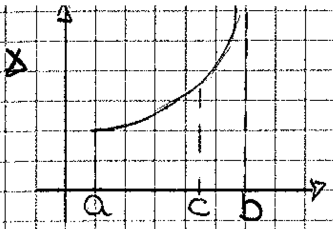

$\forall c \in [a,b) \quad \exists \int_a^c f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad \alpha\neq 1$ $\qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^1 = \begin{cases} +\infty & \alpha>1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1 \end{cases}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- $x = 2 - x$
  $2x = 2$
  $x = 1$ $\qquad$ equazione algebrica

- $f(x) = x + 1 - f(x)$ $\quad \forall x \in ?$
  $2f(x) = x + 1$
  $f(x) = (x+1)/2$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ equazione funzionale

EQUAZIONI DIFFERENZIALI funzionali
↳ compare la derivata

es. $f'(x) = \sin x \qquad f(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

<u>La soluzione di un'equazione differenziale è una coppia:</u>

$$(f(x),\ I)$$

la funzione $C^n(x)$ derivabile n volte ↳ intervallo

- $f''(x) + f(x) = 0$
  - $f(x) = e^{ax}$
    $f'(x) = a \cdot e^{ax}$
    $f''(x) = a^2 \cdot e^{ax}$
    $a^2 \cdot e^{ax} + e^{ax} = 0 \qquad \underbrace{e^{ax}}_{\neq 0}\underbrace{(a^2+1)}_{\geq 1} = 0$ NO!
  - se $f'' + f = 1$
    $a^2 \cdot e^{ax} + e^{ax} = 1$
    $e^{ax}(a^2+1) = 0$
    $\to a = 0 \qquad f(x) = e^{0\cdot x} = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
  - se $f'' + f = x + 2$
    $e^{ax}(a^2+1) = x + 2$ NO! è falso!
    non ammette un intervallo come soluzione
  - $f(x) = \sin x$
    $f'(x) = \cos x$
    $f''(x) = -\sin x$
    $-\sin x + \sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} = I$
  - esiste un polinomio?
    $f(x) = 0$

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y, x\right) = 0$$

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y' \dots y^{(n-1)}\right)$$

EQUAZIONI DEL PRIM ORDINE

$$y' = f(x, y)$$

$y' = (1+x)y + x^2$ soluzione $(y(x), I)$

$\begin{cases} y' = (1+x)y + x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ → PROBLEMA DI CAUCHY molto presente in fisica

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Partiamo da un esempio:

$y' = xy$

↳ $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$

$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$ · $\boxed{y(x) = 0}$ → $y'(x) = 0$ EQUAZIONE SINGOLARE (caso specifico)

$y' = xy \quad \forall x \in \mathbb{R} = 0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int_{x_0}^{x} x\, dx$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{t} dt = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = \left[\ln t\right]_{y(x_0)}^{y(x)}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \ln(y(x)) - \ln(y(x_0))$$

$$\ln(y(x)) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + c}}$$

- se $y(1) = 1$

$e^{\frac{1}{2}+c} = 1 \quad \frac{1}{2} + c = \ln 1 = 0$

$c = -\frac{1}{2} \quad y(x) = e^{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}$

VERSIONE BREVE:

- raggruppo (divido) x e y
- tolgo la y'
- integro: y in dy, x in dx
- metto una sola costante

$y' = xy \quad \frac{y'}{y} = x \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$

$\ln y = \frac{x^2}{2} + c$

$y(x) = e^{x^2/2 + c}$

SECONDO METODO

$$\boxed{\begin{array}{l} y' + a(x)\,y = b(x) \\ A(x) \text{ è una primitiva di } a(x) \\ y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} \cdot b(x)\,dx \end{array}}$$

- $x y' + y = x^2$

  $y' + \frac{1}{x} y = x$

  $a(x) = \frac{1}{x}$ $A(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ in $I = (0, +\infty)$

  $b(x) = x$

  $$y(x) = e^{-\ln x} \int e^{\ln x} \cdot x\,dx = \frac{1}{x} \int x^2\,dx = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

  se $I = (-\infty, 0)$ viene uguale

  $$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & I = \mathbb{R} \\ \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} & I = (0, +\infty) \text{ o } I = (-\infty, 0) \text{ con } c \neq 0 \end{cases}$$

  - PROBLEMA DI CAUCHY

    $y(1) = \frac{1}{3}$ $\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} = \frac{1}{3}$

    $\frac{1}{3} + c = \frac{1}{3}$ $c = 0$ $y = \frac{x^2}{3}$ $I = \mathbb{R}$

  - $y(1) = 1$

    $\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} = 1$ in 1: $\frac{1}{3} + c = 1$

    $c = \frac{2}{3}$ $y = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$ su $I = (0, +\infty)$

- $y' + 2y = 1$

  $a(x) = 2$ $A(x) = 2x$

  $$y(x) = e^{-2x} \int e^{2x} \cdot 1\,dx = e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{2} + c\right) = \frac{1}{2} + \frac{c}{e^{2x}} \quad I = \mathbb{R}$$

- $y' + 2y = x$

  $a(x) = 2$ $A(x) = 2x$

  $$y(x) = e^{-2x} \int x e^{2x}\,dx = e^{-2x}\left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{c}{e^{2x}} \quad I = \mathbb{R}$$

- $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = \frac{y}{x}$

  - $x^2 y' = y^2 + xy + x^2$ $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$ $z = \frac{y}{x}$ $y(x) = x \cdot z(x)$

    $y'(x) = z(x) + x(z'(x))$

    $\cancel{z(x)} + x \cdot z'(x) = z^2(x) + \cancel{z(x)} + 1$ $\frac{z'}{z^2 + 1} = \frac{1}{x}$ a variabili separabili