Richiami di funzioni differenziabili in più variabili

in $\mathbb{R}^2$ $\quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Se $y \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ allora

$B(y, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < R\}$ palla aperta di centro y e raggio R

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall x \in A \ \exists R > 0 : B(x, R) \subset A$

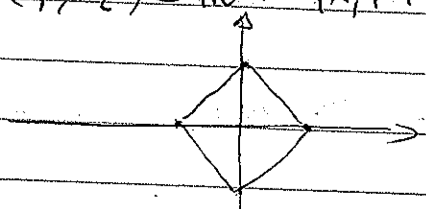
es $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ è aperto

$\{\quad " \quad " \quad " \quad\} \cup (0, 0)$ non è aperto (e neanche chiuso)

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se (è contenuto in una palla sufficientemente grande) $\exists R > 0 : A \subset B(0, R)$

- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato

es $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$: compatto in $\mathbb{R}^2$



Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua allora $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ è chiuso

$[1, +\infty] \subset \mathbb{R}$ è chiuso, ma non limitato
quindi non compatto

- Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $P_0 \in A$ si dice interno se $\exists\, R>0$: $B(P_0, R) \subset A$

es: $A = [0, 1]$. Ogni punto $x \in (0, 1)$ è interno ad A mentre $x = 1$ no.

- Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice esterno se $\exists$ $R>0$: $B(P_0, R) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$

es $A = [0, 1]$, tutti i punti $x<0$, $x>1$ sono esterni.
$x=0$ non è esterno

- Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$: $\forall R>0$, $B(P_0, R) \cap A \neq \emptyset$ e $B(P_0, R) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

es $A = [0, 1]$ i punti $x=0, x=1$ sono di frontiera

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
$C^0(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, $K = 1, 2, \ldots$

$C^K(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}$ che possiedono derivate parziali continue fino all'ordine $K \}$

Se $I \in \mathbb{R}$ è intervallo $\Rightarrow$ una curva in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$

La curva si dice regolare se γ è di classe C^1 ($\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in C^1(I)$) e ~~la norma~~ $\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$

FUNZIONI IMPLICITE

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$

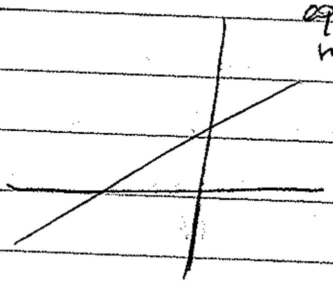
$(f : \Omega \to \mathbb{R})$

$f(x,y) = 0$

Se è questo è possibile esplicitare rispetto ad una delle due variabili? $(y = \varphi(x))$

<u>Esempio</u>: $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ se $b \neq 0$

eq. in forma implicita — eq. in forma esplicita

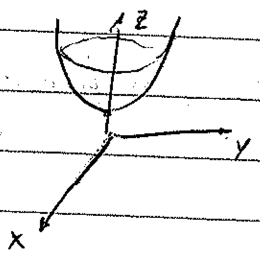


Ricordiamo che se $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il grafico di φ è
$\{(x,y) \in A \times \mathbb{R},\ y = \varphi(x)\}$

<u>Esempio</u>: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ non ci sono soluzioni

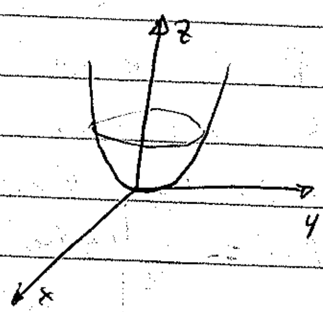
$\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\} \Rightarrow \Gamma = \emptyset$



$z = f(x,y)$

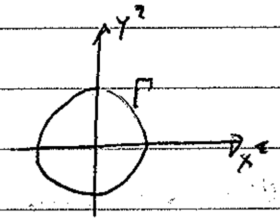
<u>Esempio</u>: $f(x,y) = x^2 + y^2$

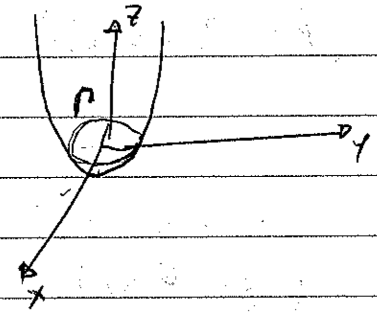
$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$



esempio: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1=0\} =$$





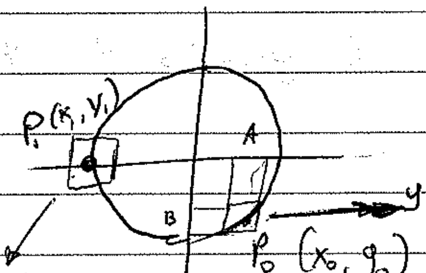
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Γ = circonferenza di centro origine e raggio 1 non è il grafico di una funzione (non esiste $A \subset \mathbb{R}$, $\varphi : A \to \mathbb{R} : \Gamma = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\}$)

La f non è esplicitabile globalmente rispetto a y

Consideriamo un punto dell'insieme Γ

In un intorno di P_0 è possibile esplicitare la funzione?



$y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in A$
$(\Gamma \cap A \times B)$

in questo rettangolo non si può esprimere y in funzione di x

Nell'intorno di $(1,0)$ non è esplicitabile y in funzione di x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad 2y = 0 \iff y = 0$$

Teorema della funzione implicita (U. DINI 1877)

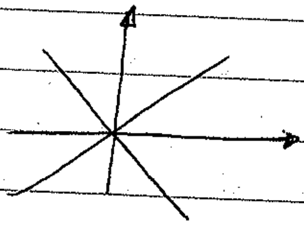
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1, $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(P_0) = 0$ $\boxed{*}$ Allora $\exists\, A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ aperti con $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$ tale che $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B : f(x,y) = 0$. La funzione $y = \varphi(x)$ così definita $\varphi : A \to B$ soddisfa $\varphi(x_0) = y_0$, è di classe C^1 su A e la derivata $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x,\varphi(x))}}{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x,\varphi(x))}}$, $x \in A$

$\boxed{*}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \neq 0$

OSSERVAZIONI

1) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in A$

$$f(x,y) = (x-y)(x+y), \quad P_0(0,0)$$



$f(x,y) = 0$

in un intorno di $(0,0)$ non posso esplicitare la y in funzione di x

tuttavia se prendo $\varphi(x) = x \Rightarrow f(x, \varphi(x)) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Se voglio esplicitare la x in funzione y $(x = \varphi(y))$ basta richiedere che $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \neq 0$

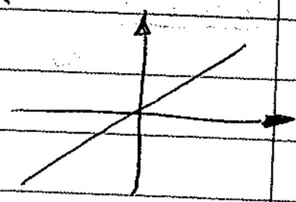
3) Se il $\nabla f(P_0) \neq (0,0)$ posso ricavare in un intorno di P_0, la y in funzione di x o viceversa.

