SERIE NUMERICHE

Una serie numerica è formalmente una somma infinite

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

dove $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ e la successione $a_0, a_1, a_2, \dots$ si dice successione dei termini della serie.

Notazione compatta

$$\boxed{a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_n}$$

Si costruisce una altra successione (detta delle parziali o delle ridotte)

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Si considera il limite di S_n per $n \to \infty$:

$\lim_{n\to\infty} S_n =$	Allora
esiste finito $(= S)$	serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice convergente e si scrive che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$. S si chiama somma della serie
$= +\infty$	la serie si dice positivamente divergente e si scrive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$
$= -\infty$	la serie si dice negativamente divergente e si scrive che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$
$\nexists$	la serie si dice indeterminata oppure oscillante

Esempio: $1+1+1+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$

$S_0 = 1$

$S_1 = 2 = 1+1$

$S_2 = 3 = 1+1$

$\vdots$

$S_n = n+1$ $\qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

Serie è positivamente divergente

Esempio: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{\text{Serie di Mengoli}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$

Posso vedere $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ infatti

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ e così via

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{4}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Quindi la serie è convergente a somma 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Una serie del tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ sono dette serie telescopiche

Esempio: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)} = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \ln 4 - \cancel{\ln 3} + \ldots$$

$S_1 = \log 2 - \log 1 = \log 2$

$S_2 = \log 3 - \log 1 = \log 3$

$\vdots$

$S_n = \log(n+1) - \ln 1 = \log(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$ Serie positivamente divergente

$\sum_{n=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\dots$

$S_0 = 1$

$S_1 = 0$

$S_2 = 1$

$S_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

$\lim_{n\to\infty} S_n \nexists \Rightarrow \sum(-1)^n$ è indeterminata

<u>Esempio:</u> Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ dove $r \in \mathbb{R}$ è detta ragione della serie

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + r$

$S_2 = 1 + r + r^2$

$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{se } r = 1 \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } r = 1 \\ \frac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ \nexists & \text{se } r < -1 \end{cases}$

Serie geometrica è divergente positivamente se $r \geq 1$

" " " " convergente a $\frac{1}{1-r}$ se $|r| < 1$

" " " " indeterminata se $r < -1$

RICHIAMO Se $r \neq 1$, $1 + r + \dots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$$(1-r)(1 + r + \dots + r^n) \overset{?}{=} 1 - r^{n+1}$$

$$1 - \cancel{r} + \cancel{r} - \cancel{r^2} + \cancel{r^2} \dots + r^{n+1} = 1 - r^{n+1} \quad \text{Sì}$$

Esempio: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} = 2$

Esempio: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n}{3^n} = \sum \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad r = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} - 1$$

Proprietà 1: Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergenti allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ è convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Proprietà 2: Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Dimostrazione proprietà 1:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ T_n &= b_0 + b_1 + \dots + b_n \end{aligned}\right]$$

Per ipotesi esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = S \qquad \lim_{x \to +\infty} T_n = T$$

Somme parziali di $\cancel{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$W_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = S_n + T_n$$

$$\lim_{n \to \infty} W_n = \lim_{x \to \infty} (S_n + T_n) = S + T$$

Proprietà: Il carattere di una serie non cambia se si altera un numero finito di termini

Dimostrazione: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ tale che

$a_n = b_n \quad \forall n \geq N \quad$ per un certo $N \in \mathbb{N}$

se $n > N$

$$S_n = \overbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_N}^{S_N} + a_{N+1} + \dots + a_n$$

$$T_n = \underbrace{b_0 + b_1 + \dots + b_N}_{T_N} + b_{N+1} + \dots + b_n$$

$S_n - T_n = S_N - T_N =$ costante che non dipende da n

$S_n = T_n + (S_N - T_N)$

Quindi se T_n ammette limite finito $\Rightarrow$ S_n ammette limite finito

Proprietà: Condizione necessaria di convergenza

Se $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge allora il $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dimostrazione:

$$S_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

Se la serie converge allora S_n per $n \to \infty$ convergerà a S

S_{n-1} tenderà anche esso a S e quindi

$a_n = S_n - S_{n-1}$ tenderà a $S - S = 0$

Non è vero che se $a_n \to 0$ allora la serie converge.

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty \qquad \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad n \to \infty$$

La proprietà viene usata per dimostrare che una serie non converge

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$ non converge perchè per $n \to \infty$

$a_n \to e^{-1} \neq 0$

Serie a termini positivi

Una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice a termini positivi se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in N$

<u>Proprietà</u>: Una serie a termini positivi o converge o diverge positivamente.

<u>Dimostrazione:</u>

Detto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la serie in questione e posto

$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ bisogna verificare che $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste finito oppure è $+\infty$

Siccome $a_n \geq 0 \quad \forall n$ la successione delle somme parziali è crescente:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + \underset{\substack{\vee\!\!\vee \\ 0}}{a_{n+1}} \geq S_n$$

Pertanto S_n ammette limite e il $\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\geq 0} \{S_n\}$

<u>Esempio</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Quindi la serie non converge

Verifico che $a_n \geq 0$ per $n \geq 1 \qquad 1 - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0$

$$1 \geq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad 1+\frac{1}{n} \leq e \qquad \underset{\substack{\wedge \\ 1}}{\frac{1}{n}} \leq \underbrace{e-1}_{=1,7\ldots}$$

Quindi la serie diverge positivamente.

<u>Criterio del confronto</u>: date $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$, $b_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$,

Supponiamo che $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 0$

Allora:

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

<u>Dimostrazione</u>:

1) Sia $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ e $T_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$a_0 \leq b_0, \ a_1 \leq b_1, \ \ldots, \ a_n \leq b_n \quad \Rightarrow \quad S_n \leq T_n \quad \forall n \geq 0$

Quindi $\sup_{n\geq 0} \{S_n\} \leq \sup_{n\geq 0} \{T_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n$$

1) Se $\lim_{n\to\infty} T_n$ è finito allora anche $\lim_{n\to\infty} S_n$ è finito e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

2) Se $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$ quindi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge positivamente.

