$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5 \ldots\}$ NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; +1; 2; \ldots\}$ INTERI

$\mathbb{Q} = \{(m; n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ RAZIONALI $\qquad (m, n) = \frac{m}{n}$

$(m, n) = 1 \rightarrow mcd = 1$

$P(x) = 0$

$P(x) = x^2 - 2 = 0 \xleftrightarrow{\text{def}} \pm\sqrt{2}$

è la soluzione di

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

oppure $\nexists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

PER ASURDO $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

$m^2 = 2n^2$

Per il TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA : m^2 ammette un'unica fattorizzazione
$2n^2$ ammette la stessa unica fattorizzazione

$m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$m^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$

tutti gli esponenti sono pari, e lo stesso deve valere per n.
Ma non è possibile xke il grado di 2 è sicuramente dispari

$\Downarrow$

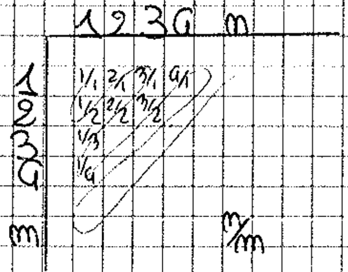
$\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
con n che non è un quadrato perfetto

$A \simeq B$: A ha la stessa cardinalità di B
ad ogni elemento di A corrisponde un elemento di B

- $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6 ...	1	2	3 ...
$\mathbb{Z}$ ...	-3	-2	-1	0	1	2 ...	2	4	6 ...

- $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$



Posso numerarli tutti

$\Downarrow$

$\mathbb{Q}^+ \simeq \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \simeq A \Rightarrow A$ è un insieme infinito numerabile

- $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{R} \longleftrightarrow \nexists$ corrispondenza uno a uno tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

PER ASSURDO : $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{R}$

$1 \longleftrightarrow m_1, a_{11} a_{12} a_{13}$
$2 \quad m_2, a_{21} a_{22} a_{23}$
3
4

$[0,1] \simeq \mathbb{Q}$ $\quad 1 \longleftrightarrow 0, a_{11} a_{12} a_{13}$
$2 \quad 0, a_{21} a_{22} a_{23}$
3
4

$[0,1] = [b_1, b_2, b_3 \dots]$

Ne scrivo uno che manca:

$\bar{x} = 0, c_1 c_2 \dots$

con $c_1 \neq a_{11}$
$c_2 \neq a_{22}$
...

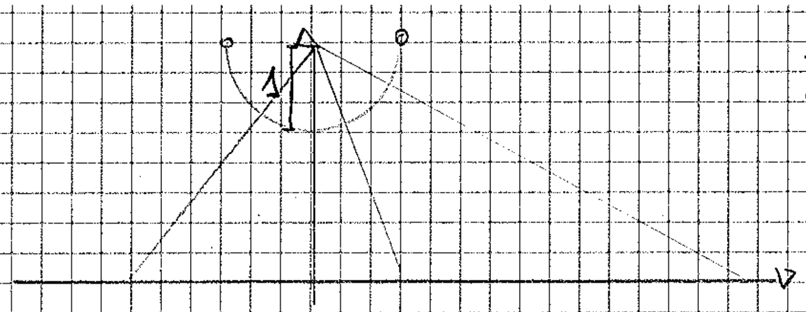
$\bar{x}$ non è compreso

Non esiste una corrispondenza $[0,1] \not\simeq \mathbb{Q}$

$\Downarrow$

$\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{Q}$

I numeri irrazionali sono di un INFINITO SUPERIORE
$\hookrightarrow$ (ci sono + irrazionali che razionali)



Ad ogni punto della semicirconferenza corrisponde un punto sulla retta

$\Downarrow$

$[0,1] \simeq \mathbb{R}$

$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q} \not\simeq \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$

↑ hanno una cardinalità superiore

Esistono INFINITI più INFINITI di $\mathbb{C}$

$A = \{0, 1, 2\}$ $\quad P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathbb{N} \not\simeq P(\mathbb{N})$

↳ Le parti di $\mathbb{N}$ sono di un INFINITO superiore ad $\mathbb{N}$