4) Le condizioni sono sufficienti non necessarie

esempio $\quad f(x,y) = (y-x)^2 \qquad (y-x)^2 \Leftrightarrow y = x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(y-x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-x)$$



5) Per $x = x_0$

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Richiamo:

Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\quad f(x,y)$

$$\frac{d f(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$$

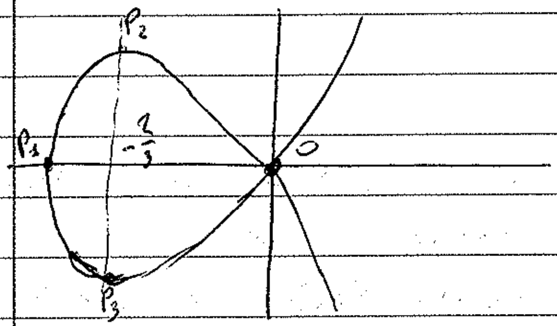
$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in A$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\varphi'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

esempio:

$$f(x,y) = y^2 - x^2 - x^3 = 0$$



~~Il teorema~~

Si può esplicitare la y in funzione di x in tutti i punti (nell'intorno) tranne che in O e P_1, mentre si può esplicitare x in funzione di y nell'intorno di tutti i punti tranne P_2, P_3, O.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$x=0,\ x=-\frac{2}{3}$ $\qquad$ $y=0$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

O, P_2, P_3 $\qquad$ P_1, O

esercizio $\quad f(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad P_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

calcolare $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}^p$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $\quad y = (y_1, \dots, y_p)$

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \end{pmatrix}$$

$$(1)\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = 0 \end{cases} \Longrightarrow (2)\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_p = \varphi_p(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow f(x,y) = 0$ $\qquad$ $(2) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ dove $\varphi(x_1, \dots, x_n) =$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = J_y f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$ Matrice Jacobiana

Teorema della funzione implicita (DINI) per i sistemi

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}^p$ di classe C^1, $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(P_0) = 0$, $\det J_y f(P_0) \neq 0$. Allora $\exists\, A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$ aperti ~~tali che~~ $\cancel{A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^p}$, $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ tali che $\forall x \in A$ $\exists!\, y \in B \,/\, f(x,y) = 0$. La funzione $\cancel{f(x,y)=0}$ $\varphi(x) = y$ così definita $(\varphi: A \to B)$ soddisfa $\varphi(x_0) = y_0$, inoltre è di classe C^1 su A e

$$J\varphi(x) = -\left[J_y f(x, \varphi(x))\right]^{-1} \cdot \left[J_x f(x, \varphi(x))\right]$$

Esempio 1: $(n=2,\ p=1)$

$$f(x,y,z) = 0$$

Localmente in un intorno di un punto P_0 è esplicitabile rispetto a z se $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \neq 0$. Cioè si può scrivere $z = \varphi(x,y)$

Esempio 2: $(n=1,\ p=2)$

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{vogliamo ottenere}} (*) \begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

se P_0 soddisfa il sistema e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

allora in un intorno di P_0 tutte le terne (x,y,z) soluzioni del sistema sono date da queste formule $(*)$ per delle opportune funzioni φ_1, φ_2

Invertibilità locale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 (*)

Problema: risolvere l'equazione $f(x) = y$ (1) dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ mentre $y = (y_1, \dots, y_n)$ assegnato.

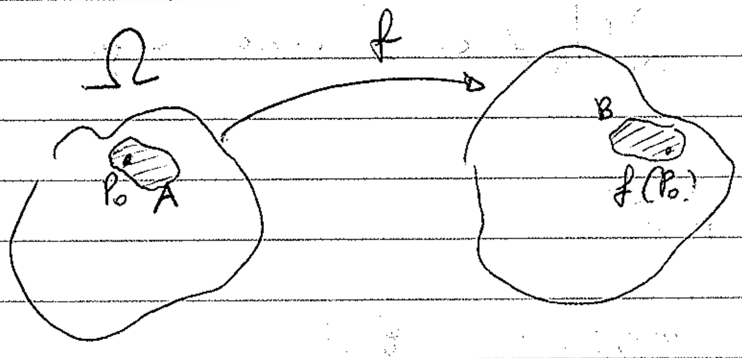
$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$(1) \iff \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

Teorema di invertibilità locale

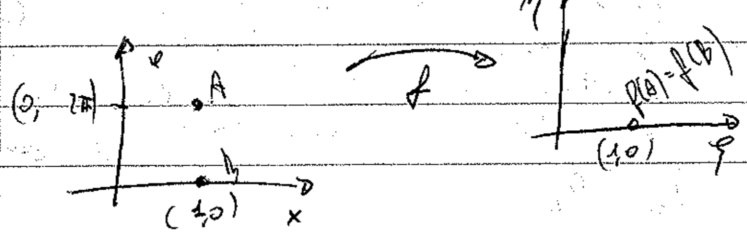
Supponiamo (*) e sia $P_0 \in \Omega$ / $\det(Jf)(P_0) \neq 0$.
Allora $\exists$ aperti A e $B \subset \mathbb{R}^n$, $P_0 \in A$, $f(P_0) \in B$ / $f : A \to B$ è biezione. Inoltre la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ è di classe C^1 e

$$(Jf^{-1})(P) = \left[Jf(f^{-1}(P)) \right]^{-1} \quad \forall P \in B$$



Esempio:
$$\begin{cases} \xi = x \cos y \\ \eta = x \sin y \end{cases} \qquad \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \} \text{ (aperto)}$$

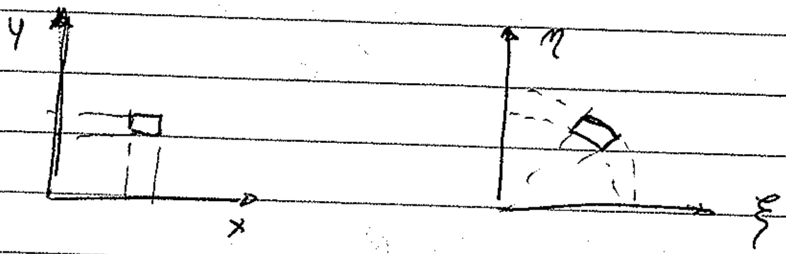
$$f(x,y) = (x \cos y, \, x \sin y)$$



f è localmente invertibile perché

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

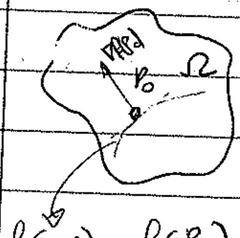
$$\det\left(Jf(x,y)\right) = x \neq 0 \quad (\text{perché } x>0)$$



è localmente invertibile
NO globalmente

Curve di livello di una funzione

Proposizione: sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ di classe C^1, $P_0\in\Omega$. Se $\nabla f(P_0)\neq(0,0)$ allora in un intorno di P_0 l'insieme di livello di f passante per P_0 è il sostegno di una curva regolare il cui vettore tg in P_0 è ortogonale a $\nabla f(P_0)$



dimostrazione: Supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\neq 0$. Allora se $P_0=(x_0,y_0)$ il teorema delle funzioni implicite applicato all'equazione $f(x,y)-f(P_0)=0$ in P_0 ci garantisce l'esistenza di un intorno aperto $A\subset\mathbb{R}$ ~~di P_0~~ intervallo aperto contenente x_0 e una funzione $\varphi: A\to\mathbb{R}$ / in un intorno di P_0 le soluzioni (x,y) di $f(x,y)-f(P_0)=0$ sono esattamente i punti sul grafico di φ ossia quelli soddisfacenti $y=\varphi(x)$ con $x\in A$. ~~Essa~~ Quindi in un intorno di P_0 la curva l'insieme di livello coincide con il sostegno della curva $\gamma(t)=(t,\varphi(t))$, $t\in A$

$\gamma'(t) = (1,\varphi'(t)) \Rightarrow$ curva è regolare

$\gamma'(x_0) = (1,\varphi'(x_0)) = \left(1, -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}\right)$ è ortogonale a $\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$

$\gamma'(P_0)\cdot\nabla f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ ortogonali

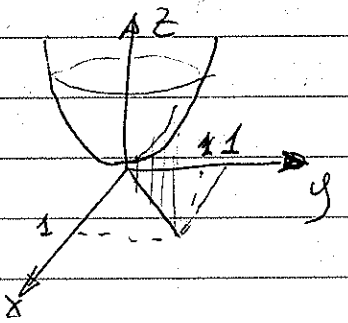
ESTREMI VINCOLATI

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $G \subset \Omega$

Definizione: $P_0 \in G$ si dice punto di max vincolato di f su G se $\exists R>0 \,/\, f(P_0) \geq f(P)$ $\forall P \in G \cap B(P_0,R)$

