\quad (e_i = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0))$

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = \bar{0}$

$a_1(1, 0 \dots, 0) + a_2(0, 1, 0 \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0 \dots 1) = (0, 0 \dots 0)$

$(a_1, a_2 \ldots a_n) = (0, 0 \ldots 0) \Rightarrow a_1 = 0 \;\; a_2 = 0 \ldots a_n = 0$

(2) V = spazio dei vettori geometrici

4 vettori di V sono sempre linearmente dipendenti

v_1, v_2, v_3, v_4

i) $v_1 = \bar{0} \Rightarrow 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 = \bar{0}$

$a_1 = 1 \;\; a_2 = 0 \;\; a_3 = 0 \;\; a_4 = 0$ vettori linearmente dipendenti l.d.

ii) $v_1 \neq \bar{0}$

- $v_2 \parallel v_1$: $\exists k$, $v_2 = kv_1 \Rightarrow (-k)v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 = \bar{0}$ l.d.
- $v_2 \not\parallel v_1$
  - v_3 è complanare con $v_1, v_2 \Rightarrow v_3$ è comb. lineare di v_1 e v_2 $\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$: $v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$

    $(-k_1)v_1 + (-k_2)v_2 + 1v_3 + 0v_4 = \bar{0}$ l.d.
  - v_3 non è complanare con $v_1, v_2 \rightarrow$ tutti i vettori dello spazio sono comb. lineare : $\exists k_1, k_2, k_3$ per cui $v_4 = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$

    $(-k_1)v_1 + (-k_2)v_2 + (-k_3)v_3 + 1v_4 = \bar{0}$ l.d.

Osservazione: se si prendono r vettori con $r \geq 4$ questi risultano sempre linearmente dipendenti:

$$(-k_1)v_1 + (-k_2)v_2 + (-k_3)v_3 + 1v_4 + 0v_5 + 0v_6 + \ldots = \bar{0}$$

PROPOSIZIONE: Sia V un K spazio vettoriale $v_1, v_2 \ldots v_r$ vettori di V. Allora i vettori $v_1 \ldots v_r$ sono l.d. se:

- $v_1 = \bar{0}$ oppure
- $v_2 = kv_1$ oppure
- $v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$

Riassumendo i vettori sono linearmente dipendenti se $v_1 = \bar{0}$ oppure se esiste un vettore v_i che è combinazione lineare dei precedenti $v_1, v_2 \ldots v_{i-1}$ (l'ordine dei vettori può essere scelto a piacere)

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, 2, 1)$
$v_2 = (0, 3, 3)$
$v_3 = (4, 5, 1)$

v_1 v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti o l. i?

Esaminiamo i vettori nell'ordine v_2, v_1, v_3

$(0, 3, 3) \neq (0, 0, 0)$

$(1, 2, 1)$ è un multiplo di $(0, 3, 3)$? NO

$(4, 5, 1)$ è una comb. lineare di $(0, 3, 3)$ e $(1, 2, 1)$

Esistono 2 scalari k_1 k_2 per cui $(4, 5, 1) = k_1(0, 3, 3) + k_2(1, 2, 1)$?

$$\begin{cases} k_2 = 4 \\ 3k_1 + 2k_2 = 5 \\ 3k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = 4 \\ 3k_1 = -3 \\ 3k_1 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = 4 \\ k_1 = -1 \end{cases} \qquad (4, 5, 1) = -1(0, 3, 3) + 4(1, 2, 1)$$

v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti

Esempi:

- Sia $A \in K^{m,n}$ una matrice ridotta per righe

Le righe non nulle di A sono linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le righe sono vettori di $\mathbb{R}^4$. Esaminandole nell'ordine R_4, R_3, R_2, R_1

- R_4 non è la riga nulla
- R_3 non è un multiplo di R_4
- R_2 non è una combinazione di R_3 e R_4 (il 5 ha due zeri sotto)
- R_1 " " " " di R_2, R_3, R_4 (il 3 ha tre zeri sotto)

- $V = K[x]$

Siano $v_1, v_2 \dots v_r$ polinomi in X di gradi diversi. I vettori $v_1, v_2 \dots v_r$ sono linearmente indipendenti

supponiamo di aver ordinato i polinomi per gradi crescenti

↳ nessuno dei polinomi $v_2 \dots v_r$ può essere una comb. lineare dei precedenti

$1, x, x^2, x^3 \dots x^{r-1}$ sono polinomi linearmente indipendenti

- $V = C^\infty(\mathbb{R})$

Dimostriamo che le funzioni e^{ax}, e^{ax}, e^{bx} sono linearmente indipendenti

e^{0x}, e^{x}, e^{2x} sono l.i.