<u>Osservazione</u>: esempio in cui non si applica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{-1}_{a_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{b_n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è a termini positivi e diverge negativamente

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è a termini positivi e converge

Però $a_n \leq b_n$ è vero. Il criterio si applica solo se le due serie sono a termini positivi!!!

<u>Esempio</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots +$ <u>Serie armonica</u>

Media armonica tra termine che precede e che succede

media aritm.	$\frac{a+b}{2}$
media geom.	$\sqrt{ab}$
media armonica	$H = \frac{2ab}{a+b}$

IC $\log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$

Se $x = \frac{1}{n}$

$$\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} \qquad n \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente

per criterio del confronto $\sum_{n=1} b_n$ diverge positivamente

<u>Serie armonica diverge!!!</u>

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \leq 1$ diverge positivamente perché

$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ quindi per il criterio del confronto diverge.

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ non possiamo confrontarla con serie armonica.

Confrontiamo con serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\underset{a_n}{\frac{1}{n^2}} \leq \underset{b_n}{\frac{2}{n(n+1)}}$ $(n(n+1) \leq 2n^2 \quad n \leq n^2 \text{ vero})$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge $\Rightarrow 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$ converge

Quindi per criterio del confronto converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Criterio del confronto asintotico: Dati $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n > 0$

Supponiamo che esista finito e non nullo.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ allora le serie hanno lo stesso carattere

Cenno di dimostrazione

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ $\forall \varepsilon \exists N: \; l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \quad \forall n \in N$ e così via

Richiamo: Se $a_n, b_n > 0$ si dice che $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Se $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n \Rightarrow$ $a_n c_n \sim b_n d_n$

$a_n + c_n \sim b_n + d_n$

$\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

$a_n^{\frac{1}{n}} \sim b_n^{\frac{1}{n}}$

$n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(2)1$, $0! = 1$

$3! = 6$

Formula di STIRLING $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + e^{-n}}{n^6 + 3n^2 + \log(n+2)}$ $a_n \sim \frac{n^4}{n^6} = \frac{1}{n^2} = b_n$

Ha stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ è convergente.

<u>Criterio della radice</u>: Data la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 0$, supponiamo che esista (finito o $+\infty$) il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Allora:

1) se $\ell < 1$ la serie converge
2) se $\ell > 1$ la serie diverge positivamente.

<u>Dimostrazione</u>

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

Supponiamo che $\ell < 1$, segue che

$$a_n < \underbrace{(\ell+\varepsilon)^n}_{\text{serie geometrica}}$$

Per ε abbastanza piccolo $(\ell + \varepsilon < 1$ $(\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$

Allora $\sum (\ell+\varepsilon)^n$ converge in quanto serie geometrica di ragione $r = \ell + \varepsilon$ $|r| < 1$

Per il criterio del confronto $\sum a_n$ converge

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

Supponiamo che $\ell > 1$ prendiamo ε sufficientemente piccolo in modo tale che $\ell - \varepsilon > 1$ $\left(\varepsilon = \frac{\ell - 1}{2}\right)$

$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$ $\qquad (\ell - \varepsilon)^n < a_n$ per $n > N$

Allora $\sum (\ell - \varepsilon)^n$ diverge in quanto serie geometrica di ragione $r > 1$

$\left(\lim_{n\to\infty} (\ell - \varepsilon)^n = +\infty\right.$ quindi serie diverge positivamente$\left.\right)$

Di conseguenza $\sum a_n$ diverge positivamente.

<u>Criterio del rapporto</u>: Sia data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ $\forall n \geq 0$, supponiamo esiste (finito o $+\infty$) il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{(n+1)}}{a_n} = \ell$. Allora

1) Se $\ell < 1$ la serie converge.
2) Se $\ell > 1$ la serie diverge.

Esempio: Determinare il carattere della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

$a_n \geq 0 \Rightarrow$ applico criterio della radice

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n} = \lim$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{100^n}{n!}} =$

$= \frac{100}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{100}{n e^{-1}}$

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} = n e^{-1} \boxed{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} \sim n e^{-1}$

$n \to \infty \quad (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \to 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100 e}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ converge

In alternativa applico il criterio del rapporto

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{100^{n+1}}{100^n} \cdot \frac{(n!)}{(n+1)!} = 100 \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{100}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{100}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ converge

Osservazione: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

DIV. CONV.

Secondo i criteri del rapporto o della radice il lim è 1

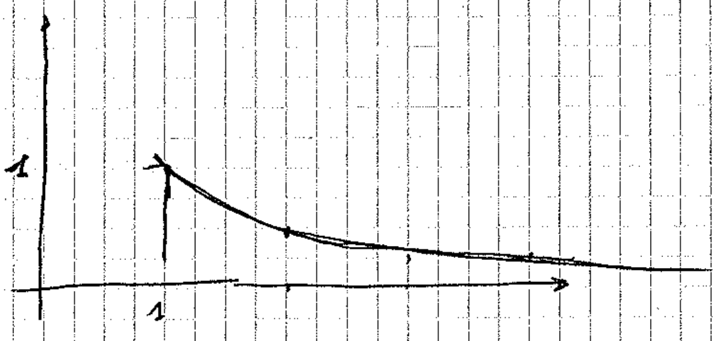
Criterio integrale (o di Mac Laurin)

Data una funzione $f\,[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e l'integrale improprio $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere

Esempio

~~$f(x) = \frac{1}{x}$~~

$f(x) = \frac{1}{x}$



$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ha stesso carattere $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente

Conseguenza: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ diverge se $\alpha \le 1$

Se $\alpha > 0$ ~~$n \ge 1$~~ Applico il criterio precedente alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx =$$

Se $\alpha \le 0$ ($\frac{1}{n^\alpha}$ non tende a zero quindi la serie non converge).

Definizione: Si dice che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente

se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Definizione: Una serie è semplicemente convergente se è convergente ma non assolutamente convergente

Teorema: Se una serie converge assolutamente allora è convergente.

