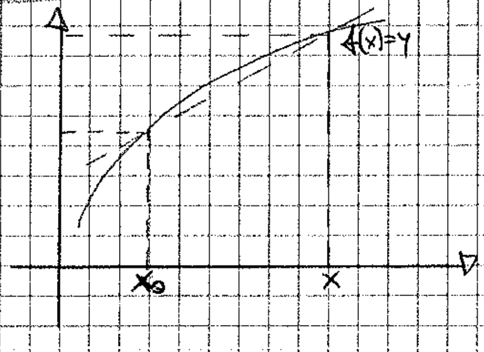
IL CALCOLO DIFFERENZIALE



$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{RAPPORTO INCREMENTALE}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
↳ coefficiente angolare della retta tangente

- $f(x)$ DERIVABILE in x_0 $\Longleftrightarrow$ ammette la retta tangente in x_0

- $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ $\quad x_0\in(a,b)$

  f derivabile in x_0 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\exists$ finito $\Longleftrightarrow$ $\exists$ retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

TEOREMA

f derivabile in x_0 $\Longrightarrow$ f continua in x_0

$\boxed{\text{DIM}}$ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0 \Longleftrightarrow$ continua

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=0$$
↳ PER $\quad \to 0$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow f(x)-f(x_0)=o(1)$

$$f(x)=f(x_0)+o(1)$$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right)=0 \Longleftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m=o(1)$

$$\Longleftrightarrow f(x)=f(x_0)+m(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$f(x)=f(x_0)+m(x-x_0)$ retta tangente in x_0

ma $m(x-x_0)=o(1)$ $\quad x\to x_0$

$\Downarrow$ $f(x)=f(x_0)+o(1)$

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow f':(a,b)\to\mathbb{R}$
  $x \mapsto$ coefficiente angolare retta tangente a $y=f(x)$ in $(x,f(x))$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0) \quad \text{DERIVATA PRIMA}$$

- $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = x+x_0 = 2x_0 \in \mathbb{R} \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$f'(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x$

- $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \sin x$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1} = \cos x_0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ $\qquad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f \cdot g'}{g^2} \quad g(x) \neq 0$

$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = e^x |x|$ $\qquad f'(x) = (e^x)'|x| + e^x(|x|)'$ ma solo per $x \neq 0$

dom$(f) = \mathbb{R}$
f è continua
f è derivabile su $\mathbb{R} - \{0\}$

- $|x|$: $\quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ $\quad$ non esiste!
  $\Downarrow$
  f non è derivabile in $x_0 = 0$

- $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \geq 0 \\ -xe^x & x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x & x > 0 \\ -(e^x + xe^x) & x < 0 \end{cases}$

- $f(x) = |x| \sin x = \begin{cases} x\sin x & x \geq 0 \\ -x \sin x & x \leq 0 \end{cases}$

dom$(f) = \mathbb{R}$
f continua
f derivabile su $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \underbrace{|x|}_{\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} = 0$$

f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(x_0) = f'(0) = 0$

$f'(x) = \begin{cases} \sin x + x\cos x & x \geq 0 \\ -(\sin x + x\cos x) & x \leq 0 \end{cases}$

- $f(x) = |x| \cdot g(x)$
  g continua $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ $\quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x| g(x)}{x} \to 0$

Punti di non derivabilità

- $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1 \in \mathbb{R}$

  $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2 \in \mathbb{R}$

  $\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$ **PUNTO ANGOLOSO**

- $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (-\infty)$

  $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \ (+\infty)$

  $\Rightarrow$ **CUSPIDE** $\sqrt[3]{|x|}$

- $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (-\infty)$

  $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \ (-\infty)$

  $\Rightarrow$ **PUNTO A TANG. VERTICALE** $\sqrt[3]{x}$

- $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$

  f derivabile in x_0 $\quad f'(x_0) = 0$ $\quad \xleftrightarrow{\text{def}}$ x_0 PUNTO CRITICO o PUNTO STAZIONARIO per f

Teorema di Fermat

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$

f derivabile in x_0

x_0 massimo/minimo locale (o relativo)

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\boxed{\text{DIM}}$

x_0 max/min locale $\xleftrightarrow{\text{def}} \exists I_{x_0} : f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \ \forall x \in I_{x_0}$