$a_1 1 + a_2 e^{x} + a_3 e^{2x} = 0_V$ $\qquad$ 0_V è la funzione identicamente nulla

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{matrix} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot e + a_3 \cdot e^2 = 0 \\ a_1 + \frac{a_2}{e} + \frac{a_3}{e^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Sistema omogeneo nelle incognite a_1, a_2, a_3 con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ 1 & e^{-1} & e^{-2} \end{pmatrix}$$

perché il sistema ammetta solo la soluzione nulla, e $rk(A) = 3$ ovvero $\det A \neq 0$

$$\det A = (e^{-1} - e) - (e^{-2} - e^2) + (e^{-1} - e) =$$
$$e^{-1} - e - e^{-2} + e^2 + e^{-1} - e = e^2 - 2e^1 + 2e^{-1} - e^{-2} \neq 0$$

PROPOSIZIONE: V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $v_1, \dots v_r$ vettori linearmente indipendenti. Allora se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_r v_r$ si ha $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_r = \beta_r$

Dim: La condizione si può riscrivere nella forma:

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_r - \beta_r) v_r = 0_V$$

Poiché $v_1, \dots v_r$ sono l.i.

$$(\alpha_1 - \beta_1) = 0$$
$$(\alpha_2 - \beta_2) = 0$$
$$\vdots$$
$$(\alpha_r - \beta_r) = 0$$

BASI PER UNO SPAZIO VETTORIALE - COMPONENTI DI UN VETTORE

Def: l'insieme ordinato $(v_1, v_2 \dots v_r)$ di vettori di V si dice **BASE** per V se $v_1 \dots v_r$ generano V e sono l. indipendenti

PROPOSIZIONE: se $(v_1 \dots v_r)$ è una base per V, ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come comb. lineare di $v_1 \dots v_r$, cioè esistono e sono univocamente determinati r scalari $x_1, x_2 \dots x_r$ per cui

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r$$

Def: i numeri $x_1 \dots x_r$ si dicono COMPONENTI DI v rispetto alla base $(v_1, v_2 \dots v_r)$

Si dimostrano le seguenti PROPRIETÀ:

1) Se v ha componenti $x_1 \dots x_r$ e μ ha componenti $y_1 \dots y_r$ allora $v+\mu$ ha componenti $x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_r+y_r$
2) Per ogni scalare K, Kv ha componenti $Kx_1, Kx_2 \dots Kx_r$

Esempio:

① V = spazio dei vettori geometrici (nello spazio)
una base è data da 3 vettori non complanari

② $V = \mathbb{K}^m$ una base è data dai vettori e_1, e_2, e_m che generano $\mathbb{K}^m$ e sono l. i.

- se $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m =$
$= (x_1, x_2 \dots x_m)$ cioè le componenti di v rispetto alla base $(e_1, e_2 \dots e_m)$ sono proprio i numeri che danno v, nell'ordine.

Def: $(e_1, e_2 \dots e_m)$ si dice BASE CANONICA per $\mathbb{K}^m$

③ $V = \mathbb{R}[x]$

V non possiede basi, perché se si prende un insieme finito di polinomi, con questi non si possono generare tutti i polinomi di $\mathbb{R}[x]$: si dice che V non è FINITAMENTE GENERATO

Se si considera il sottospazio $W = \mathbb{R}_m[x]$ dei polinomi di grado $\leq m$ allora $(1, x, x^2, \dots, x^m)$ formano una base per W

④ $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$ non ha basi

Esempi in $V = C^1(\mathbb{R})$, $V = C^2(\mathbb{R})$

① In $C^1(\mathbb{R})$ consideriamo le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del 1° ordine

$$y' + A(x)y = 0 \qquad y = y(x) \in C^1(\mathbb{R}) \qquad A(x) \text{ continua in } \mathbb{R}$$

$$y(x) = C e^{-\int A(x)dx}$$

Questo vuol dire: le soluzioni dell'eq. differenziale formano un sottospazio W di $C^1(\mathbb{R})$ generato da $e^{-\int A(x)dx}$ $\quad W = \mathcal{L}(e^{-\int A(x)dx})$

② Supponiamo di avere un'eq. differenziale del 2° ordine lineare omogenea, del tipo:

$$y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0 \qquad A_1(x), A_2(x) \text{ continue su } \mathbb{R}$$

si dimostra che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio che si può generare con due soluzioni linearmente indipendenti

$$S'' = \mathcal{L}(y_1(x), y_2(x)) \qquad y_1(x), y_2(x) \text{ soluzioni particolari e l.i.}$$

- $y'' - 3y' + 2y = 0$

  due soluzioni sono $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$

  Le soluzioni dell'equazione sono tutte le funzioni $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ $\quad C_1, C_2$ costanti arbitrarie

  (e^x, e^{2x}) formano una BASE per lo spazio delle soluzioni

PROPOSIZIONE: Se uno spazio vettoriale V ha una base formata da n vettori, tutte le basi di V sono formate da n vettori

Def: il numero di elementi di una base per V si dice DIMENSIONE di V e si indica con $\dim V$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ perché $\mathbb{R}^4$ ammette come base $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$

$\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$ una base è $(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$

