Trasformata del treno d'impulsi

Premettiamo la formula di Sommazione di Poisson:

Sia $\varphi \in S$ ~~allora~~, $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \hat{\varphi}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

dove le due serie convergono assolutamente ed uniformemente sugli intervalli limitati.

Richiamo: $\varphi \in S \overset{def}{\iff} \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $\forall h, k \in \mathbb{N}$ $|t|^h \frac{d^k}{dt^k} \varphi(t)$ è limitata

Osservazione: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+nT)$ è periodica di periodo T, infatti se a t sostituisco $t+T$ ho $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+(n+1)T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+kT)$

con $k = n+1$

dimostrazione: Applichiamo il criterio di Weierstrass: osserviamo che

$$|\varphi(t)| \leq C(1+|t|)^{-1-\varepsilon}, \quad C>0, \ \varepsilon>0$$

$$\hat{\varphi} \in S \quad |\hat{\varphi}(t)| \leq C(1+|t|)^{-1-\varepsilon} \quad C>0, \ \varepsilon>0$$

$$\left|\hat{\varphi}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}\right| = |\hat{\varphi}(n\omega_0)| \leq C(1+|n||\omega_0|)^{-1-\varepsilon}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+|n||\omega_0|)^{-1-\varepsilon} \text{ conv. } \frac{1}{|n|^{\alpha}} \quad \alpha = 1+\varepsilon$$

$$|\varphi(t+nT)| \leq C(1+\underbrace{|t+nT|}_{\geq |n|T-|t|})^{-1-\varepsilon}$$

se sono su intervallo limitato allora $|t| \leq a$

quindi $|n|T - |t| \geq |n|T - a$

quindi

$$|\varphi(t+nT)| \leq C(1-a+nT) \quad \text{vale se } |n| \geq \frac{1-a}{T}$$

Osservazione: La funzione periodica definita a II membro ha coeff di Fourier $\frac{1}{T}\hat{\varphi}(n\omega_0)$

Verifichiamo che la funzione periodica definita dal I membro ha gli stessi coeff. di Fourier. Da questo si deduce che le due funzioni devono coincidere nei punti in cui sono entrambe continue, cioè $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t+nT)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T \underbrace{\varphi(t+nT)}_{y} e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}\varphi(y)\, e^{-j\omega_0 k(y-nT)}\,dy = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-j\omega_0 k y}\,dy$$

<u>Conseguenza</u> Ponendo $t=0$ si trova che la $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\varphi(n\omega$

<u>esempio</u> $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|n|}$

<u>Corollario</u>: <u>Trasformata del treno d'impulsi</u>: Se $T>0$,

$$s_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$\mathcal{F}[s_T] = \omega_0\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\, s_{\omega_0}(\omega), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

<u>dimostr.</u> $\displaystyle\mathcal{F}[s_T] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[\delta(t-nT)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-nj\,T\omega}\,2\pi \overset{?}{=} \omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

vale xchè serie converge in $\mathcal{S}'$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-njT\omega}\varphi(\omega)\,d\omega}_{\hat{\varphi}(nT)} = \omega_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(n\omega_0) \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

vera perchè è la conseguenza con ω_0 e T scambiati

<u>Trasformata di una funzione periodica</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodica di periodo T e integrabile su $[0,T]$

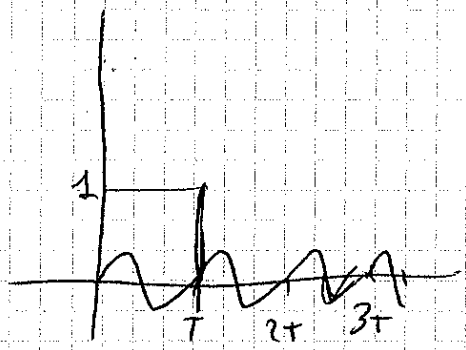
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{in } L^2(0,T)$$

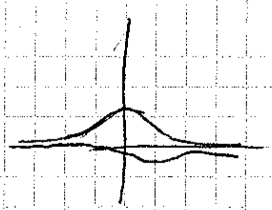
$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, 2\pi\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

$x\in\mathcal{D}'$ si dice periodica di periodo $T>0$, se $x(t+T) = x(t)$ in $\mathcal{D}'$

esempio: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$





$$\sum \varphi(t-nT) = 1 \quad \forall T$$

$$x(t) = x(t) \sum \varphi(t-nT) =$$

$$= \sum x(t)\, \varphi(t-nT) =$$

$$= \sum x(t-nT)\, \varphi(t-nT) =$$

$$\sum (\varphi x)(t-nT) = \varphi x(t) * \sum \delta(t-nT)$$

$$\hat{x}(\omega) = \widehat{\varphi x}(\omega) \cdot \omega_0 \sum \delta(\omega-\omega_0)$$