# FLUIDODINAMICA



Equazioni di conservazione della massa


$$A_1 \cdot \rho_1 \cdot c_{1_{\perp 1}} = A_2 \, \rho_2 \, c_{2_{\perp 2}}$$

$$m_1 = m_2$$

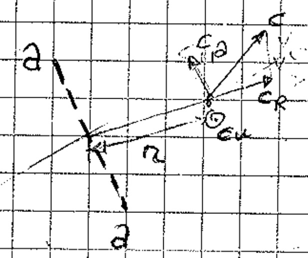
Equazione della q.tà di moto

$$\vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$ Q: quantità di moto $Q = m \cdot c$

$$\vec{F} = p_1 A_1 \vec{n_1} - p_2 A_2 \vec{n_2} = \dot{m} \, (\vec{c_2} - \vec{c_1})$$

Equazione del momento della quantità moto

$$\vec{M}_{aa} = \frac{d\,\vec{K_{a}}}{dt}$$

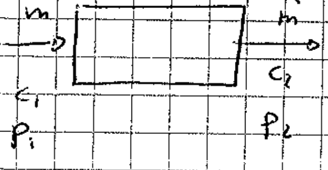



$dm \; c_u \cdot R$

$$\vec{M}_{aa} = \dot{m} \left( R_2 \, c_{u2} - R_1 \, c_{u1} \right)$$

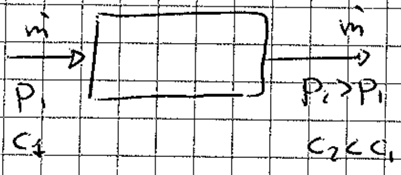
<u>Effusori e diffusori</u>

Gli effusori (o ugelli) sono un condotto attraversato da una corrente fluida con scopo l'aumento dell'energia cinetica (si ha diminuzione di pressione).




$c_2 > c_1$
$p_1 > p_2$

I diffusori sono il reciproco degli effusori. Si vuole aumento di pressione a scapito dell'energia cinetica



Valutiamo l'andamento delle sezione in un condotto

$$\dot m = A\rho c = \text{costante}$$

$$\frac{d\dot m}{\dot m} = \frac{A\rho\, dc + Ac\, d\rho + c\rho\, dA}{A\rho c} \Rightarrow \frac{d\dot m}{\dot m} = \frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (*)$$

$$\underbrace{dL_i}_{=0} = \frac{dp}{\rho} + c\,dc + \underbrace{dL_w}_{=0}$$ I° principio termodinamico. $dL_w = 0$ caso ideale

$$\frac{dp}{\rho} = -c\,dc \Rightarrow \frac{dp}{\rho c^2} = -\frac{dc}{c}$$ sostituiamo in *

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho c^2} - \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{1}{\rho c^2} - \frac{1}{\rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right)} \Rightarrow$$

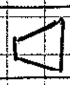
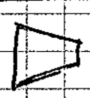
$$\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{(c_s)^2}$$

ricordiamo che $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{s=cost} = c_s^2$ caso isoentropico → velocità del suono

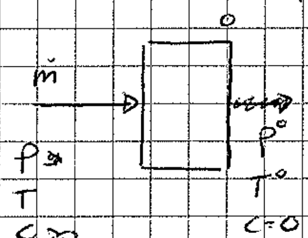
Definiamo M (numero di Mach) il rapporto $c/s$

$$\frac{\rho}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{1}{c^2}\left[1 - M^2\right]$$

Se il ~~condott~~ condotto è diffusore o effusore possiamo valutare due casi subsonico o supersonico

| | Subsonico $M<1$ | Supersonico $M>1$ |
|---|---|---|
| Effusore $dp<0$ |  |  |
| Diffusore $dp>0$ |  |  |

Ricordiamo le proprietà di Restagno (o di arresto isoentropico)