Dimostrazione: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie che converge assolutamente, quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Definiamo
$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \ge 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \ge 0 \\ -a_n & \text{se } a_n \le 0 \end{cases}$$

Allora osserviamo che $b_n \ge 0$ e $c_n \ge 0 \quad \forall n$

Inoltre $b_n \le |a_n| \quad \forall n$, $c_n \le |a_n| \quad \forall n$

Per il criterio del confronto le serie b_n e c_n convergono

Siccome $a_n = b_n - c_n$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Rightarrow \text{converge}$$

Esempio: determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \dots$

Questa serie converge assolutamente infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ converge $\Rightarrow$ anche la serie di partenza è convergente

Criterio di Leibniz: Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$, con $b_n>0$ (a segni alterni). Supponiamo che

1) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

2) $b_{n+1}\le b_n \quad \forall n\ge 0$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge e detta S_n e S le somme parziali e la somma della serie, rispettivamente, risulta

$$|S_n - S| < b_{n+1}$$

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$ $\qquad b_n = \frac{1}{n}$ =

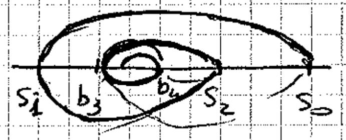
$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$

Per il criterio di Leibniz la serie converge

Se vogliamo conoscere S a meno di $\frac{1}{100}$ sommiamo tutti i termini della serie

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{con } N : b_{N+1} \le \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{N+1}\le\frac{1}{100} \quad N\geq 99$$

Idea dimostrazione criterio di Leibniz:



Teorema: 1) La "proprietà associativa" vale per ogni serie non indeterminata

$$a_n = \underbrace{a_0 + a_1} + \underbrace{a_2 + a_3 + a_4} + \underbrace{a_{n-1} + a_n} + \dots$$

$$b_n = b_0 + b_1 + \dots$$

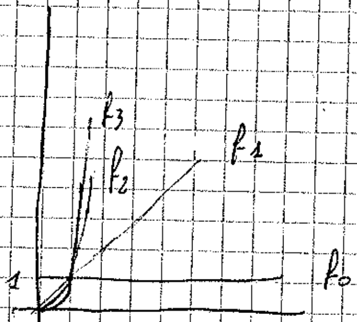
2) La proprietà commutativa vale per le serie assolutamente convergenti (teorema di Dirichlet). In altri termini:

Se $\sum |a_n|$ è convergente allora $\forall$ biiezione $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ è assolutamente convergente quindi convergente e ha la stessa somma di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

SUCCESSIONE DI FUNZIONI

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_0, f_1, f_2, \dots$ funzioni da A in $\mathbb{R}$ $(f_n : A \to \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$. Allora la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge puntualmente su A ad una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in A$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Ossia se $\forall x \in A$ la successione numerica $f_n(x)$ converge ad $f(x)$. La funzione $f(x)$ viene detta funzione limite.

Esempio: $A = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ $n = 0, 1, \dots$



Se $x \in [0, 1]$

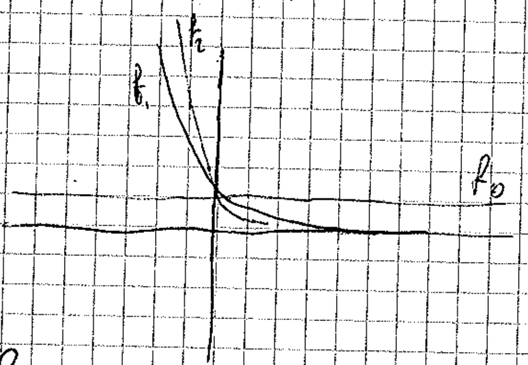
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{la successione converge puntualmente}$$

La successione $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Nota: f_n sono continue in $[0, 1]$ ma la f no

Esempio: Sia $A = \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-nx}$



Per $x \in A$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-xn} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Non converge puntualmente su } A$$

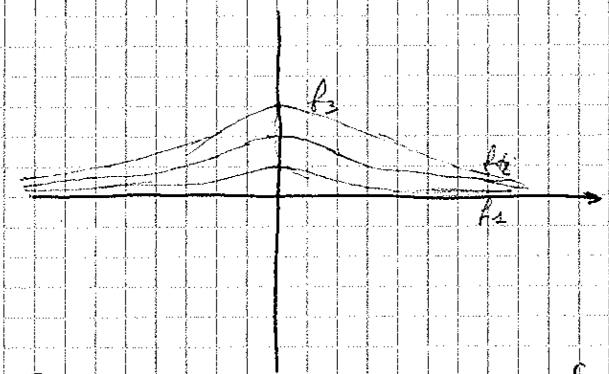
Quindi la successione $\{f_n\}$ non converge puntualmente su A

Invece converge puntualmente su $[0, +\infty)$ e la funzione limite $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

L'insieme di convergenza puntuale è l'insieme degli x tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito.

Esempio: $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + \frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$

det insieme convergenza puntuale e funzione limite.



Per $x \in \mathbb{R}$

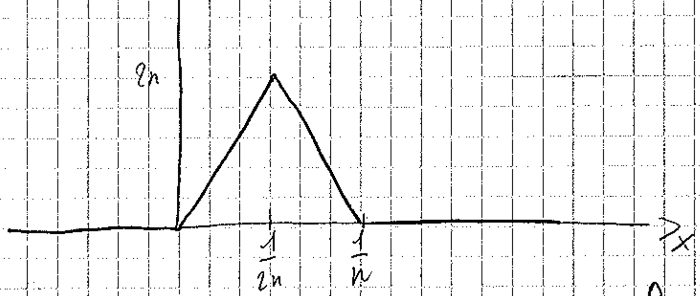
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

Insieme di convergenza puntuale: $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

Funzione limite: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

Osservazione: Le f_n sono tutte limitate su $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ma f non lo è

Esempio: Sia $f_n(x)$ definita come in figura: $(n = 1, 2, 3, \dots)$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

f_n converge puntualmente a $f(x) = 0$ su $\mathbb{R}$

Nota: tutte le $f_n(x)$ hanno lo stesso $\int_0^1 f_n(x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

