SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esempio:
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + t \\ y_2' = y_1' + y_2^2 \end{cases}$$

2 equazioni
2 funzioni incognite $y_1(t)$, $y_2(t)$

Sistema del 1° ordine perché interviene la derivata prima
in forma normale perché è esplicitato rispetto alle derivate
di ordine massimo.

Esempio: $\log(1+(y')^2) = y$
un equazione sola non in forma normale

Sistemi del 1° ordine in forma normale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto connesso. Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua.

$$F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = \cancel{(f_1(t), f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_n))}$$
$$= \big(f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n)\big)$$

Un sistema del 1° ordine in forma normale sarà

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Funzioni incognite
$y_1(t), \dots, y_n(t)$.

In maniera sintetica

$$y' = F(t, y) \qquad \text{dove } y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big)$$

Una soluzione del sistema è una funzione $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 su $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che

1) $(t, y(t)) \in \Omega \qquad \forall t \in I$

2) $y'(t) = F(t, y(t)) \qquad \forall t \in I$

Esempio

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + t\,y_2 \\ y_2' = y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

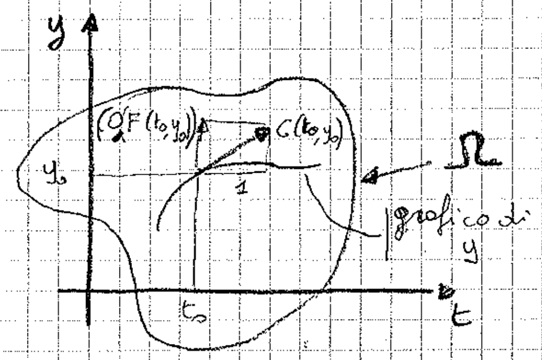
$f_1(t, y_1, y_2) = y_1 + t\,y_2$

$f_2(t, y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$

$$F(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + t y_2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

$$(t, y_1, y_2) \in \Omega = \mathbb{R}^3$$

Interpretazione come campo vettoriale in Ω



Dato il sistema $y' = F(t, y)$ $(**)$ consideriamo $G(t,y) = (1, F(t,y))$ con $(t,y) \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

G è un campo vettoriale continuo in Ω

Se $(t_0, y_0) \in \Omega$ e $y(t)$ è soluzione di $(**)$ con $y(t_0) = y_0$ allora la tangente al grafico di y in (t_0, y_0) ha direzione $G(t_0, y_0)$

dim: Infatti il grafico di y è il sostegno della curva $\gamma(t)$ con $\gamma(t) = (t, y(t))$ ed il vettore tangente alla curva è $\gamma'(t) = (1, y'(t))$. Poiché y è una soluzione e per la $(**)$ si ha $y' = F(t, y)$ allora $\gamma'(t) = (1, F(t,y)) = G(t, y)$

Problema di Cauchy

Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$ il sistema

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è detto Problema di Cauchy basato in (t_0, y_0)

Teorema di esistenza e unicità ~~del problema di Cauchy~~ di sistemi di eq. diff. (di Cauchy)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $F(t, y)$ sia continua su Ω (come funzione di (t,y)) e ammetta derivate parziali continue rispetto alle variabili y ($F(t, y_1, \dots, y_n) = (f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n))$ $\exists$ continue $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(t, y)$ $\forall\, t, y \in \Omega$ $\forall\, i, j = 1, \dots, n$). Allora $\forall (t_0, y_0) \in \Omega$, $\exists$ $T_0 > 0$ e un unica soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy basato in (t_0, y_0) definita sull'intervallo $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$

<u>Esempio</u> 1) $\begin{cases} y_1' = \sqrt{|t|}\, y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ in $\Omega = \mathbb{R}^3$

le ipotesi sono soddisfatte $\forall (t_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbb{R}^3$.

2) $y' = 2\sqrt{|y|}$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$

$2\sqrt{|y|}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ ma la derivata parziale rispetto a y in $y = 0$. Quindi le ipotesi non sono soddisfatte.

il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

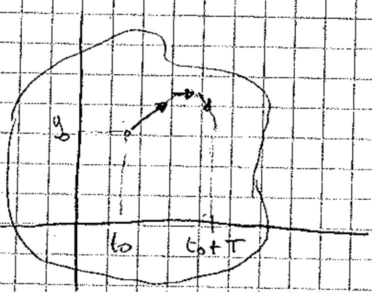
ha le seguenti due soluzioni:

$y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$y(t) = t \cdot |t|, \quad t \in \mathbb{R}$

e cade l'unicità.