Def: Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esiste un numero FINITO di suoi vettori $v_1, v_2 \dots v_m$ per cui $V = \mathcal{L}(v_1, v_2 \dots v_m)$ cioè per ogni vettore $v \in V$, esistono m scalari $a_1, a_2 \dots a_m \in \mathbb{R}$ per cui $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m$, cioè ogni vettore $v \in V$ si può esprimere come combinazione lineare di $v_1 \dots v_m$

PROPOSIZIONE: Ogni spazio V finitamente generato ammette una base. Un metodo per trovare la base è il METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

Dim: siano $v_1, v_2 \dots v_m$ dei generatori per V. Si esaminano $v_1 \dots v_m$ e si scartano se ci sono vettori uguali al vettore nullo e gli eventuali vettori comb. lineare dei precedenti

$v_1, v_2 \dots v_m \qquad v = \mathcal{L}(v_1 \dots v_m)$

I vettori rimasti sono ancora dei generatori per V e sono linearm. indipendenti e quindi formano una base per V

→ METODO DEL COMPLETAMENTO DI UN INSIEME DI VETTORI L.I. AD UNA BASE

PROPOSIZIONE: Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Se $w_1 \dots w_s$ sono vettori di V l.i. allora aggiungendo eventualmente altri vettori si ottiene una base per V

Dim: si prende un insieme $v_1, v_2 \dots v_n$ di generatori per V

(i vettori $w_1 \dots w_s$ sono lin. comb. lineare) Consideriamo l'insieme formato dai vettori $w_1 \dots w_s$ seguiti da $v_1 \dots v_n$

$V = \mathcal{L}(v_1 \dots v_n) = \mathcal{L}(w_1 \dots w_s, v_1 \dots v_n)$

Applichiamo il metodo degli scarti successivi: nessuno dei w viene scartato (essendo l. i. nessuno è comb. l. dei precedenti). Gli scarti avvengono solo tra i vettori $v_1 \dots v_n$

- Consideriamo in $V = \mathbb{R}^4$ i quattro vettori $v_1 = (1,1,2,0)$ $v_2 = (3,-1,2,0)$ $v_3 = (-1,1,0,0)$ $v_4 = (2,1,3,0)$

- I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono dei generatori per tutto V (cioè $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) = V$)?
  NO! perché l'ultima posizione è sempre zero (i vettori di $\mathbb{R}^4$ con il 4° elemento $\neq 0$ non sono c.l.)
- vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono l. i.? NO!

  $v_1 \neq (0,0,0,0)$

  v_2 non è un multiplo di v_1

  v_3 è c. l. di v_1 e v_2 $\rightarrow (-1,1,0,0) = a(1,1,2,0) + b(3,-1,2,0)$

$$\begin{cases} a+3b=-1 \\ a-b=1 \\ 2a+2b=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3b-1 \\ a=b+1 \\ a=-b \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

v_1, v_2, v_3 e v_4 sono l. d.

- Troviamo una base per $\mathbb{R}^4$ contenente v_1, v_2 (l. i.)

  METODO DI COMPLETAMENTO: Aggiungiamo a v_1, v_2 un insieme di generatori e applichiamo il

  $v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4$

  metodo degli scarti: $(1,1,2,0), (3,-1,2,0), \overset{\times}{(1,\cancel{0},0,0)}, \overset{\times}{(0,1,0,0)}, \overset{\times}{(0,0,1,0)}, \overset{\times}{(0,0,0,1)}$

  $(0,1,0,0) = a(1,1,2,0) + b(3,-1,2,0) + c(0,0,0,1)$ NO! $\rightarrow$ lo conservato ~~bisogna tenerlo~~

Def: V $\mathbb{K}$ spazio vettoriale

$(v_1 \dots v_m)$ si dice che formano una base per V se

- $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$
- $v_1 \dots v_m$ sono linearmente indipendenti

Osservazione: se si cambia l'ordine dei vettori, le proprietà continuano a valere, ma si dice che si ha una base diversa

Proposizione: se $(v_1, \dots, v_m)$ è una base per V, ogni vettore $v \in V$ si esprime in modo unico come combinazione lineare di $v_1 \dots v_m$

Si ha quindi una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA tra V e $\mathbb{K}^m$

Se $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$, $(a_1 \dots a_m)$ si dicono COMPONENTI DI V rispetto alla base $(v_1 \dots v_m)$

LEMMA DI STEINITZ

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\{x_1 \dots x_n\}, \{y_1 \dots y_m\}$ due insiemi di V con le seguenti pro

- $\{x_1 \dots x_n\}$ generano V
- $\{y_1 \dots y_m\}$ è formato da vettori linearmente indipendenti (= insieme LIBERO di vettori)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m \leq n}$$

Altre versioni: · Se V è generato da n vettori, $v_1 \dots v_m$ con $m > n$ $\Rightarrow$ sono e.d.