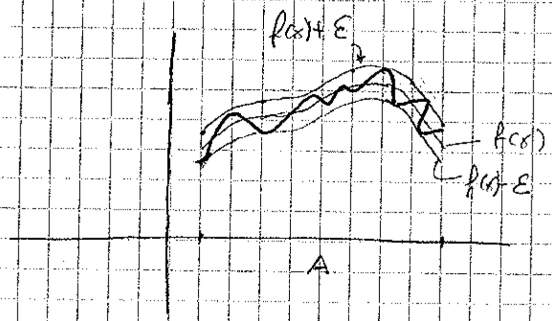
$$\int_0^1 f(x) = 0$$

Definizione: $\{f_n\}$ converge puntualmente su A alla funzione $f(x)$ se e solo se $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definizione: Una successione di funzioni $f_n: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente convergente in A a $f: A \to \mathbb{R}$ se:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n > N, \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon} \quad (*)$$

Interpretazione grafica:



$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon \leq f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon$$
$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

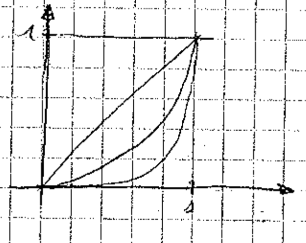
Osservazione: dire che $\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Quindi (*) equivale a dire che

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Osservazione: se $\{f_n\}$ converge unif. in A $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ converge punt. in A

Esempio: $f_n(x) = x^n$ su $A = [0, 1]$



$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 1 \quad \forall n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0 \quad \text{non}$$

converge uniformemente su A considerato

Invece su $A' = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ c'è convergenza uniforme:

$$\sup_{x \in A'} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}^n = 0$$

Esempio: $f_n(x) = x^n$. Dato $\varepsilon>0$ e $x \in [0,1)$ cerchiamo la soglia N : $\forall n>N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$x^n < \varepsilon$$

$$n \log x < \log \varepsilon \qquad n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

Quindi si può prendere:

$$N = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

Per $x \to 1$ $N \to +\infty$

Teorema: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni convergente uniformemente su A ad una funzione $f : A \to \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1) Se ciascuna f_n è limitata su A allora f è limitata su A
2) Se ciascuna f_n è continua su A allora f è continua su A
3) (Passaggio al limite sotto segno d'integrale) Se $A = [a,b]$ e ciascuna delle f_n è continua su $[a,b]$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione:

1) Preso $\varepsilon = 1$ nella definizione di convergenza uniforme, esiste $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ si ha che

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \qquad \forall x \in A$$

$$|f(x)| = |f_n(x) + f_n(x) + f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

Ora prendiamo $n = N$ e quindi avremo:

$$|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)|$$

inoltre $|f_N(x)| \leq C$ $\forall x \in A$. Quindi otteniamo che con $n = N$ si ha che

$$|f(x)| \leq 1 + C \quad \forall x \in A$$

quindi $f(x)$ è limitata.

3) Per il punto 2 f è continua, quindi integrabile al pari delle f_n.

Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N$ ~~$f_n(x)$~~

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Otteniamo che

$$\int_a^b f(x) - \varepsilon \, dx \leq \int_a^b f_n(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) + \varepsilon \, dx$$

Quindi:

$$\int_a^b f(x) \, dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_n(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx + \varepsilon(b-a)$$

cvd.

Esempio: $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $n \geq 1$ su $A[0,1]$

$f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x) = 0$ su A

$f_n'(x) = x^{n-1}$ non tende a $f'(x) = 0$ per

Infatti per $x \to 1$ $f_n'(x) \to 1$

Esempio. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ su $\mathbb{R}$ converge unif. a $f(x) = |x|$

$f_n \in C^1(\mathbb{R})$ ma f non è derivabile in $x = 0$

Teorema: (Passaggio al limite sotto il segno di derivata)
Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni di classe C^1 su un intervallo $[a,b]$ e ivi convergente puntualmente ad una funzione $f(x)$. Se la successione $f_n'(x)$ converge uniformemente su $[a,b]$ allora f_n converge uniformemente su $[a,b]$, f è di classe C^1 e $f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$. $\forall x \in [a,b]$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad \text{dove} \quad f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Somme parziali: $S_0(x) = f_0(x) \qquad S_1(x) = f_0(x) + f_1(x)$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

__Definizione__: diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente o uniformemente su A a seconda che la successione delle somme parziali $S_n(x)$ converge puntualmente o uniformemente su A.
Se $S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$ $S(x)$ è detta funzione somma della serie.

__Teorema__: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie uniformemente convergente su $A \subseteq \mathbb{R}$, con somma $S(x)$. Allora

1) Se ciascuna f_n è limitata su A allora la funzione limite $S(x)$ è limitata su A

2) Se ciascuna f_n è continua in un punto $x_0 \in A$ allora $S(x)$ è continua in x_0

3) Se l'insieme A è un intervallo limitato $[a,b]$ e f_n è continua su $[a,b]$ allora ~~è integrabile~~

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx$$

__Teorema__: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie puntualmente convergente su $[a,b]$, con somma $S(x)$. Allora se ciascuna f_n è di classe C_1 su $[a,b]$ ~~allora~~ $\cancel{\sum_{n=0}^{\infty}}$ e se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[a,b]$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente su $[a,b]$, $S(x)$ è di classe C^1 su $[a,b]$ e $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$

Definizione: Una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$ si dice totalmente (o normalmente) convergente su A se la seguente serie numerica (a termini positivi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sup_{x\in A} |f_n(x)|}_{\|f_n\|_\infty \text{ norma } - \text{ di } f_n \text{ su } A} \quad \text{converge}$$

Osservazione: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente su A se e solo se $\exists\, M_n \geq 0$ tale che

1) $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge

Infatti se $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge, allora 1) e 2) valgono $M_n = \|f_n\|_\infty$

Viceversa se valgono 1) e 2) allora

$$\|f_n\|_\infty \leq M_n$$

Quindi $\sum \|f_n\|$ converge per il criterio del confronto.