Definizione: $P_0 \in G$ si dice di max assoluto vincolato di f su G se $f(P_0) \geq f(P)$ $\forall P \in G$

Esempio: $f(x,y) = x^2+y^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $G = \{(x,y) \leq \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1, x=y\}$



il punto $(0,0)$ è di min assoluto vincolato
il punto $(1,1)$ è di max assoluto vincolato

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Sia $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$

Supponiamo che $P_0 \in G : \nabla g(P_0) \neq (0,0)$ (cioè P_0 è regolare per g). Allora se P_0 è un punto di max o min vincolato di f su G $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$

dimostrazione:

applicando la proposizione precedente a $g(x,y)=0$ si ha che G in un intorno di P_0 è il sostegno di una curva regolare $\gamma : A_{\in \mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ (con A intervallo aperto). Sia $t_0 \in A \,/\, \gamma(t_0) = P_0$ ~~Basta far vedere~~ Sappiamo già che il gradiente di G in P_0 è $\perp$ a $\gamma'(t_0)$. Basta mostrare che anche il $\nabla f(P_0) \perp \gamma'(t_0)$

Se P_0 è un punto di max vincolato, allora la funzione composta $f(\gamma(t))$, $t \in A$ ha un max locale in t_0 $(f(\gamma(t_0)) \geq f(\gamma(t))$ per t vicino a $t_0)$

quindi $\frac{df(\gamma(t_0))}{dt} = 0$

se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $0 = \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t)$

$$= \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

Definizione: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 $\Rightarrow$ L'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega : g(x,y) = 0\}$ si dice varietà (Differenziabile) se $\forall (x,y) \in \Gamma$ è un punto regolare per g, ossia $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in \Gamma$

nello spazio:

Sia $g: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x,y,z) \in \Omega : g(x,y,z) = 0\}$ si dice varietà (differenziabile) se $\forall (x,y,z) \in \Gamma$ è un punto regolare per g, ossia $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0)$ $\forall (x,y,z) \in \Gamma$

ES $\Gamma \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$ è una varietà

$$\nabla g = (2x, -1) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in \Gamma$$

ES: $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y^2 - x^3 = 0\}$

$$\nabla g = (-3x^2, 2y) \quad \text{se } (x;y) = (0,0) \Rightarrow \nabla g = (0,0)$$

$$\Downarrow$$

Γ non è una varietà

$\Gamma' = \Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è varietà

Es Cercare i max e min vincolati di $f(x,y) = x$ sull'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y^2 - x^3 = 0\}$

$x = 0$ min assoluto vincolato, mentre non c'è max vincolato

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$$

dove

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

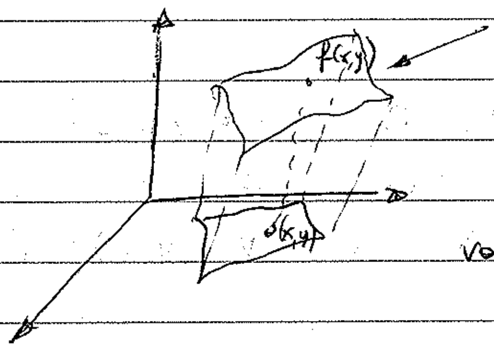
funzione lagrangiana

INTEGRALI MULTIPLI

Integrali doppi

$f(x,y) \geq 0$

$z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$



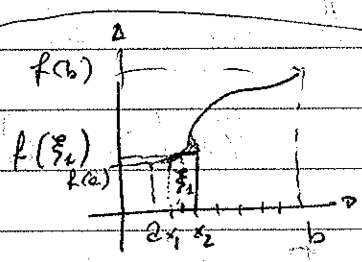
siamo interessati al volume di

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

volume $= \int_D f(x,y)\, dx dy$

Richiamo:

Sia $y = f(x)$, $x \in [a,b]$



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

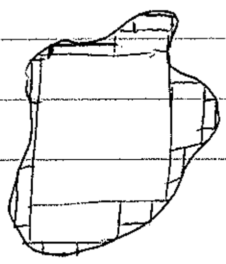
$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ $\quad 0 \leq j < n-1$

$\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$

$\sum_{j=0}^{j=n-1} \Delta x_j \cdot f(\xi_j) \longleftarrow$ somme di Riemann

Se f è continua, al tendere a 0 di Δx_j le somme di Riemann convergono ad un numero reale $S \in \mathbb{R}$ che viene indicato con $\int_a^b f(x) dx$

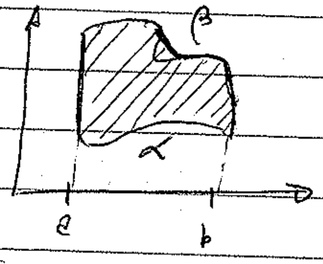
Ci si limita a considerare insiemi che si "approssimano bene" con una quadrettatura (insiemi misurabili secondo Peano-Jordan).



Noi consideriamo insiemi D compatti la cui frontiera è l'unione di un numero finito di grafici di funzioni continue (domini di integrazione)

Es. 1

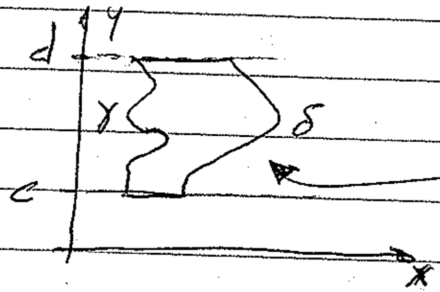
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \alpha(x) \le y \le \beta(x), \ x \in [a,b], \ \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$$



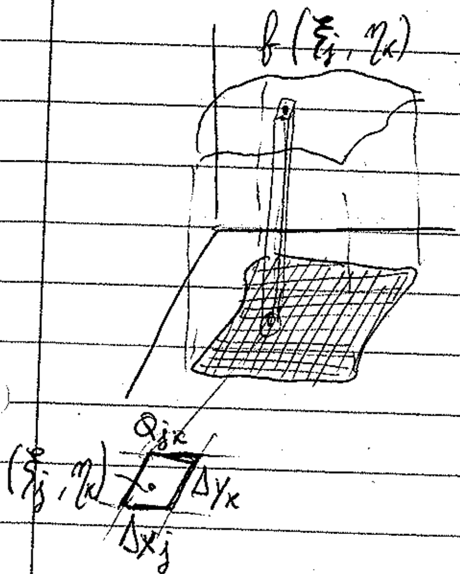
insieme verticalmente convesso

Es 2

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \gamma(y) \le x \le \delta(y), \ y \in [c,d], \ \gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$$



insieme orizzontalmente convesso



2) Dato un dominio di integrazione si considera una sua quadrettatura con quadretti Q_{jk} di dimensioni $\Delta x_j \cdot \Delta y_k$ e dei punti (ξ_j, η_k) e le somme di Rimman

$$\sum_{j,k} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \cdot \Delta y_k$$

Se f è continua si dimostra che al tendere a 0 delle dimensioni $\Delta x_j, \Delta y_k$ le somme di Rimman convergono ad un numero reale $V \in \mathbb{R}$ che si denota con $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$

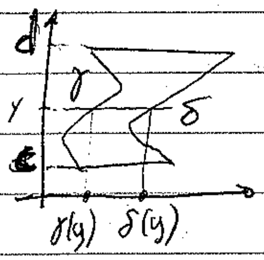
Proprietà:

- linearità: ~~$\int \lambda f(x) + \mu g(x)$~~ $\int_D \lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\,dx\,dy = \lambda \int f(x,y)\,dx\,dy + \mu \int_D g(x,y)\,dx\,dy$
- monotonia se $f(x,y) \le g(x,y) \ \forall (x,y) \in D \Rightarrow \int_D f(x,y)\,dx\,dy \le \int_D g(x,y)\,dx\,dy$
- integrale di $f \ge 0$ è ≥ 0 e ~~viceversa~~ integrale di $f \le 0$ è ≤ 0

- $\int_D 1\,dx\,dy = \text{area}(D)$

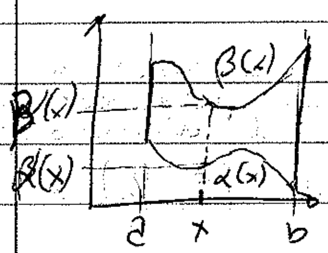
<u>Riduzione ad integrali iterati</u>

- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ y \in [c,d],\ \gamma,\delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue$\}$



$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \leftarrow$$ formula di integrazione per orizzontali

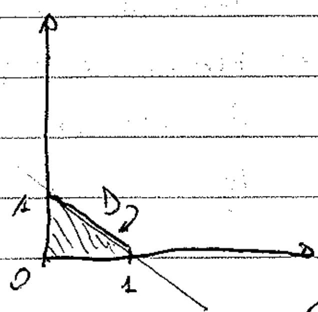
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ x \in [a,b],\ \alpha,\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue$\}$



$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

formula di integrazione per verticali

<u>Esempio</u>: $\int_D (1-x-y)\,dx\,dy \qquad D : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 1-x\}$



per orizz.: $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (1-x-y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(1-y - \frac{(1-y)^2}{2} - y(1-y)\right) dy$

$$= \int_0^1 \left(1-y - \frac{1+y^2-2y}{2} - y + y^2\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - 2y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

Integrali tripli

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

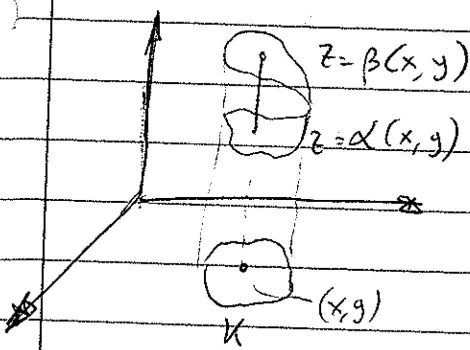
D compatto, detto dominio di integrazione

$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ è integrale triplo di f su D

Se $f(x,y,z)=1 \Rightarrow \int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$ volume di D

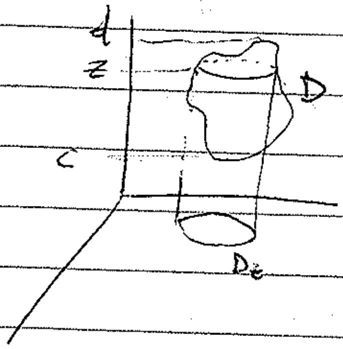
Integrazione per fili

$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \alpha(x,y) \le x \le \beta(x,y),\ (x,y)\in K \subset \mathbb{R}^2$ dominio di integrazione, $\alpha,\beta : K \to \mathbb{R}$ continue$\}$



$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_K\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

Integrazione per strati

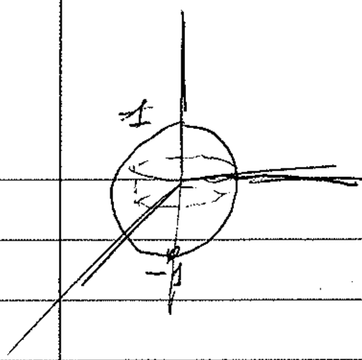


$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d\left(\int_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$$

$D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x,y,z)\in D\}$

Esempio: $\int_D z^2\,dx\,dy\,dz$ dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$

per strati: $D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1-z^2\}$



$$\int_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{D_z} z^2\,dx\,dy\right)dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} z^2\left(\int_{D_z} dx\,dy\right)dz = \int_{-1}^{1} z^2 \overbrace{\text{area}(D_z)}^{\pi r^2}\,dz =$$

$$\int_{-1}^{1} z^2\,\pi R\,(1-z^2)\,dz \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{2}{5}\pi = \frac{4\pi}{15}$$

<u>per fili</u> $\quad x^2+y^2+z^2 \le 1 \iff \underbrace{-\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\alpha(x,y)} \le z \le \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\beta(x,y)}$

proiez. di D su xy è $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

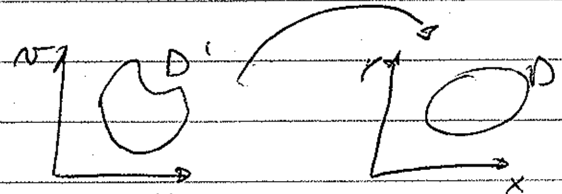
$$\int_D z^2\,dx\,dy\,dz = \int_K \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} z^2\,dz\right)dx\,dy = \int_K \left[\frac{z^3}{3}\right]_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dx\,dy =$$

$$= \int_K 2\cdot(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

<u>Cambi di coordinate</u>

Richiamo: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi: [a,b] \to [c,d]$ invertibile di classe C^1 ($\varphi'(x) > 0\ \forall x\in[a,b]$ oppure $\varphi'(x) < 0\ \forall x\in[a,b]$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx$$



<u>Teorema</u>:

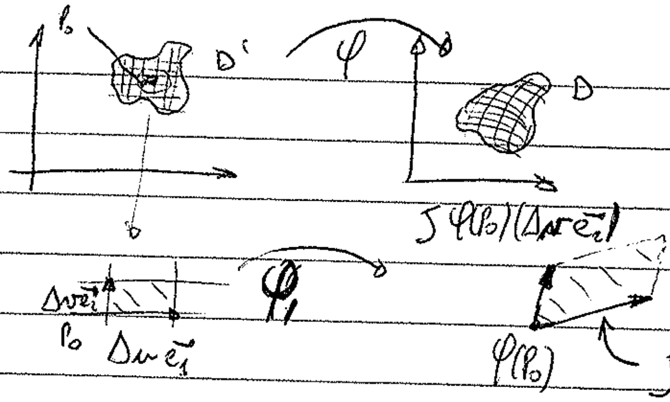
Data una mappa φ di classe C^1 su un aperto contenente D' tale che φ è invertibile e con $\det(J\varphi(P)) \ne 0$ $\forall P$ interno a D'. Allora posto $D = \varphi(D')$ risulta

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D'} f(\varphi(u,v))\,\left|\det(J\varphi(u,v))\right|\,du\,dv$$

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \varphi_2(u,v) \end{cases} \qquad J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Idea della dimostrazione ($f(x,y)=1$)

dobbiamo dimostrare che area $(D) = \int_{D'} |\det J\varphi(u,v)|\, du\, dv$



$$\varphi(P) = \underbrace{\varphi(P_0) + J\varphi(P_0)(P-P_0)} + o(P-P_0)$$

$$\text{area parallelogramma} = \left|\det\left(J\varphi(P_0)(\Delta u\vec{e_1}) \quad J\varphi(P_0)(\Delta v\vec{e_2})\right)\right|$$

$$\Delta u\,\Delta v \left|\det\underbrace{\left(J\varphi(P_0)\vec{e_1} \quad J\varphi(P_0)\vec{e_2}\right)}_{J\varphi(P_0)}\right|$$