· se in V si trovano m vettori e.i., allora per poter generare V sono necessari almeno m vettori

Corollario: siano $(v_1 \dots v_p)$ e $(w_1 \dots w_q)$ due basi per V, allora $p = q$

Dim: $\left.\begin{array}{l} v_1 \dots v_p \text{ generano } V \\ w_1 \dots w_q \text{ sono e.i.} \end{array}\right\} \Rightarrow q \leq p$

$\left.\begin{array}{l} v_1 \dots v_p \text{ sono e.i.} \\ w_1 \dots w_q \text{ generano } V \end{array}\right\} \Rightarrow p \leq q$

$\Rightarrow p = q$

Def: il numero dei componenti di una BASE per V si dice DIMENSIONE di V e si scrive $\dim V = n$

Per calcolare $\dim V$ si cerca una base qualsiasi e se ne contano i componenti

Esempi:

- V = spazio vettoriale dei vettori applicati su una retta r. Una base è data da un vettore $\bar{v} = \vec{OP}$ su r, $\bar{v} \neq \bar{0} \Rightarrow \dim V = 1$
- V = spazio vett. di un piano π, una base è data da una qualsiasi coppia di vettori non paralleli: $\dim V = 2$
- V = spazio vett. dello spazio: una base è data da una terna di vettori non complanari; $\dim V = 3$
- $V = \mathbb{K}^n$: una base è data da $(e_1 \dots e_n)$ (base CANONICA): $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $V = \mathbb{K}^{m,n}$: una base è data dalle $m \times n$ matrici che hanno un elemento uguale a 1 e tutti gli altri $= 0$. $\dim \mathbb{K}^{m,n} = m \cdot n$
- $V = \mathbb{K}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x]$, grado di $p(x) \leq n\}$
  una base è $(1, x, x^2 \dots x^n)$ $\dim \mathbb{K}_n[x] = n+1$

Convenzione:

Se $V = \{0\}$, allora si dice che $\dim V = 0$ e una base è data dall'insieme vuoto

Proposizione: sia V uno spazio vettoriale con $\dim V = n$. valgono le proprietà:

- se $v_1 \dots v_m$ generano V, allora $m \geq n$
- se $v_1 \dots v_m$ sono e.i., allora $m \leq n$
- i vettori $v_1 \dots v_n$ generano V se e solo se sono e.i. se e solo se formano una base

• $V = \mathbb{R}^3$ i tre vettori $v_1 = (1,2,3)$ $v_2 = (6,5,6)$ $v_3 = (7,8,9)$ formano una base per V?

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ abbiamo il n° giusto di vettori. v_1, v_2, v_3 formano una base se sono ℓ i

$v_1 \neq 0_{\mathbb{R}}$, v_2 non è c.l. di v_1, v_3 è c.l. di v_1 e v_2 → $v_3 = -v_1 + 2v_2$

v_1, v_2, v_3 non sono ℓ i → non formano una base

dalla proposizione precedente risulta che v_1, v_2, v_3 non generano $\mathbb{R}^3$, cioè esiste almeno un vettore $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ di $\mathbb{R}^3$ che non è c.l. di v_1, v_2, v_3. Cerchiamo questi vettori

il vettore (α, β, γ) è c.l. di v_1, v_2, v_3 se esistono 3 numeri x, y, z per cui

$$(\alpha, \beta, \gamma) = x(1,2,3) + y(6,5,6) + z(7,8,9)$$

$$\begin{cases} x + 6y + 7z = \alpha \\ 2x + 5y + 8z = \beta \\ 3x + 6y + 9z = \gamma \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 7 & \alpha \\ 2 & 5 & 8 & \beta \\ 3 & 6 & 9 & \gamma \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 7 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta-2\alpha \\ 0 & -6 & -12 & \gamma-3\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 7 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\beta+\alpha \end{array}\right)$$

$rk(A) = 2$

$$rk(A|B) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 3 & \text{se } \alpha - 2\beta + \gamma \neq 0 \end{cases}$$

ci sono casi in cui il sistema non è risolvibile, ad es. $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0 \Rightarrow (1,0,0)$ non è c.l. di v_1, v_2, v_3

• $V = \mathbb{R}[x]$

1. I polinomi $1+x$, $2+x^2$, $-3+x+x^3$, $2x^2$, $1-x+x^2+x^3$ sono ℓ i?

→ i cinque polinomi sono vettori di $\mathbb{R}_3[x]$ che ha $\dim = 4$ → per la prop precedente sono ℓ.d.

2. I polinomi $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$, $1+x-2x^2$ formano una base per $\mathbb{R}_3[x]$?

→ NO! i quattro polinomi si annullano per $x=1$ → ogni loro c.l. è un polinomio che si annulla per $x=1$. Il polinomio x^3 non è quindi loro c.l.