Teorema: (Criterio di Weierstrass)
Se serie di funzioni converge totalmente su un insieme A allora converge anche ~~puntualmente~~ uniformemente e anche assolutamente (la serie dei valori assoluti converge puntualmente)

Esempio: Serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ su $\mathbb{R}$

Verifico che la funzione converge totalmente su $\mathbb{R}$

1) $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{M_n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Per il criterio di Weierstrass la serie converge uniformemente.

SERIE DI POTENZE

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_0, a_1, a_2, \dots$ successione numerica, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

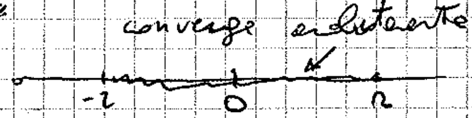
è detta serie di potenze centrata in x_0

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serie geometrica

Proposizione: Consideriamo una serie centrata in $x_0 = 0$.

Data la serie $\sum_{n=0} a_n x^n$ se essa converge in un punto $x = r$ con $r \neq 0$ allora converge assolutamente $\forall x : |x| < |r|$

Dimostrazione



Vogliamo dimostrare che la serie $\sum_{n=0} |a_n x^n|$ converge se $|x| < |r|$.

Siccome la serie degli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge allora $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$, quindi $\exists M : |a_n r^n| \leq M \quad \forall n \geq 0$

$$|a_n x^n| = \underbrace{|a_n r^n|}_{\leq M} \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{r}\right|^n$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{r}\right|^n$ è una serie geometrica di ragione

$\frac{x}{r} < 1$ $(|x| < |r|$ x Hp$)$ e quindi convergente

Per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0} |a_n x^n|$ converge.

c.v.d.

Definizione: Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si definisce raggio di convergenza

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Osservazione: R è ~~naturale~~ numero reale ≥ 0 o $R = +\infty$

Infatti in $x=0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots = a_0$ quindi converge. Di conseguenza $R \geq 0$ o $+\infty$

Teorema: Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possono verificarsi i seguenti casi:

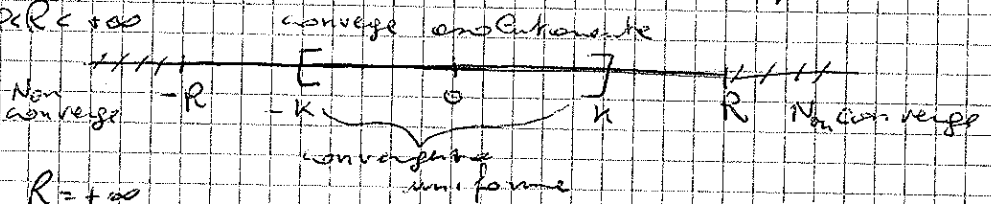
1) $R=0$. Allora la serie converge solo in $x=0$

2) $0<R<+\infty$ Allora la serie non converge se $|x|>R$ e converge assolutamente in $(-R,R)$ e converge uniformemente su ogni ~~intervallo~~ sotto-intervallo chiuso (del tipo $[-K,K], 0<K<R$)

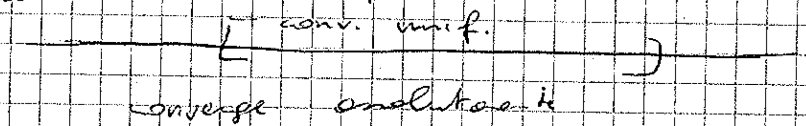
3) $R=+\infty$ Allora la serie converge assolutamente $\forall x\in\mathbb{R}$ e converge uniformemente su ogni intervallo chiuso (del tipo $[-K,K]$, $K>0$)

Osservazioni: - Se $R=0$ l'insieme di convergente $=\{0\}$

- Se $0<R<+\infty$



- Se $R=+\infty$



Dimostrazione del teorema:

Noi sappiamo che se la serie converge in $x=\bar{R}\neq 0$ allora converge assolutamente $\forall |x|<|\bar{R}|$

Mostriamo che se $R<+\infty$ e $|x|>R$ allora la serie non converge in x

Se la serie convergesse in x dovrebbe convergere in tutto l'intervallo $(-|x|,|x|)$ che va contro la definizione di raggio di convergenza.

Ora mostriamo che se $R>0$ e $0<K<R$ la serie converge totalmente su $[-K,K]$

Dalla definizione di R $\exists r$ $K<r<R$ in cui la serie converge. Quindi la serie converge assolutamente in $x=K$ $(0<K<R)$. Ossia la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n K^n|$ converge.

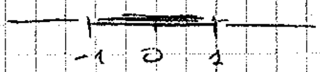
$\forall x \in [-k, k]$ $\quad |a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq |a_n| k^n = \underbrace{|a_n k^n|}_{M_n}$

Inoltre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n k^n|$ converge.

Quindi la serie converge totalmente su $[-k, k]$
per Weierstrass converge uniformemente.

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$

Insieme di convergenza $(-1, 1) \Rightarrow$ raggio di convergenza $R = 1$



In $x = \pm 1$ la serie non converge

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Se $0 < x < 1$ la serie converge la serie è a termini positivi e $\frac{x^n}{n} \leq x^n$

Se $x > 1$ la serie è a termini positivi ma non converge perché

$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty$

$R = 1 \Rightarrow$ la serie converge in $(-1, 1)$

In $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non converge

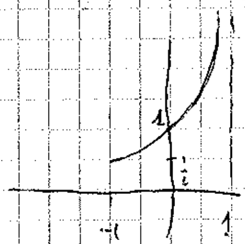
$x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz

Quindi l'insieme di convergenza è $[-1, 1)$

Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$ non c'è convergenza uniforme in $(-1, 1)$

$f_n(x^n) = x^n$ è limitata su $(-1, 1)$, $\forall n$, ma $f(x) = \frac{1}{1-x}$ no

Quindi non c'è convergenza uniforme su $(-1, 1)$



Teorema di Abel: Sia R il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Se la serie

1) converge in $x = R$, allora converge uniformemente su $[-k, R]$ per ogni $0 \leq k < R$

2) converge in $x = -R$, allora converge uniformemente su $[-R, k]$ per ogni $0 \leq k < R$

3) Se la serie converge in $x = R$ e in $x = -R$, allora converge uniformemente su $[-R, R]$

__Teorema 1__: Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, supponiamo che esiste ~~finito~~ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

Allora

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases} \qquad \boxed{(*)}$$

__Teorema 2__: Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, supponiamo che $a_n \neq 0$ per n grande e che esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$$

Allora vale $\boxed{(*)}$

(Idea
__Dimostrazione Teorema 1__: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ applico criterio radice

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \underbrace{\sqrt[n]{|a_n|}}_{\ell} \cdot |x| \Bigg)$$

__Teorema__
__Somma di serie di potenze__ Date $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ con raggi di convergenza R_1 e R_2 rispett. vamente. La serie somma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ ed $R = \min\{R_1, R_2\}$ se $R_1 \neq R_2$.