<u>cenno di dimostrazione del Teorema di Cauchy (solo su esistenza)</u>



Consideriamo un intervallo $[t_0, t_0 + T]$

Si ~~dice~~ considerano $t_0,\ t_1 = t_0 + \frac{T}{N},\ t_2 = t_0 + \frac{2T}{N}, \ldots,\ t_N = t_0 + T$

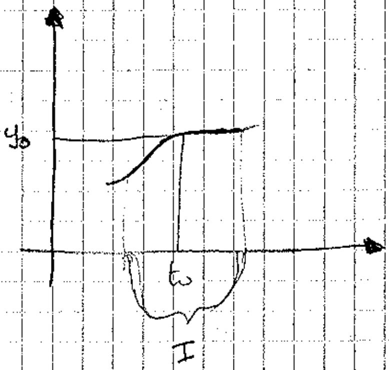
Allora si avrà

$$\cancel{y_{(N)}(t) = \begin{cases} y_0 + F(t_0, y_0) & t \in [t_0, t_1] \\ & t \in (t_1, t_2] \end{cases}}$$

$$y_{(N)}(t) = \begin{cases} y_0 + F(t_0, y_0)(t - t_0) & t \in [t_0, t_1] \\ y_{(N)}(t_1) + F(t_1, y_{(N)}(t_1))(t - t_1) & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$y_{(N)}(t)$ si dicono spezzate di Eulero e si dimostra (Peano) che se T è sufficientemente piccolo allora $(t, y_{(N)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$ e una sottosuccessione delle $y_{(N)}(t)$ converge uniformemente su $[t_0, t_0 + T]$ ad una soluzione del Problema di Cauchy.

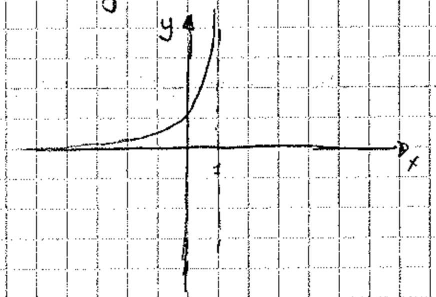
Conseguenza teorema Cauchy: Se $w_1(t)$ e $w_2(t)$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy e sono definite entrambe su un intervallo I allora $w_1(t) = w_2(t)$ $\forall t \in I$



Definizione: Nelle ipotesi del teorema di Cauchy si dice soluzione massimale del P.C. una soluzione ~~tale~~ definita su un intervallo I tale che non esiste nessuna soluzione (dello stesso P.C.) definita su un intervallo J con $I \subseteq J$, $I \neq J$
In caso contrario si dice prolungabile.

Esempio. In $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(t) = \frac{1}{1-t}$$



Richiamo: Un intervallo di $\mathbb{R}$ è un insieme del tipo (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$

$y(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in \mathbb{R} / \{1\}$ non è soluzione perchè non è un intervallo.

$y(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in (1, +\infty)$ non è soluzione $\{0\}$ non appartiene ad $(1, +\infty)$

$y(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in (-1, +1)$ è una soluzione prolungabile

$y(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in (-\infty, 1)$ è la soluzione massimale.

La soluzione massimale non è definita $\forall t \in \mathbb{R}$ e si dice che c'è un BLOW-UP in tempo finito

SISTEMI LINEARI

$$y' = A(t)\, y + b(t)$$

dove A è una matrice $n \times n$ i cui elementi sono funzioni di t continue su un intervallo aperto $J \subseteq \mathbb{R}$
e b è un vettore di n componenti i cui elementi sono funzioni di t continue definite su J

Esempio: $\begin{cases} y_1' = t^2 y_2 + \log t \\ y_2' = t y_1 - \operatorname{arctg} t \cdot y_2 + 1 \end{cases}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad A(t) \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ t & -\operatorname{arctg} t \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J (0, +\infty)$$

Teorema: le soluzioni massimali per un sistema lineare sono definite su tutto J

Definizione: il sistema lineare si dice omogeneo se $b(t) = 0 \quad \forall t \in J$