→ i 4 polinomi non generano $\mathbb{R}_3[x]$ (per la prop risulta anche che sono ℓ d)

• $V = \mathbb{R}^{2,2}$ sono date le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Verificare che v_1, v_2, v_3, v_4 sono ℓ.d.
2. Estrarre da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un s.i di 3 vettori ℓ i
3. Completare i 3 vettori trovati ad una base di $\mathbb{R}^{2,2}$

1. Usiamo la definizione. Studiamo la condizione

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e vediamo se necessariamente $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ o no

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$ sistema omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite → il $rk(A|B)$ è al max 3 $\neq$ il sistema ha infinite soluzioni, quindi non solo la soluzione nulla

→ v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti

2. $v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

v_4 non è la matrice nulla
v_1 non è multiplo di v_4 $\Rightarrow$ v_4, v_1, v_2 sono l.i.
v_2 non è c.l. di v_1 e v_4

3. completiamo v_1, v_2, v_4 aggiungendo dei vettori ad una base per $\mathbb{R}^{2,2}$

consideriamo l'insieme

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^{2,2}$. usiamo il metodo degli scarti

perché le prime 3 sono simmetriche e le loro comb. l. sono simmetriche

DIMENSIONE DEI SOTTOSPAZI DI UNO SP. VET. $\bar{V}$ FINITAMENTE GENERATO

$\bar{V}$ spazio vettoriale f.g. con $\dim \bar{V} = n$

Proposizione: Sia $\bar{W}$ un sottospazio di $\bar{V}$
1. anche $\bar{W}$ è f.g.
2. $\dim \bar{W} \leq \dim \bar{V} = n$
3. $\dim \bar{W} = \dim \bar{V} \Leftrightarrow \bar{W} = \bar{V}$

Proposizione: Siano $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ sottospazi di $\bar{V}$. Vale la seguente (FORMULA DI GRASSMANN):

$$\dim \bar{W}_1 + \dim \bar{W}_2 = \dim(\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2) + \dim(\bar{W}_1 + \bar{W}_2)$$

Corollario: sono equivalenti
1. $\bar{W}_1 + \bar{W}_2$ è diretto
2. $\dim(\bar{W}_1 + \bar{W}_2) = (\dim \bar{W}_1) + (\dim \bar{W}_2)$

Osservazione: si può dimostrare che in generale $W_1 + W_2 + \ldots + W_r$ è diretto se e solo se $\dim(W_1 + W_2 + \ldots + W_r) = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_r$ anche se $r \geq 2$

- $\bar{V} = \mathbb{R}^4$, $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ sottospazi di dim rispettivamente 2 e 3 ($\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$)

  la somma $\bar{W}_1 + \bar{W}_2$ è diretta? No, perché se $W_1 + W_2$ fosse diretta si avrebbe $\dim(W_1 + W_2) = 5$, ma $W_1 + W_2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che ha dim=4 $\rightarrow$ ogni sso s. ho dim $\leq$

- $\bar{V}$ = sp. vett. vettori applicati nello spazio, W_1, W_2 due sottospazi di dim=2

  che cosa si può dire delle dim di $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$?

  1. $W_1 = W_2$ $\quad W_1 + W_2 = W_1 \cap W_2 = W_1$ $\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) = 2$
  2. $W_1 \neq W_2$ $\quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1$ $\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$

  $W_1 + W_2 = \bar{V}$

APPLICAZIONE dello spazio delle righe di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$ $(A \in \mathbb{K}^{m,n})$

Consideriamo lo spazio delle righe di A:

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}(R_1(A), R_2(A), R_3(A) \dots R_m(A))$ $\quad R_i(A) = i$-esima riga di A

che è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$

(I) A ridotta (per righe): le righe non nulle sono generatori per $\mathcal{R}(A)$ linearmente indipendenti e quindi formano una base per $\mathcal{R}(A)$

$\Rightarrow rk(A) = \dim \mathcal{R}(A)$

(II) Ogni trasformazione elementare sulle righe di una matrice A, trasforma A in una matrice A' per cui $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A')$

Da questi 2 fatti segue che <u>per una matrice qualsiasi $rk(A) = \dim(\mathcal{R}(A))$</u>

$\rightarrow$ ogni passaggio nella riduzione non modifica lo spazio delle righe, e ogni matrice si può trasformare in una ridotta con un n° finito di trasf. elem. sulle righe

$\Rightarrow$ il calcolo del rango di A, mediante la riduzione, non dipende dalla scelta delle trasformazioni elementari fatte

Stessi risultati relativi allo spazio delle colonne $\mathcal{C}(A)$, sottospazio di $\mathbb{K}^m$

TEOREMA: $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$

$\hookrightarrow rk(A) = rk({}^tA)$

APPLICAZIONI

(1) Metodo per decidere se certi m vettori di $\mathbb{K}^n$ sono l.i. o no

(2) metodo per trovare una base per un sottospazio $W = \mathcal{L}(v_1 \dots v_r) \subseteq \mathbb{K}^n$

(3) Generalizzazioni di (1) e (2) a V = sp. vett. f.g.

(1) Si costruisce una matrice A mettendo gli m vettori come righe e si riduce la matrice, ottenendo una matrice A' (ridotta x righe)

I. Se compare qualche riga nulla, $rk(A') = rk(A) < m$ i vettori $R_1(A) \dots R_m(A)$ generano un sottospazio $\mathcal{R}(A)$, ma non ne formano una base $\Rightarrow$ i vettori sono l.d.

II. Se non compaiono righe nulle $(rk(A) = m)$ $R_1(A) \dots R_m(A)$ formano una base per $\mathcal{R}(A)$ $\Rightarrow$ i vettori sono l.i.