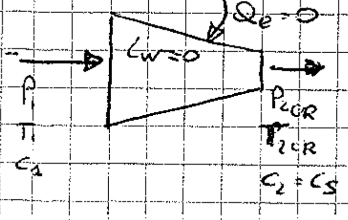

Vogliamo sapere le condizioni del fluido nel caso di arresto isoentropico ($q_e = l_w = 0$)

$$\underbrace{q_e}_{=0} + \underbrace{l_i}_{=0} = c_p\left(T^0 - T\right) + \frac{\cancel{c^{0\,2}} - c^2}{2}$$

$$T^0 = T + \frac{c^2}{2c_p}$$

La pressione totale $P^\circ$ sarà $P^\circ = P\left(\frac{T^\circ}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ $\qquad i^\circ = i + \frac{c^2}{2}$

Vogliamo trovare la pressione critica in un convergente cioè pressioni e temperature si raggiungono tali che la velocità in uscita sia quella del suono.




$$\underbrace{Q_e}_{=0} + \underbrace{L_i}_{0} = c_p\left(T_{2CR} - T_1\right) + \frac{c_{2s}^2 - c_1^2}{2}$$

$$0 = c_p\left(T_{2CR} - T_1^\circ\right) + \frac{c_{2s}^2}{2} \Rightarrow 2c_p\left(T_1^\circ - T_{2CR}\right) = \frac{c_{2s}^2}{1}$$

Ricordiamo che $c_s = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{s=cost} \Rightarrow \frac{p}{\rho^k} = cost$ ne segue che

$$dp\,\frac{1}{\rho^k} + (-k)\frac{1}{\rho^{k+1}}\,d\rho\,p = 0$$

$$dp = k\frac{p}{\rho}\,d\rho \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = k\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{RT} = kRT$$

cioè $c_s = \sqrt{kRT}$

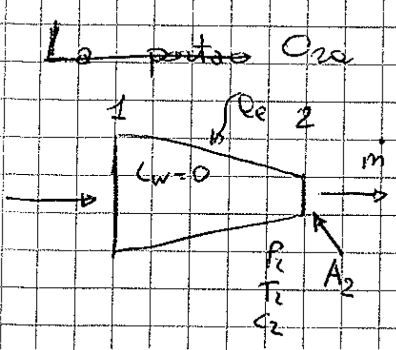
Esempio: aria $k = 1,4$ $\quad R = 287$ $\quad T = 15\,°C$ $\quad c_s = 340,2\ m/s$

$$2c_p\left(T_1^\circ - T_{2CR}\right) = \left(\sqrt{kRT_{2CR}}\right)^2$$

$$2\frac{\cancel{k}}{k-1}\cancel{R}\left(T_1^\circ - T_{2CR}\right) = \cancel{k}\cancel{R}\,T_{2CR} \Rightarrow \frac{T_{2CR}}{T_1^\circ} = \frac{2}{k+1}$$

$$\frac{P_{2CR}}{P_1^\circ} = \left(\frac{T_{2CR}}{T_1^\circ}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

~~La portata~~ Ora vogliamo ricavare la portata del condotto



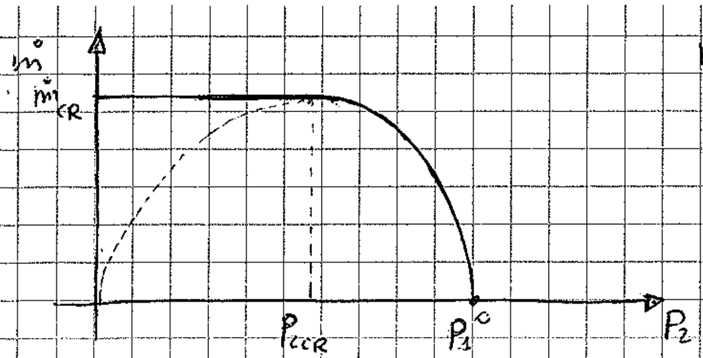

$$\dot m = A_2\,\rho_2\,c_2 \qquad c_2 = \cancel{c_s} = \sqrt{2c_p\left(T^\circ - T_2\right)}$$