__Proprietà__: 1) Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R>0$ la sua somma è una funzione derivabile $(S(x))$ su $(-R, R)$ e

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \quad \text{se } |x| < R$$

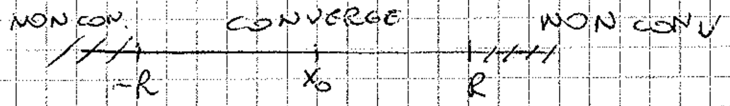
dove $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R

2) Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$ risulta che

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{se } |x| < R \quad \text{e la serie}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$ ha raggio di convergenza R.

Proprietà: $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$ converge in $(x_0-R,\ x_0+R)$ e non converge in $|x-x_0|>R$



R si determina con le formule viste in precedenza.

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}$$ solo se $|t|<1$

Preso $x \in (-1,\ 1)$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \log(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1^n)\, t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log(1+x) \quad \text{per } |x|<1$$

$n+1=k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \log(1+x) \quad (*)$$

Osservazione $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$

Osservazione: La formula $(*)$ vale anche per $x=1$

Infatti

La somma della serie $S(x) = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ è definita in $[-1,\ 1]$ e continua sull'intervallo per conseguenza del Teorema di Abel

Ma $S(x) = \log(1+x)$ per $|x|<1$ pertanto

$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \log 2$ ossia

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2$$

Esercizio: Trovare lo sviluppo di $\arctg(x)$ partendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \frac{1}{1+t^2} \qquad |t|<1$$

Prodotto alla Cauchy di due serie di potenze:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

Prodotto:

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + \dots \\ & + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \dots \\ & + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + \dots \end{aligned}$$

Si definisce prodotto alla Cauchy delle due serie date una serie di potenze:

$a_0 b_0 + x(a_0 b_1 + a_1 b_0) + x^2 (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$

che è

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Teorema: Il prodotto alla Cauchy di due serie di potenze ha raggio di convergenza $\geq$ al ~~massimo~~ minimo dei raggi delle due serie date e ha come somma il prodotto delle due somme (laddove convergono entrambe)

Esercizio: Calcolare il prodotto alla Cauchy delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad e \quad \sum_{n=0} 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$$

FUNZIONI ANALITICHE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabile in x_0

Definizione: Si dice serie di Taylor della funzione f centrata in x_0 la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Domande: 1) La serie converge per qualche $x \neq x_0$?

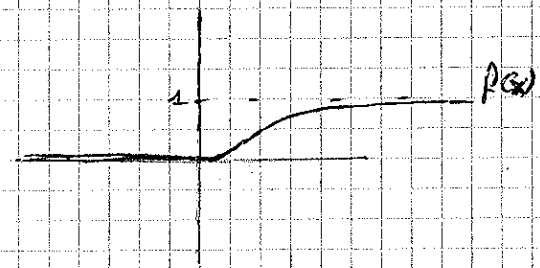
2) Se converge in un intorno di x_0 allora ha per somma $f(x) = ?$

Risposta: 1) In generale, no.

2) No, in generale.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \ge 0$

Serie di Taylor in $x_0 = 0$ è $0 + 0x + 0x^2 + \dots$ ha somma $S(x) = 0$ $\forall x$ però non converge ad $f(x)$.

Definizione: Data una funzione definita e C^∞ su un intervallo I e un punto $x_0 \in I$, allora f si dice analitica in x_0 se la sua serie di Taylor centrata in x_0 converge in un intorno x_0 a $f(x)$.

f si dice analitica in I se è analitica in ogni punto di I.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

NON È ANALITICA IN $x_0 = 0$

Esempio: $\log(1+x)$ è analitica in $x_0 = 0$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad |x| < 1$$

Esempio: Ogni polinomio è una funzione analitica in $\mathbb{R}$.

Criterio di analiticità o di sviluppabilità in serie di Taylor:

Sia f una funzione definita e C^∞ su un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Supponiamo che esista $M > 0$ tale che

$$|f^{(n)}(x)| \le M \frac{n!}{\delta^n} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

e per ogni n sufficientemente grande. Allora la serie di Taylor di f ha raggio di convergenza almeno δ ~~centro~~ e la sua somma è $f(x)$ sull'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

In particolare f è analitica in x_0

Osservazione: la conclusione vale anche se invece di $|f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{\delta^n}$ si assume

$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ e $\forall n$ sufficientemente grandi

Perché $|f^{(n)}(x)| \leq M$ implica $|f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{\delta^n}$.

Esempio: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Sia $\delta > 0$ $f^{(n)}(x) = e^x$

$$e^x \leq e^{x_0+\delta} = M \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n = e^x \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

δ è arbitrario quindi vale su tutto $\mathbb{R}$

Se $x_0 = 0$ $\quad e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio: Dimostrare che $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono analitiche.

RISOLUZIONE PER SERIE DI EQ. DIFFERENZIALI

Consideriamo $y' = y$ e $y(0) = 1$

$y(x)$ è la funzione incognita.