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\det(J\varphi) = \rho > 0$$

Esempio: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\ \ x^2+y^2 < 1\}$

$$\int_D x\,dx\,dy \qquad D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

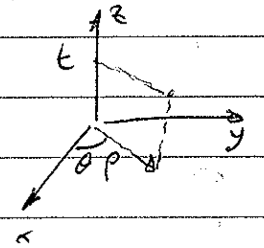
$$\int_D x\,dx\,dy = \int_{D'} \rho\cos\theta \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \rho^2\cos\theta\, d\rho\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

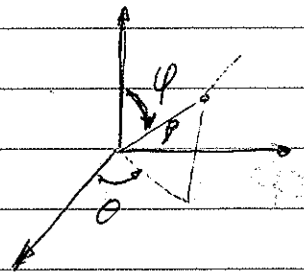
Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \rho \ge 0 \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$|\det \varphi| = \rho$$



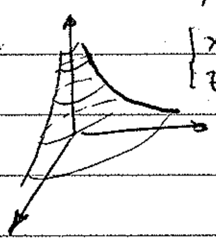
Coordinate sferiche



$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{matrix}$$

Solidi di rotazione

Richiamo: superficie di rotazione



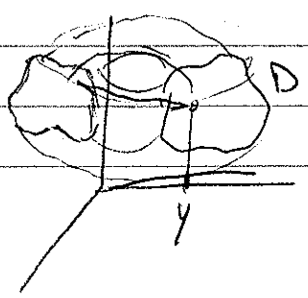
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = e^{-y} \end{cases}$$

superficie di rotazione $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

curve $\begin{cases} z = f(y) \\ x = 0 \end{cases}$, ruotando attorno all'asse z ~~genera~~ genera una superficie di equazione $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Dato un dominio di integrazione D contenuto nel I e IV quadrante del piano y, z, il solido K ottenuto ruotando D attorno all'asse z ha volume

$$V = 2\pi \int_D y \, dy \, dz$$



05/10/09

(10)

INTEGRALI di CURVA

RICHIAMO

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice semplice se è iniettiva, cioè se $t_1, t_2 \in [a,b]$ distinti allora $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Per dire se una curva è semplice bisogna verificare la parametrizzazione.

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è regolare e semplice la sua lunghezza è data da: $L = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt$

Definizione: integrale di curva di prima specie (integrale curvilineo)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (semplice e) regolare,

f definita e continua sul sostegno γ a valori reali ($f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$)

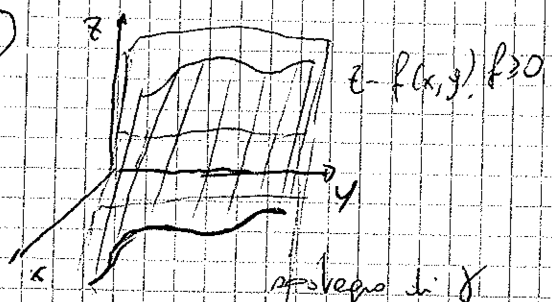
Si definisce integrale curvilineo di f su γ come

$$\int_\gamma f \quad \underset{\text{oppure}}{=} \quad \int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \| dt$$

Osservazioni:

① Se $f = 1 \; \forall x_1, \dots, x_n$ $\quad \int_\gamma f \, ds = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt = L$ lunghezza della curva

② Se f rappresenta la densità lineare del sostegno di γ, allora la massa totale del sostegno è $\int_\gamma f \, ds$

③ 

$\int_\gamma f$ rappresenta l'area $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, (x,y) \in \gamma([a,b]) \;\; 0 \leq z \leq f(x,y) \}$

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Una parametrizzazione $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ si dice equivalente (congruente) a γ se esiste una funzione biunivoca $\varphi : [a,b] \to [c,d]$, con $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$:

$$\gamma = \delta \circ \varphi = \delta(\varphi(t))$$

<u>Proprietà</u>: Se si sostituisce a γ con una parametrizzazione equivalente δ allora

$$\int_\gamma f = \int_\delta f$$

anche se la ~~nuova~~ parametrizzazione induce un altro verso di percorrenza.

$\boxed{\text{dimostrazione}}$

$$\cancel{u = \varphi(t) \Rightarrow \delta'(u) = \delta'(\varphi(t}$$

$$\cancel{\int_\delta f = \int_c^d f(\delta(u)) \|\delta'(u)\| du = \int}$$

$$\int_\delta f = \int_c^d f(\delta(u)) \|\delta'(u)\| du \overset{u = \varphi(t)}{=}$$

$$= \int_a^b f(\delta(\varphi(t))) \|\delta'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt =$$

$$\|\delta'(\varphi(t))\varphi'(t)\| = \delta(\varphi(t))' = \gamma'(t)$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma f$$

Integrale di ~~curva~~ di 2ª specie (o di linea)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (semplice e) regolare

f: campo continuo definito sul sostegno di γ

Allora si definisce l'integrale di f su γ come

$$\int_\gamma F \cdot \tau \quad \text{oppure} \quad \int_\gamma F \cdot dP$$

$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

prodotto scalare

L'integrale non cambia se si sostituisce a γ un altra parametrizzazione equivalente che induce lo stesso orientamento, mentre cambia di segno se cambia l'orientamento.

Se $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$F(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n)) \Rightarrow$

$$\int_\gamma F \cdot \tau = \int_a^b f_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\gamma_1'(t) + \dots + f_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\gamma_n'(t)\, dt =$$

$$\int_\gamma \underbrace{f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \dots + f_n\, dx_n}_{\text{1-forma differenziale}}$$

$\boxed{\text{Esempio}}$ $\omega = x\,dx - y^2 x\,dy$ è 1-forma differenziabile in $\mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F \cdot \tau \text{ dove } F(x,y) = (x, -y^2 x)$$

$\boxed{\text{Integrali di superficie}}$

1^a^ specie

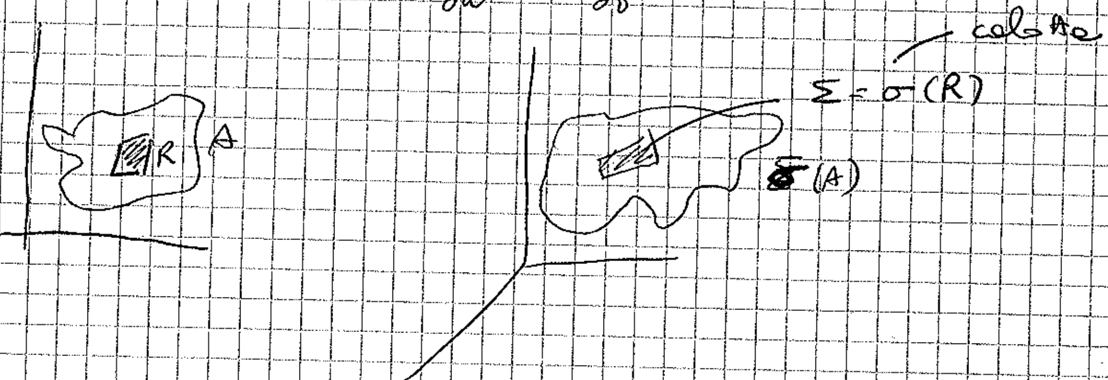
Richiamo: una superficie σ: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. una ~~superficie~~ funzione da $\sigma: A \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 si dice superficie.

