I NUMERI COMPLESSI pagina 280

1) FORMULAZIONE ASSIOMATICA DI $\mathbb{C}$

$x-3=0$ sol. $\mathbb{N}$

$x+3=0$ sol $\mathbb{Z}$

$2x+3=0$ sol $\mathbb{Q}$

$x^2-2=0$ sol $\mathbb{R}$

$x^2+2=0$ sol $\mathbb{C}$

↳ $x^2=-2$ $x=\pm i\sqrt{2}$

$\boxed{i=\sqrt{-1}}$

$\overset{\mathbb{C}}{S}:(x,y)$ con $x,y\in\mathbb{R}$ $\quad (1,3)\neq(3,1)$

UGUAGLIANZA: due numeri (x_1,y_1) e (x_2,y_2) sono uguali

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_1=x_2 \wedge y_1=y_2$$

SOMMA: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{C}$

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

PRODOTTO: $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{C}$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\overset{def}{=}(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

ESEMPI: $(1,2)+(-3,5)=(-2,7)$
$(2,3)\cdot(1,6)=(-10,11)$ } Rimaniamo nell'insieme S

PROPRIETÀ: associativa e commutativa della somma e del prodotto

distributiva della somma rispetto al prodotto

OSSERVAZIONE 1:

sottoinsieme $\mathbb{C}_0$: scelgo le coppie del tipo $(x,0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

somma: $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$

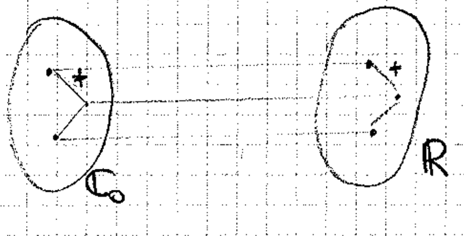
prodotto: $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$

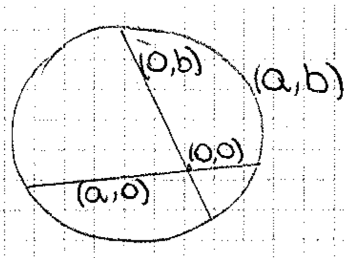
$\mathbb{C}_0$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto

↳ somma e prodotto danno risultati all'interno di $\mathbb{C}_0$

Possiamo scrivere una corrispondenza biunivoca con i numeri REALI

$(x_1,0)\longleftrightarrow x$





in $\mathbb{C}$ non posso scrivere se una coppia è maggiore di un'altra
↳ $\mathbb{C}$ non è ordinato

$\mathbb{C}_0$ è invece ordinato: $(x_1, 0) > (x_2, 0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_1 > x_2$

OSSERVAZIONE 2

$(0,1) \in S$

prodotto: $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$

↳ appartiene al sottocampo $\mathbb{C}_0$

$(0,1)^2 = i^2 \longleftrightarrow -1$

OSSERVAZIONE 3

Dato il numero complesso $(x,y) \in \mathbb{C}$ si può osservare che:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\cdot\underbrace{(0,1)}_{i}$$

Posso esprimere qualunque coppia (x,y) con due coppie di $\mathbb{C}_0$ che sono associate BIUNIVOCAMENTE a $\mathbb{R}$

$(x,0) \longleftrightarrow x$
$(y,0) \longleftrightarrow y$
$(0,1) \overset{def}{\longleftrightarrow} i$

$$\boxed{z = (x,y) = x + iy}$$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\, z = x \\ \mathrm{Im}\, z = y \end{array}\right\}$ sono due valori REALI

VERIFICA:

$z_1 = x_1 + iy_1 \longleftrightarrow (x_1, y_1) \in S$
$z_2 = x_2 + iy_2 \longleftrightarrow (x_2, y_2) \in S$

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 =$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \longleftrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_0 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = \quad i^2 = -1$$
$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \longleftrightarrow (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

② FORMA ALGEBRICA

$(x,y) \in \mathbb{C} \longleftrightarrow \boxed{z = x + iy}$ $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \\ \text{algebra ordinaria} \end{cases}$

<u>OPPOSTO</u>: l'opposto di $z = (x, y)$
è $-z = (-x, -y)$

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

<u>RECIPROCO</u>:

$z \cdot z^{-1} = (1, 0)$

$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$ elemento neutro del prodotto

$(x, y) \cdot (a, b) = (1, 0) \Rightarrow (ax - by, bx + ay) = (1, 0)$

uguaglianza $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$

$(a, b) \neq (0,$
$z \neq (0, 0)$

$\begin{cases} x = \frac{b}{a} y + \frac{1}{a} \\ \left(\frac{b}{a} y + \frac{1}{a}\right) b + ay = 0 \end{cases}$