$f(x) - f(x_0) \leq 0$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

con $x > x_0$ $\quad \leq 0$

con $x < x_0$ $\quad \geq 0$

teorema della permanenza del segno

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

TEOREMA DI ROLLE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

continua su $[a,b]$ → $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ $\quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

derivabile in (a,b)

$f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$

$\boxed{\text{DIM}}$ $x_0 \in [a,b] \to \exists\, f'(x_0)$ per ipotesi

$f([a,b]) = [m, M]$ teorema di Weierstrass

$\hookrightarrow \exists\, x_m$ e $x_M \in [a,b] : f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$

- $f(x) = k$ costante

  $f(x_m) = f(x_M) = $ costante $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

- $f(x)$ non costante $\Rightarrow m < M \Rightarrow$ xkè $f(a) = f(b)$

  $\Rightarrow x_m$ oppure $x_M \in (a,b) \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ fisso x_0 tra x_m e x_M quello $\in (a,b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

  teorema di Fermat

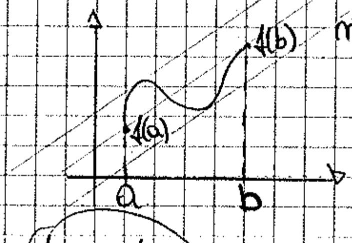
TEOREMA DI LAGRANGE del valor medio

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

continua su $[a,b]$

derivabile in (a,b)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$



$m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\boxed{\text{DIM}}$ $g(x) = f(x) - \underbrace{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{= m \text{ costante}} \cdot x$

- $g(x)$ continua in $[a,b]$
- $g(x)$ derivabile in $[a,b]$
- $g(a) = g(b)$

x differenza di funzioni continue e derivabili

$g(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a$

$g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b$

$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$

$\Downarrow$

Teorema di Rolle su $g(x)$

$\exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$

$\Downarrow$

$f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

TEOREMA: monotonia

f derivabile su I intervallo:

a) f crescente su I $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

b_1) $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ f crescente su I

b_2) $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ f strettamente crescente su I

f strettamente crescente su I $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ no! controesempio x^3

DIM

a) f crescente su I $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x_1 < x_2$ con $x_1, x_2 \in I$ $\Rightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \geq 0 \quad \cdot \text{ se } x > x_0 \quad x, x_0 \in I \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ per ipotesi}$$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0 \quad \cdot \text{ se } x < x_0 \quad x, x_0 \in I \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \text{ per ipotesi}$$

Per ipotesi di derivabilità $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ (finito)

Per il teorema della permanenza del segno $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

b_1/b_2) $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ $\Rightarrow$ considero $[x_1, x_2] \subseteq I$

f derivabile e continua su $[x_1, x_2]$ per ipotesi

$\Downarrow$

$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq I : f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ per il teorema di Lagrange

$$f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \text{ per ipotesi}$$

$\Downarrow$

$f(x_2)-f(x_1) \geq 0$

$f(x_2) \geq f(x_1)$ con $x_2 > x_1$

$\Downarrow$

$f(x)$ crescente su I

TEOREMA molto RICHIESTO!!

f derivabile su I

$f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ $\Longleftrightarrow$ $f(x) = c$ $\forall x \in I$

DIM $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ $\quad [x_1, x_2] \subseteq I$

Per il Teorema di Lagrange $\exists x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq I : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{=0 \text{ per ipotesi}}(x_2 - x_1) = 0$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow$ funzione costante

• $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2} = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\pi}{2} \\ f(-1) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

$x>0 \quad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$

$\arctan x \sim x \quad x \to 0$

$\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad x \to +\infty$

• $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: f(x) = c = 1$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0, +\infty, -\infty$

f e g derivabili in $\mathring{I}_c$

$g'(x) \neq 0$ in I_c

$\exists \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-\sin x + x}^{\sim x^3/6}}{20x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6}{20x^3} = \frac{1}{5!}$$

$$\sin x = x - \frac{x}{3!} + \frac{x}{5!} + o(x^5)$$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

• $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su (a,b)

$f': (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su (a,b)

$\Rightarrow f'': (a,b) \to \mathbb{R}$

- $C^r(I)=\{f: I\to\mathbb{R} : f$ è derivabile r volte, $f^{(r)}$ è continua su $I\}$