Se σ è iniettiva $\Rightarrow$ è semplice

Se $J\sigma(P)$ ha rango 2 $\forall P \in A \Rightarrow \sigma$ è regolare

$(u,v) \in A$, $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$J\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)$$

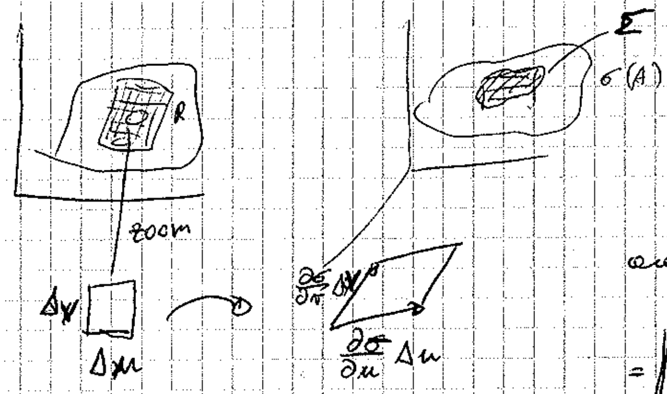


$R \subset A$ sia dominio di integrazione allora si definisce l'area di Σ come

$$\text{area}(\Sigma) = \int_R \|\nu(u,v)\|\, du\, dv \quad \text{dove}$$

$$\nu(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$



$$\text{area} = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}\Delta v \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u}\Delta u \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \Delta u \, \Delta v$$

Se σ ha rappresentazione cartesiana del tipo $z = f(x,y)$, $(x,y) \in R$

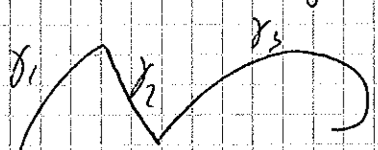
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad \text{area} = \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

$$J\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \nu_{(u,v)} = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right) \Rightarrow \|\nu_{(u,v)}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}$$

$$d\sigma = \|\nu(u,v)\| \, du \, dv$$

$\boxed{07/10/2009}$

Se γ è una curva regolare a tratti:

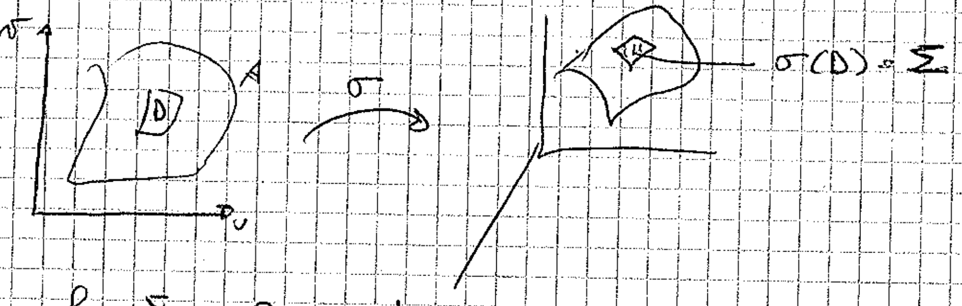


$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

$$\int_\gamma f \overset{def}{=} \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$$ e analogamente per $\int_\gamma F \cdot \tau$ (F campo vettoriale).

Integrali di superficie di 1ª specie (= di funzioni)

Sia: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$ superficie regolare e semplice, $D \subset A$ dominio di integrazione, $\Sigma = \sigma(D)$



Sia $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ continua

Si definisce l'integrale di 1ª specie della funzione f su Σ come

$$\int_\Sigma f = \int_D f(\sigma(u,v)) \, \|\nu(u,v)\| \, du\, dv =$$

$$= \int_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \, \|\nu(u,v)\| \, du\, dv$$

Osservazione

- Se $f = 1$ allora $\int_\Sigma 1 = \text{area}(\Sigma)$
- Cambiando parametrizzazione il valore dell'integrale non cambia.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \supseteq A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathbb{R}^2 \supseteq B \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

σ e τ sono equivalenti se $\exists\, \varphi \in C^1(A)$ che è una biezione $A \to B$ con $\det(J(\varphi)(P)) \neq 0 \;\; \forall P \in A$ tali che $\sigma = \tau \circ \varphi \quad ((u',v') = \varphi(u,v))$

Si dice che σ e τ inducono lo stesso orientamento se $\det(J\varphi) > 0$ mentre inducono orientamenti opposti se $\det(J\varphi) < 0$

Integrali di superficie di 2ª specie (campo)

A, σ, Σ, D come sopra. F campo vettoriale definito su Σ ($F : \Sigma \to \mathbb{R}^3$) continuo

Si definisce flusso di F attraverso Σ come

$$\int_\Sigma F \cdot \nu = \int_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto scalare}}}{\cdot} \nu(u,v) \, du\, dv$$

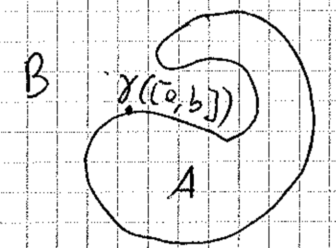
TEOREMA DI GREEN

Definizione: Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ si dice semplice e chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ e $t_1 < t_2$ allora $t_1 = a$ e $t_2 = b$

Definizione: una curva piana semplice e chiusa si dice curva di Jordan

Una curva di Jordan divide il piano in una parte interna ed una esterna.

Teorema di Jordan: Se $\gamma [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è curva di Jordan allora il complementare del sostegno $(\mathbb{R}^2 - \gamma([a,b]))$ è l'unione di 2 aperti connessi per archi, uno limitato, l'altro no (quello limitato si dice regione di Jordan interna a γ).



A limitato
B illimitato

Definizione: un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice connesso (per archi) se $\forall\, P_1, P_2 \in A$ esiste $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(a) = P_1$, $\gamma(b) = P_2$ e $\gamma([a,b]) \subset A$

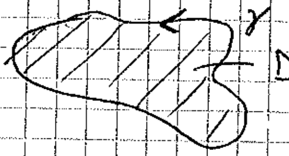
Teorema di Green: Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan regolare a tratti, F sia campo di classe C^1 su un aperto che contiene il sostegno di γ e la regione di Jordan interna a γ

$$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

Allora

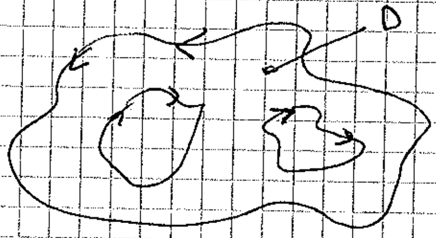
$$\int_\gamma F \cdot \tau = \int_D \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy$$

dove D l'unione della regione di Jordan interna a γ e del sostegno di γ, e γ è percorsa in senso antiorario



$\gamma = \partial D$ (γ è il bordo di D)

Più in generale il teorema vale se D ha come bordo più curve di Jordan disgiunte.



Le curve sono percorse in modo da avere la regione D a sinistra

Applicazione $F(x,y) = (0, x)$

$$\int_\gamma F\cdot\tau = \int_\gamma x\,dy$$

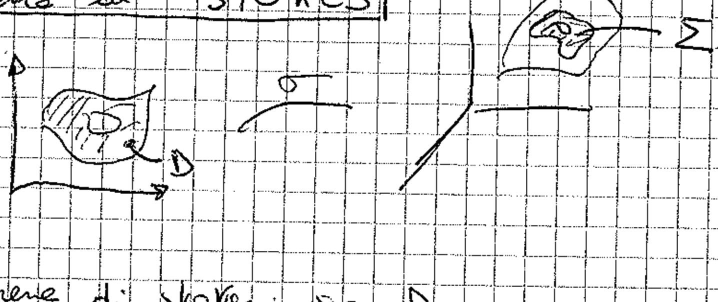
$$\text{area}(D) = \int_\gamma F\cdot\tau = \int_\gamma x\,dy$$

$F = (-y, 0)$ $\qquad \displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau = \int_\gamma -y\,dx$

$$\text{area}(D) = -\int_\gamma y\,dx$$

$$\text{area}(D) = \frac{1}{2}\left(\int_\gamma x\,dy - \int_\gamma y\,dx\right)$$