<u>OSSERVAZIONE</u>: nel caso II ad ogni passaggio nella riduzione, le righe formano una base per $\mathcal{R}(A)$

(2) Si costruisce una matrice mettendo i vettori come righe e si riduce la matrice. Le righe non nulle trovate formano una base per $\mathcal{R}(A) = W$

Commenti:

i) Il metodo ② è alternativo al metodo degli scarti successivi, per sottospazi di $\mathbb{K}^4$. Il metodo degli scarti fornisce una base formata da tutti o alcuni dei ~~vettori~~ generatori. In generale il ② no.

ii) Risultati analoghi, costruendo una matrice che ha i vettori dati come colonne e riducendo per colonne.

③ I metodi visti ① e ② per vettori e sottospazi di $\mathbb{K}^n$ si possono generalizzare ai vettori e sottospazi di uno sp. vett. V f.g. di cui si conosce una base. È sufficiente "sostituire" i vettori con le loro componenti rispetto alla base.

- Verificare che $(1,2,3)$ $(4,5,6)$ $(7,8,9) \in \mathbb{R}^3$ sono l.d.

consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la riduciamo: $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rk(A) = 2 \rightarrow$ i vettori sono l.d.

- In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i sottospazi $W_1 = \mathcal{L}((\overset{v_1}{1,2,3,0}), (\overset{v_2}{1,0,1,0}))$

$W_2 = \mathcal{L}((\underset{u_1}{0,1,1,0}), (\underset{u_2}{1,-2,-2,1}))$

trovare dim e una base per $W_1 + W_2$

$W_1 + W_2$ è generato dai 4 vettori v_1, v_2, u_1, u_2. Per trovare una base costruiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ una base per $W_1 + W_2$ è data da $((1,-2,-2,1), (1,0,1,0), (0,1,1,0))$

$\dim(W_1 + W_2) = 3$

Dalla formula di Grassmann:

$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 3 = \underline{1}$

- Trovare una base per il s.s. $W \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

$W = \mathcal{L}(1+x, 1+2x^2, -x^2, 3+x, x)$

In $\mathbb{R}_2[x]$ c'è la base $1, x, x^2$. Il generico polinomio $v \in \mathbb{R}_2[x]$ $v = a + bx + cx^2$ ha componenti rispetto a tale base i numeri a, b, c. Con la matrice

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim W = rk(A) = \mathbf{3}$ (vedi colonne)

$\Rightarrow W = \mathbb{R}_2[x]$

CAMBIO DI BASE IN UNO SPAZIO VETTORIALE V FINITAMENTE GENERATO

Supponiamo di avere 2 basi in V $\quad B = (b_1 \dots b_n)$

$C = (c_1 \dots c_n)$

Ogni vettore $v \in V$ si può scrivere sia come c.l. dei vettori di B che dei vettori di C

$$v = \begin{cases} x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \\ y_1 c_1 + \dots y_n c_n \end{cases}$$

Troviamo legami tra x e y

Dem. c_i è c.l. di $b_1 \dots b_n$

$$c_i = p_{1i} b_1 + p_{2i} b_2 + \dots p_{ni} b_n$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$ ← Matrice del cambiamento di base da B a C

componenti vettore c_1 ; c_n

$$v = y_1(p_{11} b_1 + p_{21} b_2 + \dots + p_{n1} b_n) + \dots + y_n(p_{1n} b_1 + \dots p_{nn} b_n)$$

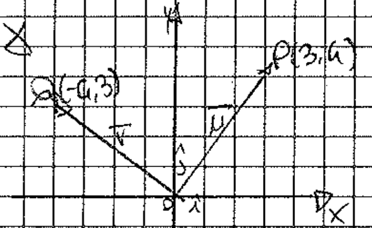
$$\begin{cases} x_1 = y_1 p_{11} + y_2 p_{12} + \dots + y_n p_{1n} \\ x_2 = y_1 p_{21} + y_2 p_{22} + \dots + y_n p_{2n} \\ \vdots \\ x_n = y_1 p_{n1} + y_2 p_{n2} + \dots + y_n p_{nn} \end{cases}$$

Se poniamo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ si ha $X = PY$

La matrice P, avendo come colonne le componenti di n vettori e.i. ha rango n e di conseguenza è invertibile

$$Y = P^{-1} X$$

Il cambiamento di base da C a B è descritto dalla matrice P^{-1}



nuovo asse delle ascisse x = retta // al vettore $\bar{u} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$;
nuovo asse delle ordinate y = retta // al vettore $\bar{v} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$ e
dove $(\hat{i}, \hat{j})$ sono i versori degli assi x, y

Consideriamo come versori dei nuovi assi i vettori $\hat{I} = \frac{\bar{u}}{5} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$ e $\hat{J} = \frac{\bar{v}}{5} = -\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$

P $\begin{cases} (x, y) \text{ coordinate nel 1° rif.} \\ (X, Y) \text{ coordinate nel rif. ruotato} \end{cases}$

OP $\begin{cases} x\hat{i} + y\hat{j} \\ X\hat{I} + Y\hat{J} \end{cases}$ Idem per i corrispondenti vettori liberi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{5}X - \frac{4}{5}Y \\ y = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- Il punto A(2,0) nel 1° rif., che coordinate ha nel 2° rif.?