Definizione: Si dice integrale generale l'insieme di tutte le soluzioni

Teorema: L'integrale generale di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione pari al n° delle funzioni incognite

Dimostrazione: L'integrale generale è un sottospazio vettoriale dell'insieme delle funzioni ~~di classe~~ $\in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ cioè delle funzioni $y: J \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1.
Infatti se w_1 e w_2 sono due soluzioni e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha w_1 + \beta w_2$ è soluzione.
Sostituiamo in $y' = A(t) y$

$$(\alpha w_1 + \beta w_2)' = \alpha w_1' + \beta w_2' = \alpha A(t) w_1 + \beta A(t) w_2 =$$

$$= A(t)(\alpha w_1 + \beta w_2)$$

Mostriamo che l'integrale generale ha dimensione n (qui A è $n \times n$). Verifichiamo che una base è data dalle funzioni $w_1(t), \dots, w_n(t)$ definite come soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} W_j' = A(t)\, W_j \\ W_j(t_0) = e_j \end{cases}$$

dove $t_0 \in J$ fissato e $e_j = (0, 0, \dots, \underset{\substack{| \\ j\text{-esima componente}}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

Per il teorema appena visto $W_1(t), \dots, W_n(t)$ sono basi definite su tutto J.

1) Ora dobbiamo verificare che $W_1, \dots, W_n$ sono linearmente indipendenti.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 W_1(t) + \dots + \alpha_n W_n(t) = 0 \quad \forall t \in J$

Prendo ~~t=t_0~~ $t = t_0$ e trovo

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ e_1}}{\alpha_1 W_1(t_0)} + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

Quindi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

2) Dobbiamo ancora verificare che $W_1(t), \dots, W_n(t)$ sono dei generatori ossia che $\forall$ soluzione $y(t)$ del sistema $y' = A(t)y$ è una combinazione lineare di $W_1(t), \dots, W_n(t)$.

Data y soluzione, sia $y(t_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ Allora voglio verificare ~~Allora~~ che $y(t) = (\alpha_1 W_1(t) + \dots + \alpha_n W_n(t)) \quad \forall t \in J$.

Sia $y(t)$, sia $\alpha_1 W_1(t), \dots, \alpha_n W_n(t)$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)\, y \\ y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{cases}$$

Quindi per l'unicità delle soluzioni

$$y(t) = (\alpha_1 W_1(t) + \dots + \alpha_n W_n(t)) \quad \blacksquare$$

Definizione: Una base dell'integrale generale viene detto sistema fondamentale di soluzioni.

Quindi se $W_1(t), \dots, W_n(t)$ è sistema fondamentale di soluzioni allora $\forall$ soluzione si scrive come

$$y(t) = \alpha_1 W_1(t) + \dots + \alpha_n W_n$$

Se il sistema non è omogeneo
$$W_1' = A(t)\, W_1 + b(t)$$
$$W_2' = A(t)\, W_2 + b(t)$$

allora $W_1 + W_2$ non è più in generale una soluzione.

Osservazione: (Proposizione) L'integrale generale di un sistema non omogeneo è dato dalla somma di una soluzione particolare del sistema non omogeneo sommato con una generica soluzione del sistema omogeneo associato.
Quindi se $w_1(t), \dots, w_n(t)$ è soluzione del sistema omogeneo associato e $\bar{y}(t_0)$ è soluzione particolare di quello non omogeneo allora ogni soluzione $y(t)$ di quello non omogeneo si scrive

$$y(t) = \bar{y}(t) - \alpha_1 W_1(t) + \dots + \alpha_n W_n(t)$$

SISTEMA EQUIVALENTE AD UN EQUAZIONE

$$(*)\ x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = c(t), \quad t \in J$$

x è la funzione incognita.
Definisco

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = x' = y_2 \\ y_2' = x'' = -a_1(t)x' - a_2(t)x + c(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (**) \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -a_1(t)y_2 - a_2(t)y_1 + c(t) \end{cases}$$