$C^\infty(I)=\{f: I\to\mathbb{R} : \exists f^{(k)}\ \forall k\geq 1\}$

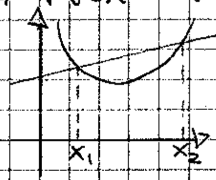
$C^0(I) \to$ è continua

CONVESSITÀ

1) f convessa su $I \iff f$ derivabile 2 volte, $f''(x)>0\ \forall x\in I$ $\implies f'(x)$ strettamente crescente

2) f convessa in $x_0 \iff f$ derivabile in x_0 / $\exists I_{x_0}$: $f(x)\geq t(x)$

sia $t(x)$ tangente in x al grafico di f
$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



3) f convessa su $I \iff \forall x_1<x_2 \quad x_1,x_2\in I$
$f(x)<$ retta passante per x_1 e x_2

TEOREMA DI TAYLOR

$m\geq 0$, f derivabile m volte $\implies f(x)=T_{f,m,x_0}(x)+o((x-x_0)^m)$

$$T_{f,m,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{m}\underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{a_k}(x-x_0)^k=\underbrace{f(x_0)}_{a_1}+\underbrace{f'(x_0)}_{a_2}(x-x_0)+\underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{a_3}(x-x_0)^2+\dots+\underbrace{\frac{f^{m}(x_0)}{m!}}_{a_m}(x-x_0)^m$$

- $x_0=0$, $m=5$: $\sin x = 0+x+0\cdot\frac{x^2}{2!}-1\cdot\frac{x^3}{3!}+0\cdot\frac{x^4}{4!}+1\cdot\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=$
$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$

- $x_0=0$, $m=1$: $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x\leq 0\end{cases}$ $\quad f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 0 & x=0\\ -2x & x<0\end{cases}$ $\quad f''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x<0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ $\begin{matrix}0^+\to +2\\ 0^-\to -2\end{matrix}$ $\nexists f''(0)$

$m=0$: $f(x)=f(x_0)+o(1)$
$f(x)-f(x_0)=o(1)$ $\quad f(x)\to f(x_0)$

$m=1$: $f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{tangente}}+o(x-x_0)$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\dots$$

• $f(x) = x \cdot \sin(2x^2) - 2x^3$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + \frac{(2x^2)^5}{5!} + o(((2x^2)^6)) =$

$= 2x^2 - \frac{6}{3}x^6 + \frac{6}{15}x^{10} + o(x^{12})$

$x \cdot \sin(2x^2) = 2x^3 - \frac{6}{3}x^7 + \frac{6}{15}x^{11} + o(x^{13})$

$f(x) = -\frac{6}{3}x^7 + \frac{6}{15}x^{11} + o(x^{13})$

per $x \to 0$ ordine di infinitesimo $= 7$

parte principale $= -\frac{6}{3}x^7$

$f^{12}(0) = 0$

$f^{11}(0) = 11! \cdot \frac{6}{15}$

$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$

$n=3$ $f(x) = -\frac{6}{3}x^7 + o(x^9)$

• $f(x) = e^x$ $x_0 = 1$

$t = x - x_0 = x - 1 \leftrightarrow x = t + 1$

$g(t) = e^{t+1}$ $t_0 = 0$

$= e \cdot e^t = e\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n)\right) = e + e \cdot t + e\frac{t^2}{2!} + \dots + e\frac{t^n}{n!} + o(t^n)$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-1)^k}{k!} \cdot e + o((x-1)^n)$

$f^{(12)}(1) = a_{12} \cdot 12! = \frac{e}{12!} \cdot 12! = e$

• $f(x) = \sin^2(2x)$ $x \to 0$

ordine di infinitesimo 2

p.p. $4x^2$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$

$\sin^2(2x) = (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4))^2 = 4x^2 + \cancel{\frac{16}{9}x^6} + \cancel{o(x^8)} - \frac{16}{3}x^4 + o(x^5) + \cancel{o(x^7)} = 4x^2 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^5)$

$g(x) = \sin^2(2x) - 4x^2 = -\frac{16}{3}x^4 + o(x^5)$

ordine di infinitesimo 4

p.p. $= -\frac{16}{3}x^4$

• $f(x) = \cos(\sin x)$ $x \to 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$f(x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2!} + o(\underbrace{\sin^3 x}_{x^3}) = 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2}{2!} + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$