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -8/5 \end{pmatrix} \quad X = 6/5 \quad Y = -8/5$$

- La retta r: $2x + y - 5 = 0$ che eq. ha nel 2° rif.?

$$r: 2\left(\frac{3}{5}X - \frac{4}{5}Y\right) + \left(\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y\right) - 5 = 0 \qquad \frac{10}{5}X - Y - 5 = 0$$

SPAZI VETTORIALI CON PRODOTTO SCALARE

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Def: Si dice PRODOTTO SCALARE in V una operazione che ad ogni coppia di vettori $u, v \in V$ associa un numero reale, indicato con $\bar{u} \cdot \bar{v}$ (oppure $\langle u, v \rangle$, $\langle u | v \rangle$) e che gode delle seguenti proprietà:

1. $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in V$
2. $u \cdot u \geq 0 \quad \forall u \in V$; $u \cdot u = 0 \iff u = 0_V$
3. $u \cdot (v_1 + v_2) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$
4. $(ku) \cdot v = u(kv) = k(u \cdot v) \quad \forall u, v \in V,\ k \in \mathbb{R}$

Def: ① $u, v \in V$ si dicono ORTOGONALI (rispetto al prodotto scalare definito in V) se $u \cdot v = 0$

② Due sottospazi W_1 e W_2 di V si dicono ortogonali se $\forall w_1 \in W_1$, $\forall w_2 \in W_2$ si ha w_1 e w_2 ortogonali

Def: Si dice NORMA in uno spazio vettoriale reale V un'operazione che ad ogni vettore $v \in V$ associa un numero reale, denotato con $\|v\|$ e che soddisfa le proprietà seguenti:

1. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0_V \quad \forall v \in V$
2. $\|kv\| = |k|\,\|v\|, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall v \in V$
3. $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in V$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Def: se $\|v\| = 1$, v si dice VERSORE

PROPOSIZIONE: $\forall v \in V, v \neq 0_V$, $\frac{1}{\|v\|} v$ è un versore

Dim

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| \underset{\text{prop. 2}}{=} \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| \underset{\text{prop. 1}}{=} \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$$

Proposizione: Se in uno spazio vettoriale reale V è definito un prodotto scalare, in V è di conseguenza definita una norma, nel modo seguente:

$$\|u\| \overset{def}{=} \sqrt{u \cdot u}$$

Esempi:

① V spazio dei vettori ordinari (applicati o liberi)

$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cos \widehat{\bar{u}\bar{v}}$

② $V = \mathbb{R}^n$. Si chiama prodotto scalare EUCLIDEO l'operazione:

$v = (v_1 \ldots v_n)$, $u = (u_1 \ldots u_n)$ per def $v \cdot u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n$

$n = 5$ $v = (-1, 3, 4, 7, 8)$ $u = (0, 1, -1, 1, 3)$ $v \cdot u = -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 3 - 4 + 7 + 20 =$

$n=4$ $v=(1,1,1,1)$ e $u=(3,-1,-1,-1)$ sono ortogonali

$v \cdot u = 3-1+1-1=0$ sì!

u e v non sono versori (rispetto alla norma dedotta dal prodotto scalare euclideo)

$u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ $\quad \|u\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}$

$\|(3,-1,-1,-1)\|=\sqrt{9+1+1+1}=\sqrt{12}$

③ $V=\mathbb{R}^n$ un altro prodotto scalare, oltre a quello euclideo, è ad esempio, se $v=(v_1 \dots v_n)$ e $u=(u_1 \dots u_n)$

$v \cdot u = \alpha_1 u_1 v_1 + \alpha_2 u_2 v_2 + \dots + \alpha_n u_n v_n$ con $\alpha_1 \dots \alpha_n$ numeri reali positivi

$n=3$ $\quad v \cdot u = u_1 v_1 + 3 u_2 v_2 + \frac{1}{2} u_3 v_3$

(le quattro proprietà richieste sono verificate)

④ $V=C([a,b])$ (spazio vettoriale reale delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue nell'intervallo chiuso $[a,b]$)

Un prodotto scalare in V si ottiene nel seguente modo:

$\forall f,g \in C([a,b])$ $\quad f \cdot g=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

- Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono ortogonali

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

- Più in generale sono a 2 a 2 ortogonali le funzioni:

$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x \dots$

- Le funzioni $\sin x$ è un versore? $\quad \|\sin x\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$\|\sin x\|=\sqrt{\pi}$ $\rightarrow$ $\sin x$ non è un versore