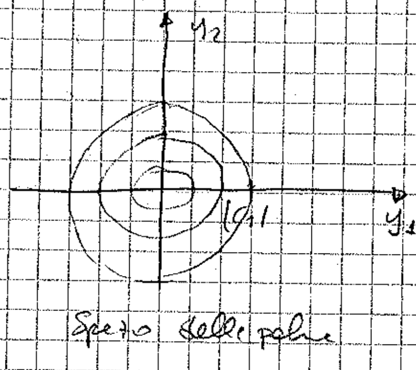
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Se $x(t)$ soddisfa ~~il sistema di y_1 e y_2~~ $(*)$ allora $y_1(t) = x(t)$ e $y_2(t) = x'(t)$ soddisfano $(**)$. Viceversa se $y_1(t), y_2(t)$ soddisfa $(**)$ allora $x(t) = y_1(t)$ soddisfa $(*)$.

Esempio: $x'' + x = 0$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

$$x(t) = c_1 \sin(t + c_2)$$
$$y_1(t) = x(t) = c_1 \sin(t + c_2)$$
$$y_2(t) = x'(t) = c_1 \cos(t + c_2)$$



Spazio delle fasi

SISTEMI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Sia $y' = Ay + b(t)$ dove A è una matrice $n \times n$ costante.
Il sistema è omogeneo se $b(t) = 0 \quad \forall t$.

Esempio: $\begin{cases} y_1' = y_1 - 7y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 5y_2 \end{cases}$ sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio: $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + t \\ y_2' = 0 \end{cases}$ sistema lineare a coefficienti costanti ma non omogeneo.

Esempio: $\begin{cases} y_1' = y_1^2 - y_2 \\ y_2' = 0 \end{cases}$ NON LINEARE

Richiami: Sia A una matrice $n \times n$.
$\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore se $\exists \, v \in \mathbb{C}^n \; v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v$ (v si dice autovettore)

λ è un autovalore $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq 0$
$\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ è autospazio relativo a λ

Per $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n in λ ed è detto polinomio caratteristico

Se λ è autovalore la sua molteplicità algebrica è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico e sarà indicata (M.A.).
Se λ è autovalore la sua molteplicità geometrica (M.G.) è la dimensione del $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$
Risulta sempre che $1 \leq M.G \leq M.A.$

A si dice diagonalizzabile se $\exists$ una matrice diagonale D $n \times n$ e una matrice invertibile P $n \times n$ tali che $A = P^{-1} D P$.
Equivalentemente A è diagonalizzabile se e solo se ogni autovalore ha $M.A = M.G.$ o ancora se e solo se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori.

Dato $y' = Ay$, con A $n \times n$ costante allora:

1) Se λ è un autovalore e v un corrispondente autovettore allora $y(t) = e^{\lambda t} v$ è una soluzione.

Infatti: $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v$. Poiché $\lambda v = Av$, quindi $y'(t) = e^{\lambda t} A v$, ma $e^{\lambda t} \cdot v = y(t)$ quindi otteniamo che $y'(t) = A y(t)$. ∎

2) Se A è diagonalizzabile e $v_1, \dots, v_n$ sono n autovettori linearmente indipendenti corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti) allora un sistema fondamentale di soluzioni è dato dalle seguenti funzioni:

$e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n$.

L'integrale generale è: $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$ dove $c_1, \dots, c_n$ sono costanti arbitrarie.

Osservazioni proprietà 2)

Se A è reale ed λ un autovalore complesso $(\lambda = \alpha + i\beta)$ con autovettore $v + iw$ allora anche $\bar{\lambda}$ è un autovalore con autovettore $v - iw$.

[Infatti: $A(v + iw) = (\alpha + i\beta)(v + iw) \iff$
$\iff A(v - iw) = (\alpha - i\beta)(v - iw)$ ∎]

Quindi $e^{(\alpha + i\beta)t}(v + iw)$ e $e^{(\alpha - i\beta)}(v + iw)$ sono soluzioni linearmente indipendenti, così come la parte reale e immaginaria della prima (ad esempio).

Richiamo

- $(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + bd = (ac + db) + i(bc + ad)$
- $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta)$

Otteniamo quindi $e^{\alpha t}[\cos(\beta t) v - \sin(\beta t) w]$, $e^{\alpha t}[\cos(\beta t) w + \sin(\beta t) v]$

3) Se A non è diagonalizzabile.