$$\dot m = A_2\,\rho_1^\circ\left(\frac{p_2}{p_1^\circ}\right)^{1/k}\sqrt{2\frac{k}{k-1}RT_1^\circ\left(1 - \frac{T_2}{T_1^\circ}\right)}$$

$$\rho_2 = \rho_1^\circ\left(\frac{p_2}{p_1^\circ}\right)^{1/k} \quad \text{perché} \quad \frac{p}{\rho^k} = cost.$$

$$\rho_1^\circ = \frac{p_1^\circ}{RT_1^\circ}, \qquad \frac{T_2}{T_1^\circ} = \left(\frac{p_2}{p_1^\circ}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

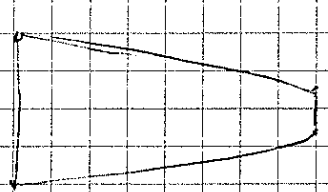
$$\dot m = A_2\,\frac{p_1^\circ}{\sqrt{RT_1^\circ}}\sqrt{2\frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1^\circ}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1^\circ}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$$

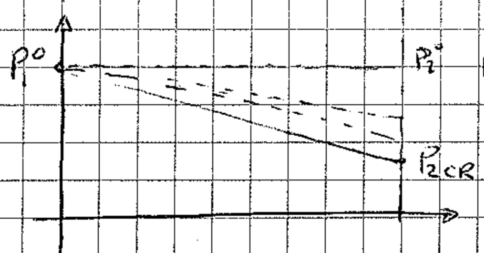


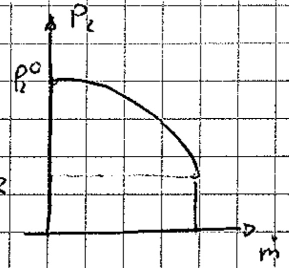

Noti $P_1^\circ$ $T_1^\circ$ $A_2$

$$\dot{m}_{CR} = A_2 \cdot \frac{P_1^\circ}{\sqrt{RT_1^\circ}} \sqrt{K\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}}}$$

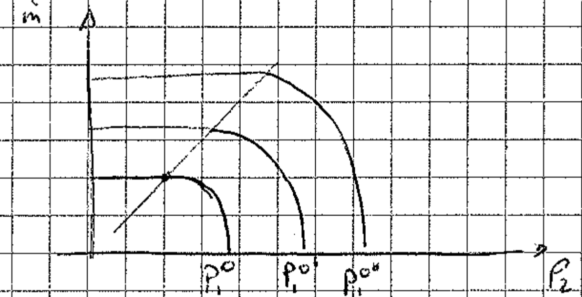
Valutiamo l'andamento delle pressioni all'interno del convergente





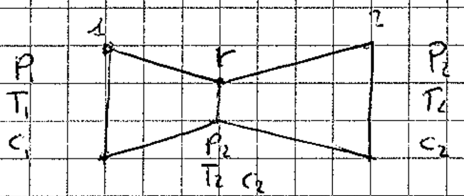




Se cambiano le condizioni di monte



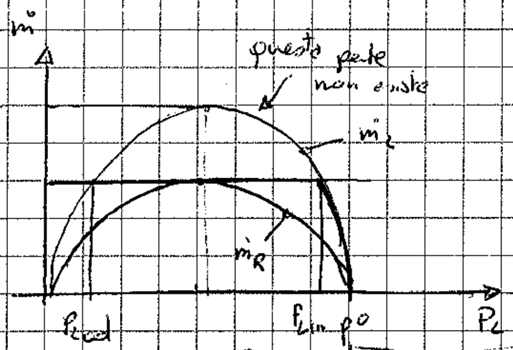

La variazione è proporzionale

Portata di un condotto convergente-divergente (De Laval)




$$\dot{m} = A_2 \, \rho_2 \, c_2$$

$$\dot{m}_2 = A_2 \frac{P_1^\circ}{\sqrt{RT_1^\circ}} \sqrt{2 \frac{K}{K-1}\left[\left(\frac{P_2}{P_1^\circ}\right)^{2/K} - \left(\frac{P_2}{P_1^\circ}\right)^{\frac{K+1}{K}}\right]}$$