$\frac{b^2}{a} y + \frac{b}{a} + ay = 0 \qquad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$

$\begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$ Analogamente $\begin{cases} a = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ b = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

$z = (x, y) \qquad \boxed{z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)}$

<u>DIVISIONE</u>

$\frac{z_1}{z_2} \overset{\text{def}}{=} z_1 \cdot z_2^{-1} \qquad z_2 \neq (0, 0)$

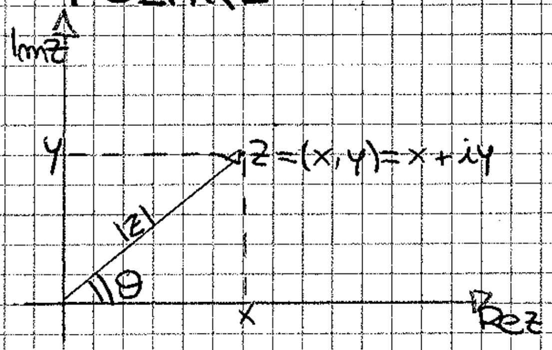
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = (x_1, y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, -\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$$

3) FORMA POLARE

(x, y)



$\mathbb{C}_0$: $(x, 0)$ ⇝ tutti i punti sull'asse delle ascisse
↳ totalità dei numeri reali

MODULO $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

- $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z| = 0 \Rightarrow z = (0, 0)$
- $\mathrm{Re}\, z \leq |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

  $\mathrm{Im}\, z \leq |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

$x = |z| \cdot \cos\theta$

$y = |z| \cdot \sin\theta$

$$z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\boxed{\begin{cases} z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \theta = \arg z \end{cases}}$$

FORMA TRIGONOMETRICA O POLARE

ES 1 $\quad z_1 = 2 + 2i$

$|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{2}{2} = 1 \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases} \arg z_1 = \frac{\pi}{4} \\ |z_1| = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Esistono INFINITI $\arg z$ poichè seno e coseno sono funzioni periodiche

ARGOMENTO PRINCIPALE : $-\pi < \mathrm{Arg} \leq \pi$

PROBLEMA

Dato z in forma algebrica determinare z in forma polare

$z = x + iy$

- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } x>0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi & \text{se } x<0 \quad y>0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi & \text{se } x<0 \quad y<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y<0 \end{cases}$$

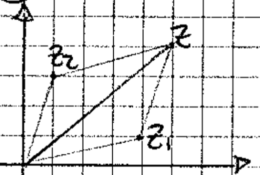
ES 2 $\quad z_2 = -2-2i$

$|z_2| = 2\sqrt{2}$

$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-2}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

$z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

Se $z = z_1 + z_2$ graficamente si costruisce la regola del parallelogramma



CONIUGATO

↳ cambia di segno la $\operatorname{Im} z$
simmetria rispetto all'asse delle ascisse

Il CONIUGATO di z si indica con $\bar{z} = x - iy$

$z_3 = -3+5i \qquad \bar{z}_3 = -3-5i$

PROPRIETÀ:
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $|z| = |\bar{z}|$

ULTERIORI CONSIDERAZIONI SULLE OPERAZIONI IN FORMA POLARE

Posto $|z_1| = r_1 \geq 0$

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

uguaglianza $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \rightsquigarrow r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

prodotto $z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$$= |z_1||z_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2] =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)] =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

se $z_3 = z_1 \cdot z_2 \implies \begin{cases} |z_3| = |z_1||z_2| \\ \arg z_3 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$

divisione se $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2} \implies \begin{cases} |z_4| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg z_4 = \arg z_1 - \arg z_2 \end{cases}$

4) FORMA ESPONENZIALE

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \overset{\text{def}}{=} r \cdot e^{i\theta}$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

prodotto $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\theta_2} =$

$$= |z_1||z_2| \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

divisione $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

5) POTENZA E RADICE N-SIMA

POTENZA

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z^2 = |z|^2 e^{2i\theta}$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = |z|^3 \cdot e^{3i\theta}$$

$$\boxed{z^n = |z|^n \cdot e^{ni\theta}}$$

FORMULA DELLA POTENZA
1ª FORMULA DI DE MOIVRE

RADICE

$z = |z| \cdot e^{i\theta}$
$w = |w| e^{i\varphi}$

$w = \sqrt[n]{z}$ se $w^n = z$ cioè
$z = w^n = |w|^n \cdot e^{in\varphi} = |z| e^{i\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2k\dfrac{\pi}{n} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1}$$