Supponiamo che λ sia autovalore con autovettore v_1 e sia v_2 una soluzione di $(A - \lambda I) v_2 = v_1$ (v_2 è detto autovettore generalizzato). Allora $y(t) = e^{\lambda t}(t v_1 + v_2)$ è una soluzione.

Infatti: $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}(t v_1 + t v_2) + e^{\lambda t} v_1 =$

Inoltre $Ay(t) = A\left(e^{\lambda t}(tv_1 + v_2)\right) =$
$e^{\lambda t}\left(A(tv_1+v_2)\right) = e^{\lambda t}\left[t\lambda v_1 + \lambda v_2 + v_1\right] =$
$= \lambda e^{\lambda t}(tv_1 + v_2) + e^{\lambda t} v_1 = y'(t)$. ☒

MATRICI 2x2

1) Ho due autovettori indipendenti v_1 e v_2 corrispondenti a due autovalori λ_1 e λ_2 reali (e non necessariamente distinti)
Allora è integrale di $y' = Ay$ è

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

2) Due autovalori $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ con autovettore rispettivamente $(v + iw)$ e $(v - iw)$, con $\beta \neq 0$
Integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v - \sin(\beta t)w) + c_2 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)w + \sin(\beta t)v)$$

3) Un autovalore reale con M.A. = 2, ma con M.G. = 1 (dim (Ker) = 1). Detto v_1 un autovettore, si dimostra che il sistema $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ ha una soluzione v_2
Integrale generale $y(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}(tv_1 + v_2)$

[$\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 = \mathbb{C}^2$ prendo $w \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. $(A - \lambda I)w \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$

Esercizio: Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$

Svolgimento

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ $\lambda = 2$
$\lambda = -1$

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x - 2y = 0$ $y = 1$ $x = 2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = -1}$: $\qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4.1

$$2x - y = 0 \qquad y = 2 \quad x = 1 \qquad v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

integrale generale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{-t} \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = -1 \qquad 2 - \lambda = \pm i \qquad \lambda = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 2 + i \qquad \lambda_2 = 2 - i$$

Se $\underline{\lambda_1 = 2+i}$ $\qquad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$-ix + y = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Di conseguenza $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v + iw$$

Integrale generale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + C_2 e^{2t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 2 \quad \text{con M.A.} = 2$$

autovettore corrispondente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\,(A - 2I) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Cerco autovettore generalizzato

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ autovettore generalizzato}$$

Integral generale

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

SISTEMI AUTONOMI

Sia $y' = f(y)$ dove f è un campo di classe C^1 su un aperto connesso $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$

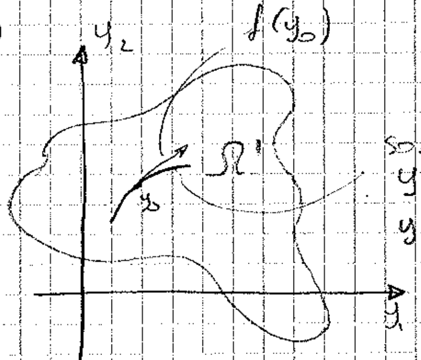
$$f: \Omega' \to \mathbb{R}^n$$

Esempio:
$$\begin{cases} y_1' = y_1^2 - y_2 \\ y_2' = \log(y_1) \end{cases} \qquad \Omega' = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0\}$$

$$f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2 \\ \log(y_1) \end{pmatrix}$$

Interpretazione geometrica:

Sia $y(t)$ una soluzione, $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \Omega'$
$t_0 \in I$.
Posto $y_0 = y(t_0)$, il vettore tangente al sostegno di y in y_0 è parallelo a f calcolato in y_0
infatti se $y(t)$ è soluzione
$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in I \quad \text{quindi}$$
$$y'(t_0) = f(y(t_0)) = f(y_0)$$



Proposizione: Se ~~$y(t)$~~ $y: I \to \mathbb{R}^1$ è una soluzione allora, $\forall c \in \mathbb{R}$ la funzione $\tilde{y}(t) = y(t-c)$ definita su $J = \{t \in \mathbb{R} : (t-c) \in I\}$ è una soluzione

Dimostrazione

$$\tilde{y}'(t) = y'(t-c) = f(y(t-c)) = f(\tilde{y}(t)) \quad \forall t \in J \quad \blacksquare$$

Esempio: in $\mathbb{R}$ $\quad y' = y^2 \qquad y = \frac{1}{c-t}, \; c \in \mathbb{R}$

Definizione: Se $y' = f(y)$ è un sistema (autonomo) allora i sostegni delle soluzioni si dicono orbite, i punti $y_0 \in \mathbb{R}^1$: $f(y_0) = 0$ si dicono punti critici (o punti di equilibrio) del sistema.