Teorema di STOKES



Teorema di stokes: sia D una regione come dell'enunciato del teorema di Green e σ una mappa semplice e regolare definita su un aperto contenente D. Posto $\Sigma = \sigma(D)$ e dato un campo vettoriale F di classe C^1 su un aperto contenente Σ. Allora l'integrale

$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot\tau = \int_\Sigma \text{rot}\,\vec{F}\cdot\nu$$

dove il bordo di Σ, ($\partial\Sigma$) è percorso in modo che un osservatore disposto lungo ν vede Σ a sinistra

Sia

$$F(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right) \quad \text{allora}$$

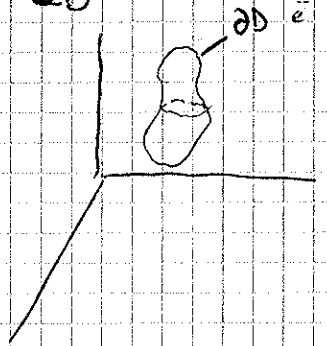
$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI GAUSS

Sia A un aperto limitato in $\mathbb{R}^3$ la cui frontiera è l'unione di un numero finito di calotte non aventi punti interni in comune. Sia $D = A \cup \partial A$ (∂A è il bordo o la frontiera). Sia $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto contenente D. Allora

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_D \operatorname{div}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$ dove ν è la normale esterna.

∂D è superficie chiusa



$$\operatorname{div}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

CAMPI CONSERVATIVI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

sia $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ un campo vettoriale

F si dice conservativo su Ω se $\exists$ una funzione scalare φ di classe C^1 su Ω : $F(x_1, \dots, x_n) = \nabla\varphi(x_1, \dots, x_n)$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, ossia:

$$* \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

φ si dice funzione potenziale di **F**. La funzione $-\varphi$ è detta energia potenziale.

Esempio:

$F(x,y) = (2x, y)$ è conservativo perché:

$$F(x,y) = \nabla\varphi \quad \text{con} \quad \varphi = \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c\right) \qquad c \in \mathbb{R}$$

<u>Esempio</u>: Campo gravitazionale

$$F(x,y,z) = -K\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \qquad K > 0$$

$$\vec{r} = (x,y,z)$$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad F(x,y,z) = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

F è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ infatti

$$F = \nabla\varphi \,, \quad \varphi(x,y,z) = +\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = +\frac{K}{r}$$

<u>Esempio</u>: Campo di forze elastiche

$$F(x,y,z) = -K(x,y,z) \,, \quad K > 0$$

F è conservativo in $\mathbb{R}^3$, $F = \nabla\varphi$ con

$$\varphi = -\frac{K}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

<u>Definizione</u>: Una 1-forma differenziale $\omega = f_1(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 + f_2(x_1, \dots, x_n)\,dx_2 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)\,dx_n$ continua in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($f_i \in C^0(\Omega)$)

Si dice esatta su Ω se esiste una funzione $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che $\omega = d\varphi$ in Ω, ossia vale $(*)$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$

Osservazione: il campo $F=(f_1,\dots,f_n)$ è conservativo è la stessa cosa come dire che la forma $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ è esatta. φ si dice primitiva di ω

Esempio: la forma $\omega = (y-1)dx + x\,dy$ in $\mathbb{R}^2$ è esatta:

$$\omega = d\varphi \, , \quad \varphi(x,y) = xy - x$$

Proprietà: Sia $F(f_1,\dots,f_n)$ un campo conservativo in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia φ una funzione potenziale. Consideriamo γ una curva regolare a tratti con sostegno in Ω $(\gamma:[a,b]\to \mathbb{R}^n)$

$$\int_\gamma F\cdot \tau = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Dimostrazione:

$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$ supponiamo che sia regolare

$$\int_\gamma F\cdot\tau = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\gamma(t))}\cdot\gamma_1'(t) + \dots + \underbrace{f_n(\gamma(t))}_{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\gamma(t))}\gamma_n'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\,dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

Conseguenze:

1) $$\int_\gamma \nabla\varphi\cdot\tau = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \int_\gamma d\varphi$$

Per fare esempio di campo conservativo prendo una funzione φ e ne calcolo il gradiente.

2) Il valore dell'integrale dipende solo dai valori finali ed iniziali della curva

Proprietà: Se Ω è convesso e F è conservativo su Ω allora qualsiasi potenziali φ_1, φ_2 di F differiscono per una costante

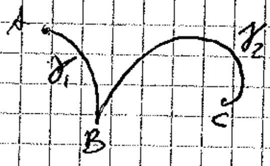
$$\varphi_1(x_1,\dots,x_n) = \varphi_2(x_1,\dots,x_n) + c \quad \forall (x_1,\dots,x_n)\in\Omega$$

Dimostrazione: Fisso un punto $A\in\Omega$, $\varphi_1(P) = \varphi_1(A) + \int_\gamma F\cdot\tau$ $\forall P\in\Omega$ dove γ è un cammino che congiunge A e P

Vale anche per $\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2(P) = \varphi_2(A) + \int_\gamma F\cdot\tau$

$$-\varphi_1(P) + \varphi_2(P) = \underbrace{\varphi_2(A) - \varphi_1(A)}_{=-c} \Rightarrow \varphi_1(P) = \varphi_2(P) + c \quad \forall P\in\Omega$$

Se γ è regolare a tratti



$$\int_\gamma F\cdot\tau = \int_{\gamma_1} F\cdot\tau + \int_{\gamma_2} F\cdot\tau = \varphi(\cancel{B}) - \varphi(A) + \varphi(C) - \varphi(\cancel{B}) = \varphi(C) - \varphi(A)$$

<u>Caratterizzazione dei campi conservativi</u>

Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e F un campo vettoriale continuo su Ω. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

1) F è conservativo su Ω

2) Comunque prese 2 curve γ_1 e γ_2 regolari a tratti con sostegno in Ω e con stesso punto iniziale e stesso finale risulta che

$$\int_{\gamma_1} F\cdot\tau = \int_{\gamma_2} F\cdot\tau$$

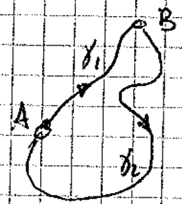
3) Comunque presa 1 curva chiusa γ regolare a tratti e con sostegno Ω risulta

$$\int_\gamma F\cdot\tau = 0$$

<u>Dimostrazione:</u> 1) => 2) già visto

1) => 3) $\displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau = \underbrace{\varphi(\gamma(B)) - \varphi(\gamma(A))}_{B\equiv A} = 0$

3) => 2) Presa γ_1 e γ_2 come in 2)

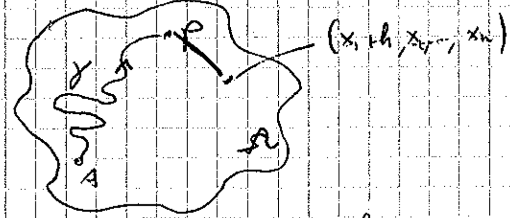


Sia $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ allora γ è chiusa e quindi

$\displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau = 0$ per Hp Però

$$\int_{\gamma_1} F\cdot\tau - \int_{\gamma_2} F\cdot\tau = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F\cdot\tau = \int_{\gamma_2} F\cdot\tau$$

2) $\Rightarrow$ 1) Costruiamo un candidato potenziale φ. Prendiamo Ω e fisso $A \in \Omega$. Dato un punto $P \in \Omega$ definisco



$\varphi(P) = \int_\gamma F \cdot \tau$ dove γ è una qualsiasi curva regolare a tratti e con sostegno in Ω che congiunge A e P. φ è ben definita (cioè $\varphi(P)$ non dipende dalla scelta di γ) per ipotesi.