2ª FORMULA DI DE MOIVRE

ESISTONO n RADICI n-ESIME DI OGNI NUMERO COMPLESSO

- Le radici n-esime di un numero z stanno sempre nel piano di Gauss nei vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{|z|}$

Es $z = 1 + i0 = 1 \cdot e^{i0}$

$\sqrt[4]{z} = w_k$ $\quad \begin{cases} |w| = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \varphi_k = \frac{0}{4} + 2k\frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$

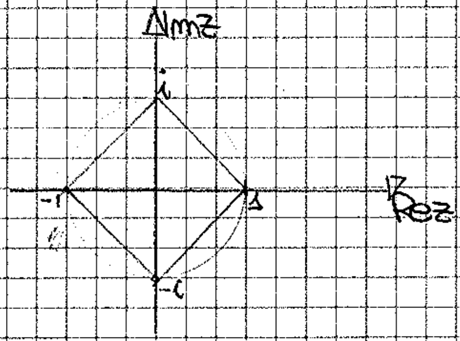
- $k = 0$ $\quad |w_0| = 1 \quad \arg w_0 = \varphi_0 = 0$

  $w_0 = 1$
- $k = 1$ $\quad |w_1| = 1 \quad \arg w_1 = \frac{\pi}{2}$

  $w_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 0 + i$
- $k = 2$ $\quad |w_2| = 1 \quad \arg w_2 = \pi$

  $w_2 = -1$
- $k = 3$ $\quad |w_3| = 1 \quad \arg w_3 = \frac{3}{2}\pi$

  $w_3 = -i$



6 EQUAZIONI IN $\mathbb{C}$

$P_n(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$ con $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall i$

$z \in \mathbb{C}$

$P_3(z) = z^3 + 3z$

$L_4(z) = (2+i)z^4 + 3i \cdot z^3 - 2z^2 + (17-2i)z + 3i$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO ALGEBRICO

$P_n(z)$ polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora l'equazione $P_n(z) = 0$ ammette n soluzioni in $\mathbb{C}$ e si può scrivere

$P_n(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \dots (z - z_1)$ $\quad$ con $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$ = n radici di $P_n(z)$

$P_2(z) = z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ $\quad z_1 = -2i$, $z_2 = +2i$

$$\underline{P_n(z) = a_n (z - z_1)^{\mu_1}(z - z_2)^{\mu_2} \dots (z - z_k)^{\mu_k}}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j = n$$
$$k \le n$$

Osservazione

Sia $P_n(z)$ un polinomio in $\mathbb{C}$ i cui coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$

Se z_0 è la soluzione di $P_n(z)$ allora lo è anche $\overline{z_0}$

Infatti: $P_n(z_0) = 0$

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0}$$

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z_0}^{n-1} + \dots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} = 0$$

se i coefficienti $a_i \in \mathbb{R}$:

$$a_n \cdot \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{z_0} + a_0 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$P_n(\overline{z_0}) = 0$$

Corollario

Un polinomio a coefficienti reali di grado n ammette in $\mathbb{C}$ n soluzioni reali o complesse coniugate

- $z^2 + 4z + 1 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-1}}{1} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} - 2 \\ z_2 = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$ 2 soluzioni reali

- $z^2 + z + 4 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} i$$ 2 soluzioni complesse coniugate

- $z^2 + 4z + i = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-i}}{1} = -2 \pm \sqrt{4-i}$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{4-i} \qquad z_1 = 4 - i$$

$$-\ |z_1| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$-\ \arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{|z_1|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{17} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_1}{2} + k\pi\right)} \quad \text{con } k = 0, 1$$

$$\begin{matrix} k=0 \\ k=1 \end{matrix} \begin{cases} z' = \sqrt{z_1} = \sqrt[4]{17} \cdot e^{i\frac{\varphi_1}{2}} \\ z'' = \sqrt{z_1} = \sqrt[4]{17} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_1}{2} + \pi\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = \sqrt[4]{17} \cdot \left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i \sin\frac{\varphi_1}{2}\right) \\ z'' = \sqrt[4]{17} \left[\cos\left(\frac{\varphi_1}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1}{2} + \pi\right)\right] \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{1}{4} \qquad \text{con } -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < 0$$

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\varphi_1}{2}}$$

$$\cos\frac{\varphi_1}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\varphi_1}{2}}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1}} = \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1}} = \frac{\cos\varphi_1}{|\cos\varphi_1|\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_1+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_1+1}}$$

siamo nel 4° quadrante

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_1+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

.....

OPPURE

$z^2 + 4z + i = 0$

$z = x + iy$ sostituisco

$$(x+iy)^2 + 4(x+iy) + i = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 4x + 4iy + i = 0 + i0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x = 0 \\ 2xy + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$