Cerco la soluzione

$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$a_0 = 1$ ipotesi iniziale

$a_1 = a_0 = 1$

$2a_2 = a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 1/2$

$3a_3 = a_2 = 1/2 \Rightarrow a_3 = 1/6 = 1/(2\cdot 3)$

$\vdots \quad a_4 = 1/24 = 1/(2\cdot 3\cdot 4)$

$\vdots$

$a_n = 1/n!$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

Bisogna controllare raggio di convergenza (se positivo)

SERIE DI FOURIER

Definizione: Una serie di Fourier è una serie del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin(nx) \right] =$$

$$= a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

Richiamo: Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T>0$ se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Es:

$f(x) = \sin(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi$

$f(x) = \sin(2x)$ è periodica di periodo $T = \pi$, ma anche 2π

Osservazione: Se f è periodica di periodo T ed è integrabile su intervalli limitati

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx \quad \text{è indipendente dalla scelta di } x_0$$

Proprietà: Ogni funzione del tipo $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right]$ con $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ è periodica di periodo 2π. Questo tipo di funzione è detto Polinomio trigonometrico di grado n.

Notazione: Denotiamo con P_n l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado $\leq n$ che è uno spazio vettoriale di dimensione $2n+1$

Esempio: $f(x) = 5 - 7\cos 3x + \sin 4x + \sin 6x$ è un polinomio trigonometrico di grado 6.

Quindi $f(x) \in P_6$

Osservazione: La somma parziale $S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_n \cos(kx) + b_n \sin(kx) \right]$ è un polinomio trigonometrico di grado $\leq n$

Sia $f(x)$ periodica di periodo 2π. Cerchiamo a_0, a_n, b_n:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right]$$

Integro su $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx}_{=0}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Cerco il coefficiente a_k: moltiplico per $\cos(kx)$ e integro su $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \overset{\cos(nx)}{\vee} dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} a_0 \cos(nx)}_{=0} + \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx}^{a_n \pi} + \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx}^{=0}$$

Richiamo

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \pi & n = k \end{cases} \qquad \text{Se } n, k \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(nx) = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \pi & n = k \end{cases} \qquad \text{Se } n, k \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(nx) = 0 \qquad \forall n, k \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) = a_n \pi \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$$

Cerco il coefficiente b_n: moltiplico per il $\sin(nx)$ e integro su $[0, 2\pi]$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$$

Data una funzione integrabile f integrabile su $[0, 2\pi]$ e di periodo 2π, la sua serie di Fourier è

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right]$$

dove a_0, a_n, b_n, $n \geq 1$ sono dati dalle 3 formule precedenti

Problema: La serie di Fourier di f converge a f su $[0, 2\pi]$?

Osservazioni: ① a_0 rappresenta la media di $f(x)$ su un periodo

② Se f è pari allora

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}_{=0} = 0$$

③ Se f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$.

Risposta al problema: Per rispondere al problema dobbiamo utilizzare un'interpretazione geometrica

Richiamo

Def: Sia E uno spazio vettoriale reale. Un prodotto scalare semidefinito è un'applicazione $(\cdot|\cdot): E\times E \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

1) $(x|x) \geq 0 \quad \forall x \in E$
2) $(x|y) = (y|x) \quad \forall x, y \in E$
3) $(x|\alpha y + \beta z) = \alpha(x|y) + \beta(x|z)$

Inoltre se $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ed il prodotto scalare si dice definito positivo.

Prop: Il prodotto scalare semidefinito positivo induce una seminorma

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}, \quad x \in E$$

Prop: 1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in E$

3) $\|x+y\| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in E$ (Disug. triangolare)

Se il prodotto scalare è definito positivo allora $\|x\|$ è una norma cioè vale la seguente ulteriore proprietà

Se $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Esempio: 1) $E = \mathbb{R}^n$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \quad \text{è definito positivo}$$

2) $E = \mathbb{R}^2 \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$(x|y) = x_1 y_1 \quad \text{è semidefinito positivo}$$

③ Sia E lo spazio vettoriale delle funzioni integrabili su $[0, 2\pi]$

definiamo su E il prodotto scalare:

$f, g \in E$

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$ è semidefinito positivo, ma non definito positivo

Infatti se $f(x) = 0$ tranne che in un numero finito di punti allora $(f|f) = 0$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx}$$

(Semi-) norma L^2

Dato E con prodotto scalare $x, y \in E$ si dicono ortonormali se $(x|y) = 0$

un sistema di vettori $\in E$ si dice sistema ortonormale se

$(e_n | e_k) = 0$ se $n \neq k$

$(e_n | e_k) = 1$ se $n = k$

<u>Teorema della proiezione</u> Sia E uno spazio vettoriale con prodotto scalare semi-definito positivo e sia $P \subseteq E$ un sotto-spazio di dimensione finita, e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di P. Allora $\forall f \in E$ esiste un unico elemento $x \in P$ tale che

$$\|f - x\| \leq \|f - z\| \quad \forall z \in P \quad \text{ossia}$$

$$\|f - x\| = \min \{ \|f - z\|,\ z \in P \}$$

Inoltre $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, con $c_k = (f | e_k)$ e vale il teorema di Pitagora:

$$\|f\|^2 = \|f - x\|^2 + \|x\|^2 = \|f - x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Noi applichiamo il teorema della proiezione con

$E = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \text{ integrabili} \}$ con

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{e} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx}$$

Prendiamo come $P = P_n$ lo spazio dei polinomi trigonometrici di grado $\leq n$

Una base ortonormale di P_n è data da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx); \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) \right\}$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \qquad \|g(x)\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,dx} = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx \qquad \|g\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\cos(kx)\,dx} = 1$$

$k \geq 1$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \qquad \|g\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\sin^2(kx)\,dx} = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos(kx)\,dx = 0 \qquad k \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(hx)\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\cos(kx)\sin(hx) = 0 \qquad k \neq h$$

etc.

quindi è base orto-normale

Presa $f \in E$ la sua proiezione ortogonale su P_n è

$$\sqrt{2\pi}\, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x)\sqrt{\pi}\, a_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x)\sqrt{\pi}\, a_1 + \sqrt{\pi}\, a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) + \sqrt{\pi}\, b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$$