Verifichiamo che φ è un potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(P) = f_1(P) & \forall P \in \Omega \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(P) = f_n(P) \end{cases}$$

Verifichiamo $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(P) = f_1(P)$ $\forall P \in \Omega$ le altre sono simili.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(P) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma + \tilde{\gamma}} F \cdot \tau - \int_\gamma F \cdot \tau \right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau \stackrel{(*)}{=}$$

$$\tilde{\gamma}(t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \qquad t \in [0, h]$$

$$\tilde{\gamma}'(t) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau = \int_0^h f_1(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \cdot 1 \, dt = \phi(y)$$

$$\phi'(y) = f_1(x_1 + y, x_2, \dots, x_n)$$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \phi'(y)\, dy = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(\phi(h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\phi(0)}}\big) = \phi'(0) =$$

$$= f_1(x_1, \dots, x_n)$$

Definizione: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\omega = f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)$ una forma differenziale di classe C^1 ($f_i \in C^1(\Omega)$ $1 \leq i \leq n$).
Allora ω si dice chiusa in Ω se:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad \forall i \neq j$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$$

Esempio: in $\Omega = \mathbb{R}^2$ la forma differenziale

$$\omega = (2x + e^y)dx + (xe^y \cancel{dy})dy$$

Essendo in $\mathbb{R}^2$ allora

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^y \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Quindi ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$

Esempio in $\Omega = \mathbb{R}^3$ $\qquad \omega = y\,dx + e^z y\,dy + z^2 dz$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \end{cases} \qquad 1 = 0 \text{ NO} \Rightarrow \omega \text{ non è chiusa}$$

Definizione: Un campo vettoriale $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ di classe C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si dice irrotazionale in Ω se sono soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{cases}$$

Osservazione: 1) Questo equivale a dire che il rotore è 0
2) $F = (f_1, f_2, f_3)$ è irrotazionale $\Leftrightarrow$ $\omega = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$ è chiusa

3) Talvolta un campo in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $F(x,y) = \left(f_1(x,y), f_2(x,y)\right)$ si dice irrotazionale ~~in~~ Ω se

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Quindi F è irrotazionale $\Longleftrightarrow$ $\omega = f_1\,dx + f_2\,dy$ è chiusa.

Proprietà: ogni forma differenziale di classe C^1 ~~chiusa~~ esatta è anche chiusa

Dimostrazione: Se $\omega = f_1\,dx_1 + \ldots + f_n\,dx_n$ dice che è esatta in Ω vuol dire che $\exists\, \varphi \in C^1(\Omega) \,/\, \omega = d\varphi$ in Ω, cioè

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ f_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

ma φ è in realtà di classe C^2 perchè le sue derivate prime sono date dalle componenti f_i che sono a loro volta di classe C^1.

Verifichiamo $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $\forall\, i \neq j$ in Ω

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j\,\partial x_i}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j\,\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}$ per il teorema di Schwartz perchè φ è di classe C^2 su Ω

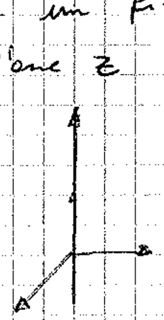
OSSERVAZIONE se un campo in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ di classe C^1 è conservativo allora è irrotazionale.

Esempio: campo magnetico generato da un filo infinito percorso da corrente e disposto lungo l'asse z

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

a meno di una costante moltiplicativa

(Legge di Biot-Savart)



in $\Omega \setminus \{(x,y,z): x=y=0\}$

F è irrotazionale

$$\text{rot}\, F = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x^2+y^2)}\right) = (0,0,0)$$

F non è conservativo

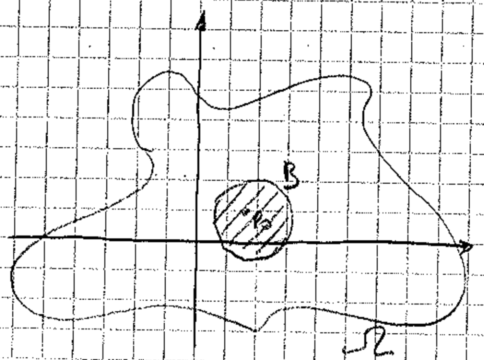
Prendo come γ la circonferenza di centro O e $r=1$ contenuta su x,y

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$

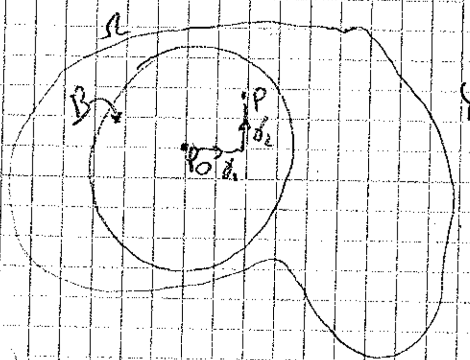
$$\int_\gamma F \cdot \tau = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt =$$

$2\pi \Rightarrow$ F non è conservativo.

Lemma di Poincaré Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ una forma differenziale chiusa su Ω. Allora ω è localmente esatta ossia $\forall P_0 \in \Omega$ $\exists$ una palla aperta B di centro P_0 e contenuta in Ω in cui ω è esatta: $\exists \varphi \in C^1(B)$ / $d\varphi = \omega$ in B.



Dimostrazione Per semplicità consideriamo $n=2$. Dato P un qualsiasi punto $P \in B$, definiamo

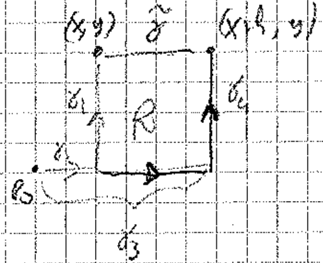


$$\varphi(P) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} F \cdot \tau = \text{con } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ come in figura.}$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1 \\[2mm] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2 \end{cases}$$

Se $P_0\,(x, y)$ consideriamo $P_1 = (x+h, y)$



$$\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} = \frac{\int_{\gamma_3+\gamma_4} F\cdot\tau - \int_{\gamma_1\gamma_2} F\cdot\tau}{h} \overset{(*)}{=}$$

$$\gamma_3+\gamma_4-(\gamma_1+\gamma_2) = \underbrace{\gamma_3+\gamma_4-(\gamma_1+\gamma_2)-\tilde{\gamma}}_{\partial R}+\tilde{\gamma}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{h}\left[\int_{\partial R} F\cdot\tau + \int_{\tilde{\gamma}} F\cdot\tau\right] \overset{(**)}{=}$$

∂R è bordo rettangolo percorso in senso antiorario

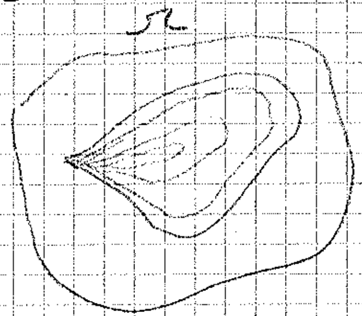
$$\int_{\partial R} F\cdot\tau \underset{\text{Teo green}}{=} \int_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$ xchè forma è chiusa

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{h}\int_{\tilde{\gamma}} F\cdot\tau \longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{\tilde{\gamma}} F\cdot\tau = f_1(x, y)$$ (vedi dimostrazione caratterizzazione dei campi conservativi)

c.v.d.

Osservazione: ogni campo irrotazionale è localmente conservativo

Definizione: un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni curva chiusa con sostegno in Ω si può ridurre con continuità ad un punto rimanendo in Ω



Teorema: In un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso ogni forma chiusa è esatta, in particolare in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (o $\in \mathbb{R}^3$) ogni campo irrotazionale è conservativo se Ω è semplicemente connesso.