Si dimostra che una qualunque delle funzioni del punto 2 ha norma $=\sqrt{\pi}$, escluso la funzione costante 1

$$\|1\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx}=\sqrt{2\pi}$$

CASO DEGLI SP. VETT. CON PRODOTTO SCALARE FINITAMENTE GENERATI

Def: Una base $B=(b_1 \dots b_n)$ per V si dice BASE ORTONORMALE se $b_1 \dots b_n$ sono versori a 2 a 2 ortogonali

Osservazione: La nozione di base ortonormale è legata al prodotto scalare definito in V

VANTAGGI DELLE BASI ORTONORMALI

- Sia $(b_1 \dots b_n)$ una base ortonormale e $v=x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots x_n b_n$

Calcoliamo il prodotto scalare $v \cdot b_1$

$$v \cdot b_1 = (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_m b_m) \cdot b_1$$

$$= (x_1 b_1) b_1 + (x_2 b_2) b_1 + \dots + (x_m b_m) b_1 \qquad \text{proprietà 3}$$

$$= x_1 \underbrace{(b_1 \cdot b_1)}_{= \|b_1\|^2 = 1} + \cancel{x_2 (b_2 \cdot b_1)} + \dots + \cancel{x_m (b_m \cdot b_1)} \qquad \text{proprietà 4}$$

$$= x_1$$

In generale $v \cdot b_i = x_i$ cioè la i-esima componente di v rispetto alla base ortonormale, è il prodotto scalare di v per l'i-esimo vettore della base

- Siano $u = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_m b_m$, $v = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_m b_m$ vettori di V

si verifica che:

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_m y_m$$

cioè sostituendo i vettori con le loro componenti si fanno i calcoli come si fanno in $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare euclideo

Def: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{m,m}$ si dice ortogonale se $P\,{}^tP = {}^tP P = I$, cioè se è invertibile e $P^{-1} = {}^tP$

La matrice dell'es. sul cambiamento di riferimento cartesiano nel piano era una matrice ortogonale

TEOREMA: Sono condizioni equivalenti:
1. P è ortogonale
2. Le righe di P formano una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ euclideo
3. Le colonne di P formano una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ euclideo

- $P = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ $\quad R_1 = (3/5, -4/5)$ $\quad R_2 = (4/5, 3/5)$

$\|R_1\| = \sqrt{9/25 + 16/25} = 1$

$\|R_2\| = \sqrt{16/25 + 9/25}$

$R_1 \cdot R_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

- $P = I$, sia le righe che le colonne formiscono la base canonica per $\mathbb{R}^n$, base ortonormale.

Proposizione: Se P è ortogonale $\det P = \pm 1$

Le matrici P ortogonali con $\det P = 1$ si dicono ortogonali speciali

Esempi:

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale

$${}^tP P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \\ & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: $R_1 = (1\ 2)$ $\quad R_2 (2\ -1)$ $\quad R_1 \cdot R_2 = 1 \cdot 2 + 2(-1) = 0$

R_1 e R_2 sono ortogonali ma non sono versori: $\|R_1\| = \|R_2\| = \sqrt{5} \neq 1$

modifichiamo P sostituendo le righe con i loro versori:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5 \\ 2/\sqrt5 & -1/\sqrt5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{è ortogonale}$$

2. Cerchiamo tutte le matrici ortogonali 2×2 (costruiamole x colonne)

$$\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \qquad p^2+q^2=1 \qquad \|C_1\| = \sqrt{p^2+q^2}=1$$

$C_1 \cdot C_2 = 0 \quad p\cdot p' + q\cdot q' = 0$ Poiché $(p,q) \neq (0,0)$, possiamo ricavare o p' o q'

$$p' = -\frac{q}{p}\,q' \qquad p \neq 0$$

abbiamo un'incognita libera (q') le soluzioni sono

$\left(-\frac{q}{p}t \,;\, t\right)$. Inoltre (p', q') deve essere un versore $p'^2 + q'^2 = 1$

$$\frac{q^2}{p^2}t^2 + t^2 = 1 \qquad \underbrace{(q^2+p^2)}\,t^2 = p^2 \qquad t = \pm p$$

due possibilità $\begin{cases} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \end{cases}$

<u>Proposizione</u>. P ortogonale $\Rightarrow \det P = \pm1$

nel caso $n=2$, le matrici $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ hanno $\det = p^2+q^2 = 1$

le matrici $\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ " $\det = -1$

3. Caso $n=3$

$$P = \left(\underline{\bar{u}}\;\bar{v}\;\bar{w}\right)$$

$\bar{u}$: versore

$\bar{v}$: versore $\perp \bar{u}$ si cerca un vettore $\perp \bar{u}$ e tra le infinite scelte si cerca un ve[rsore]

$\bar{w} = \pm\, \bar{u} \wedge \bar{v}$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt2 \\ 2/3 & 1/\sqrt2 & -\frac{\sqrt2}{6} \\ -2/3 & 1/\sqrt2 & \frac{\sqrt2}{6} \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = \pm \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{vmatrix} = \pm\left(\frac{6}{3\sqrt2}\hat{i} - \frac{1}{3\sqrt2}\hat{j} + \frac{1}{3\sqrt2}\hat{k}\right)$$