Esempio:

$$\begin{cases} y_1' = y_1^2 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^2 - y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \qquad y_2 \quad \begin{matrix} (0, 0) \; P_1 \\ (-1, 1) \; P_2 \end{matrix}$$

P_1 e P_2 sono punti critici

Osservazione: Se y_0 è un punto critico allora $y(t) = y_0 \; \forall t \in I$ è una soluzione.

Dimostrazione: $y'(t) = 0 \overset{?}{=} f(y(t))$ Sì $y(t) = y_0$ e y_0 è punto critico. $\blacksquare$

INTEGRALI PARTICOLARI di SISTEMI A COEFF. COSTANTI NON OMOGENEI

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + b(t)$$

A = matrice 2×2 costante

$b(t)$ vettore $\in \mathbb{R}^2$

1) $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\lambda \neq 1$ ↳ autovalore di A

Suppongo $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 5$

Cerco la soluzione particolare del sistema come

$$\begin{aligned} y_1(t) &= a e^t \\ y_2(t) &= b e^t \end{aligned}$$

dove a, b costanti da determinarsi

2) $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{\lambda_1 = 1}, \; \lambda_2 = 3$ allora

$$\begin{cases} y_1(t) = (at+b)e^t \\ y_2(t) = (ct+d)e^t \end{cases}$$

3) $b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1$ autovalore <u>doppio</u>

$$y_1(t) = (at^2+bt+c)e^t$$
$$y_2(t) = (dt^2+ \cancel{f}t + \cancel{f}g)e^t$$

4) $b(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$ Supponiamo $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} y_1 = a \\ y_2 = b \end{cases}$$

5) $b(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\lambda = 0$, $\lambda = 2$

$$\begin{cases} y_1(t) = at+b \\ y_2(t) = ct+d \end{cases}$$

6) $b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 5$

$$\begin{cases} y_1(t) = ae^{2t} + ct + d \\ y_2(t) = be^{2t} + ft + g \end{cases}$$

7) $b(t) = \begin{pmatrix} \sin t - e^t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} y_1(t) = (at+b)e^t + f\cos(t) + g\sin(t) \\ y_2(t) = (ct+d)e^t + h\cos(t) + k\sin(t) \end{cases}$$

8) $b(t) = \begin{pmatrix} \sin t - e^t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$

$$\begin{cases} y_1(t) = ae^t \;\; (ct+d)\cos t + (ht+k)\sin t \\ y_2(t) = be^t \;\; (ft+g)\cos t + (lt+m)\sin t \end{cases}$$

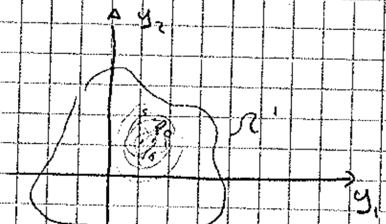
STABILITÀ DEI PUNTI CRITICI DI SISTEMI AUTONOMI

Sia $y' = f(y)$, $f : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1,
Ω si dice spazio delle fasi.
$P_0 \in \Omega'$ è punto critico se $f(P_0) = 0$. Se P_0 è punto critico la funzione costante $y(t) = P_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ è una soluzione.

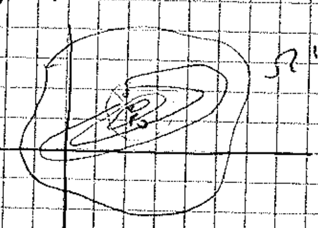
Definizione: Supponiamo che tutte le soluzioni ~~siano~~ del sistema siano definite $\forall t \geq 0$. Una soluzione $y(t)$ si dice limitata in futuro se $\exists M > 0 : \| y(t) \| \leq M \quad \forall t \geq 0$

Definizione: Sia $P_0 \in \Omega'$ un punto critico di $y' = f(y)$.
Allora P_0 si dice:

- stabile se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: per ogni soluzione $y(t)$ soddisfacente $\| y(0) - P_0 \| < \delta$ risulta $\| y(t) - P_0 \| < \varepsilon \quad \forall t \in \Omega'$



- attrattivo se $\exists \delta > 0$: $\forall$ soluzione $y(t)$ che $\underbrace{\text{soddisfa}}_{\| y(0) - P_0 \| < \delta}$ risulta: $\lim_{t \to +\infty} (y(t)) = P_0$



- asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo

Esempio: $y' = Ay$, A matrice costante $n \times n$
$P_0 = 0$ è punto critico

Esempio:
$$\begin{cases} x' = -2x + \dfrac{y}{2} \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$P_0 = 0$ è punto critico.
Autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Integrale generale
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{-3t} v_2$$

Per $t \to +\infty$ la soluzione tende a $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$

$(0,0)$ è attrattivo.

In realtà è anche stabile:

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| \le |c_1| \overbrace{e^{-t}}^{\le 1} \|v_1\| + |c_2| \overbrace{e^{-3t}}^{\le 1} \|v_2\|$$

$$\le |c_1| \|v_1\| + |c_2| \|v_2\|$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

~~dato $\forall \varepsilon > 0$ posso c_1 e c_2 sufficientemente piccoli in~~

Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$\left\| \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow |c_1| \|v_1\| + |c_2| \|v_2\| < \varepsilon$$

$|c_1| \|v_1\| + |c_2| \|v_2\| < \varepsilon$ è soddisfatto se

$$|c_1| < r \qquad |c_2| < r \qquad \text{con } r = \frac{\varepsilon}{2(\|v_1\| + \|v_2\|)}$$

$|c_1| < r$ e $|c_2| < r$ sono soddisfatte se vale

$$\left\| \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} \right\| < \delta$$ con δ sufficientemente piccolo.

$$(c_1 - c_2)^2 + (2c_1 + 2c_2)^2 < \delta^2$$

$$c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 + 4c_1^2 + 4c_2^2 + 8c_1 c_2 < \delta^2$$

ellisse e si vede che se δ è sufficientemente piccolo allora c_1 e c_2 diventano piccoli.

<u>Definizione</u> P_0 si dice instabile se non è stabile.

Teorema (di stabilità lineare): Dato $y' = Ay$, A matrice costante $n \times n$. $P_0 = 0$ è un punto critico:

1) asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale < 0
2) Stabile se tutti gli autovalori di A hanno parte reale ≤ 0 e quelli con parte reale $= 0$ hanno M.A. = M.G.
3) instabile negli altri casi

~~Teorema (di~~ stabilità non lineare): Sia $y' = f(y)$ $P_0 \in \Omega'$

$f(P_0) = 0$.

$f: \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1

$$f(y) = f(P_0) + \underbrace{Jf(P_0)}_{\text{matrice } n \times n}(y - P_0) + o(\|y - P_0\|)$$

Considero il sistema

$$y' = \underbrace{Jf(P_0)}_{A}(y - P_0)$$

sistema linearizzato di $y' = f(y)$ in P_0

Teorema di linearizzazione (o di stabilità in prima approssimazione)

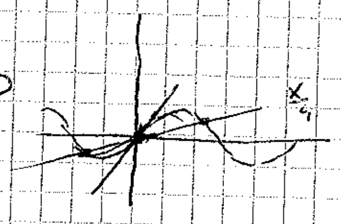
Supponiamo che P_0 sia un punto critico isolato (in un suo intorno non ce ne sono altri). Allora P_0 è:

1) asintoticamente stabile se tutti gli autovalori di $Jf(P_0)$ hanno parte reale < 0
2) instabile se almeno uno degli autovalori di $Jf(P_0)$ ha parte reale > 0

Esempio: $\begin{cases} x' = -2\sin x + \frac{1}{2}y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

punti critici

$\begin{cases} -2\sin x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\cancel{2}\sin x + \frac{1}{4}x = 0 \\ x = y \end{cases}$



$(0,0)$ è punto critico

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x & \frac{1}{2}y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} -2\cos x & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad Jf(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ entrambi < 0 quindi P_0 è asintoticamente stabile

Sistema linearizzato: $\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2}y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$