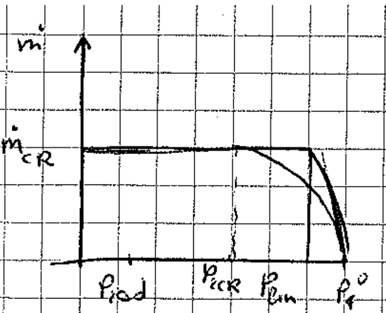

La portata è condizionata dalla sezione ristretta non dalla sezione 2!!

$P_{ad}$: pressione di adattamento

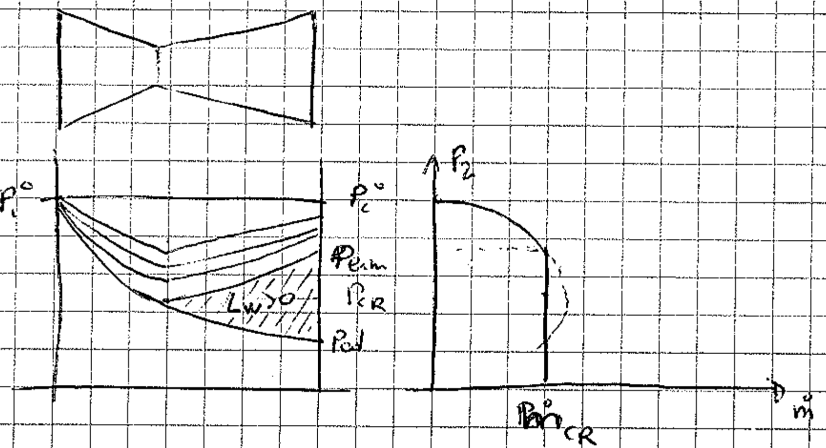
$$\dot{m}_R = A_R \frac{P_1^\circ}{\sqrt{RT_1^\circ}} \sqrt{2 \frac{K}{K-1}\left[\left(\frac{P_R}{P_1^\circ}\right)^{2/K} - \left(\frac{P_R}{P_1^\circ}\right)^{\frac{K+1}{K}}\right]}$$

$$\dot m_{CR} = A_R \frac{P_1^\circ}{\sqrt{R T_1^\circ}} \sqrt{K \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K+1}{K-1}}}$$

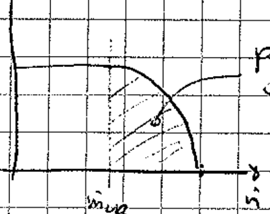





Se $P_2$ è minore di $P_{2lim}$ si creeranno delle fratture turbolente finché $P_2$ non diventa $P_{2ad}$ dove si raggiunge una velocità maggiore della velocità del suono (le pressioni decrescono continuamente da 1 a 2).

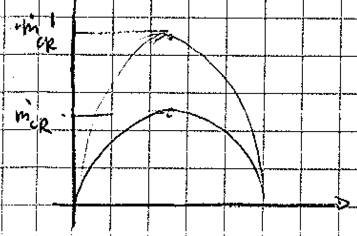



## Approssimazione ellittica della portata




$$\left(\frac{\dot m}{\dot m_{CR}}\right)^2 + \left(\frac{P_2 - P_{2CR}}{P_1^\circ - P_{2CR}}\right)^2 = 1$$

stessa cosa può essere fatta ~~tramite~~ per l'ugello conv-divergente




$$\left(\frac{\dot m}{\dot m'_{CR}}\right)^2 + \left(\frac{P_2 - P_{2CR}}{P_1 - P_{2CR}}\right)^2 = 1$$

$\dot m'_{CR} = \dot m_{CR} \cdot \frac{A_2}{A_R}$ perché portate stanno tra loro come il rapporto delle aree