$= \underline{S_n}$ ridotta n-esima della serie di Fourier

dove

$$\left(f \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\, a_0$$

$$\left(f \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \sqrt{\pi}\, a_k, \quad k \geq 1$$

$$\left(f \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx) = \sqrt{\pi}\, b_k, \quad k \geq 1$$

con a_0, a_k, b_k coeff. di Fourier di f

<u>Conseguenze del teorema delle proiezioni</u>: 1) S_n è il polinomio trigonometrico $\in P_n$ che meglio approssima f nella norma quadratica tra tutti i polinomi trigonometrici di grado $\leq n$

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f-g\|_2 \qquad \forall g \in \mathbb{P}_n$$

② $$\|f\|_2^2 = \|f - S_n\|_2^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) + 2\pi\, a_0^2$$

③ $2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|_2^2$ prendendo il $\lim_{n\to\infty}$ si trova che

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|_2^2$$

disuguaglianza di Bessel

④ $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ converge. Quindi $a_k^2 + b_k^2 \to 0$

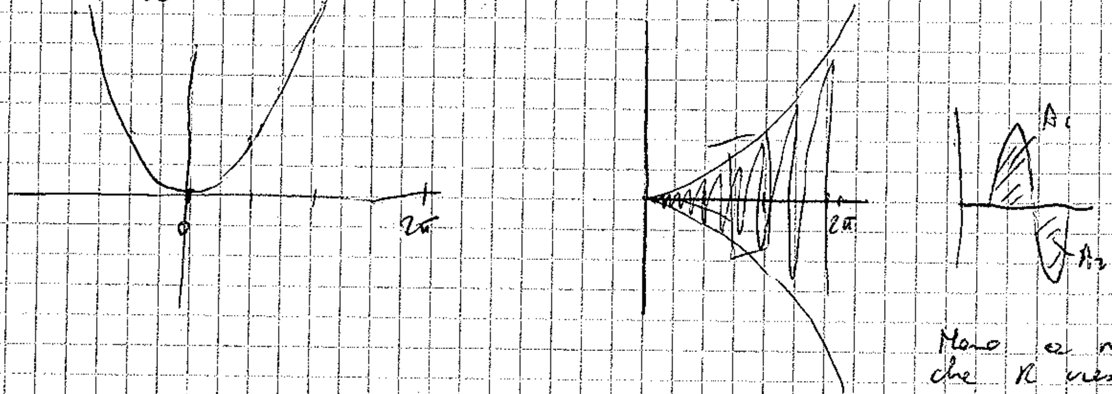
ma $|a_k| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Poiché $\sqrt{a_k^2+b_k^2} \to 0$ anche $a_k \to 0$

Lo stesso vale per b_k. Quindi sia a_k che b_k tendono a 0

⑤ <u>Lemma di Riemann - Lebesgue</u> Se f è integrabile su $[0, 2\pi]$ e a_k, b_k sono i suoi coefficienti di Fourier allora $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$

<u>Osservazione sul Lemma di Riemann - Lebesgue</u>

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \to +\infty$$



Mano a mano che k cresce

A_1 è sempre più simile ad A_2 e quindi si cancellano

Esempio: Esiste una funzione la cui serie di Fourier è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$$

Se esistono $b_n = 0$ e $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge quindi questa non è la serie di Fourier di una funzione (integrabile)

Definizione: Si dice che una successione di funzioni f_n integrabile su $[0,2\pi]$ converge in L^2 o in norma quadratica alla funzione f integrabile su $[0,2\pi]$ se $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ ossia se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_0^{2\pi} [f_n(x) - f(x)]^2 dx} = 0$$

Proprietà: Se $f_n \to f$ uniformemente allora $f_n \to f$ in L^2

Teorema (di convergenza in L^2): Data f periodica ed integrabile in $[0,2\pi]$ allora la sua serie di Fourier converge a f in L^2, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

Conseguenza: $$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

identità di Parseval

Teorema di convergenza puntuale: Sia f periodica e soddisfacente una delle seguenti condizioni:

1) f è regolare a tratti, cioè derivabile eccetto al più per un numero finito di punti in un periodo dove tuttavia esistono finiti i limiti destro e sinistro della funzione e della derivata prima

2) f è monotona a tratti

3) f è derivabile eccetto al più per un numero ~~fini~~ finito di punti in un periodo e se x_0 è uno di questi punti, esistono finiti

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$

e le cosiddette pseudoderivate

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$$

Allora in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier converge in $x=x_0$ a $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+)+f(x_0^-)\right]$
In particolare se f è continua in x_0 allora in $x=0$ la serie converge a $f(x_0)$

<u>Teorema di convergenza uniforme</u>: Se f è periodica, regolare a tratti e continua la sua serie di Fourier converge uniformemente su $\mathbb{R}$.
Più in generale se f è regolare a tratti la sua serie di Fourier converge uniformemente a f sui sotto intervalli chiusi su cui f è continua.

<u>Esempio</u>: $f(x) = x^2$ per $0 \leq x < 2\pi$ è prolungato per periodicità

1) Converge in L^2 perchè f integrabile su $[0, 2\pi]$
2) funzione è regolare a tratti, quindi la sua serie di Fourier converge a $f(x)$ per ogni $x \neq 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ mentre converge a $2\pi^2$ per $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3) Non converge uniformemente perchè f non è continua.

<u>Serie di Fourier in forma complessa</u>

Ricordiamo che la serie di Fourier in forma reale è

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos kx) + b_k (\sin kx) \quad \text{e} \quad S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

Ricordiamo inoltre che se $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad \text{Formula di Eulero}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

Posto $\theta = kx$ e andando a sostituire in S_n si ha che

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \left(c_k e^{ikx} \right)$$

con $$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Quindi la serie di Fourier in forma complessa si scrive

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \to +\infty} (S_n)$$

Vantaggi:

- formula unica per tutti i coefficienti
- formula di Parseval sono molto più semplici:

$$\| f \|_2^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

- Sono valide se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica di periodo 2π
- $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ prodotto scalare in L^2 e

$$\| f \| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}$$

<u>Osservazioni</u>: Se il periodo è $T > 0$ allora la serie di Fourier è

$$a_0 + \sum \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right)$$