VALORI RELATIVI (p.u. per unit)

Definizione: data una grandezza X ($P[W]$, $S[VA]$, $Q[VAr]$, $V[V]$, $I[A]$, $Z[\Omega]$, $Y[S]$) il valore relativo

$$X_{pu} = \frac{X}{X_B}, \quad X_B \text{ valore base (di riferimento)}.$$

In alcuni casi si usano i valori percentuali $X_{\%} = X_{pu} \cdot 100$

Introduciamo un valore base di potenza S_B, per la tensione V_B, corrente I_B, resistenza Z_B e ammettenza Y_B.

Due di questi valori sono arbitrari (di solito S_B e V_B). Gli altri vengono ricavati:

$$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}\, V_B}$$

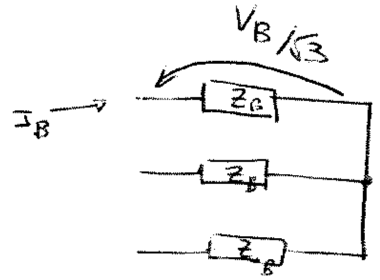
V_B è tensione concatenata

$$S_{pu} = \frac{S}{S_B} \qquad V_{pu} = \frac{V}{V_B} \qquad I_{pu} = \frac{I}{I_{pu}}$$

$$S_{pu} \cdot S_B = \sqrt{3}\, V_{pu} \cdot V_B\, I_{pu} \cdot I_B \qquad (S = \sqrt{3}\, V I)$$

$$S_{pu} = \underbrace{\sqrt{3}\, \frac{V_B I_B}{S_B}}_{=1} V_{pu} I_{pu} \Rightarrow \boxed{S_{pu} = V_{pu} \cdot I_{pu}} \text{ come in monofase}$$

$$Z_B = \frac{V_B}{\sqrt{3}\, I_B}$$



$$I = \frac{V}{\sqrt{3}\, Z}, \quad Z \text{ collegate a stella}$$

$\downarrow$

$$I_B I_{pu} = \frac{V_B \cdot V_{pu}}{\sqrt{3}\, Z_B\, Z_{pu}} \Rightarrow I_{pu} = \frac{V_{pu}}{Z_{pu}} \underbrace{\frac{V_B}{\sqrt{3}\, Z_B I_B}}_{=1}$$

$$\boxed{I_{pu} = \frac{V_{pu}}{Z_{pu}}} \text{ come in monofase}$$

NOTA: $$Z_B = \frac{V_B}{\sqrt{3}\frac{S_B}{\sqrt{3}V_B}} = \frac{V_B^2}{S_B}$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{\sqrt{3}\, I_B}{V_B} = \frac{S_B}{V_B^2} \qquad I = Y\frac{V}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} I_{pu} = Y_{pu} V_{pu} \\ Y_{pu} = \frac{1}{Z_{pu}} \end{array}}$$

Vantaggi dei valori relativi

- si eliminano i fattori 3 e $\sqrt{3}$

  (si usa solo il valore relativo della tensione concatenata.

  si può pensare di usare 2 valori base $\left\langle \begin{array}{l} V_B \to \text{concatenata} \\ \frac{V_B}{\sqrt{3}} \to \text{stellata} \end{array}\right.$

  o data S_{pu} posso ottenere $\left\langle \begin{array}{l} \frac{S_{pu} S_B}{3} \text{ potenza singola fase} \\ S_{pu} S_B \text{ potenza totale} \end{array}\right.$)

- il sistema elettrico è a tensione sinusoidale con valore efficace a tensione costante. $V_B = V_N$ quindi $V_{pu} = \frac{V}{V_N} \simeq 1$ $\left(|V - V_N| \ll V_N \right)$. Questo implica che in valori relativi si ha poca differenza tra corrente e potenza $S_{pu} = \underbrace{V_{pu}}_{\simeq 1} I_{pu} \Rightarrow S_{pu} \simeq I_{pu}$

  $V_{pu} = 1{,}03\ pu \to V = V_{pu} \cdot V_B = 1{,}03\ V_N \qquad V = V_N + 3\%\ V_N$

  se $V_N = 400\ V \to V_{pu} = 1{,}03\ pu \Rightarrow V = 412\ V$

- i parametri delle macchine (trasf / M.S. / M.A.) "variano poco" se espressi con base nominale $\left(\begin{array}{l} V_B = V_N \\ S_B = S_N \end{array} \right)$

  $$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}\, V_B} = \frac{S_N}{\sqrt{3}\, V_N} = I_N$$

  $I_{pu} = 0{,}75$

considerano ad esempio X''_s (reattanza subtransitoria della macchina sincrona) $\simeq 0{,}1 \div 0{,}2$ p.u. - Se dovessimo fornire X'' in valori assoluti sarebbe più complicato (e si avrebbero valori diversi).

① $V_N = 20\ kV$ $\quad V_B = V_N \quad S_B = S_N$

$S_N = 400\ MVA$

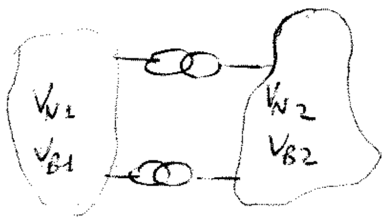
$$Z_B = \frac{V_B^2}{S_B} = 1\ \Omega \qquad X'' = 0{,}15\ \Omega$$

$X''_{pu} = 0{,}15$

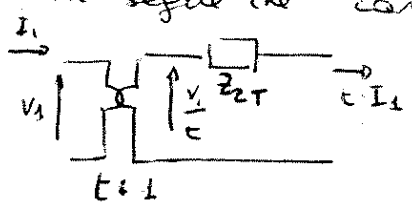
② $V_N = 6\ kV \quad S_N = 10\ MVA \quad X''_{pu} = 0{,}15$

$$Z_B = \frac{36}{10} = 3{,}6\ \Omega \qquad X'' = 0{,}15 \cdot 3{,}6 = 0{,}54\ \Omega$$

- Nel caso dei trasformatori scelgo una unica potenza base (voglio che sia conservata la conservazione delle potenze), ma scelgo diverse tensioni base.



Ne segue che cambia la rappresentazione del trasformatore



$$V_2 = \frac{V_1}{t} \qquad I_2 = t\,I_1$$

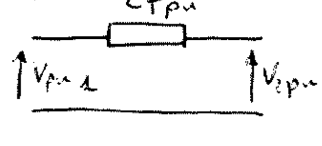
Se uso un'unica potenza base, ma due tensioni base

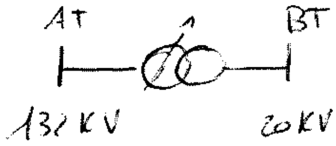
$$V_{1pu} = \frac{V_1}{V_{B1}} \qquad V_{2pu} = \frac{V_2}{V_{B2}} \qquad V_{2pu} V_{B2} = \frac{V_{1pu} V_{B1}}{t}$$

$$V_{2pu} = \frac{V_{1pu}}{t_{pu}} \qquad t_{pu} = \frac{t\,V_{B2}}{V_{B1}} \ , \quad t = \frac{V_{N1}}{V_{N2}}$$

quindi $t_{pu} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} \frac{V_{B2}}{V_{B1}}$ se $\frac{V_{B1}}{V_{B2}} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}}$ allora $t_{pu} = 1$

Se la condizione è verificata allora il circuito equivalente diventa





$V_{N1} = 132\ kV$

$V_{N2} = 20{,}6\ kV$ in generale è leggermente maggiore rispetto alla tensione base di 20 kV per compensare le cadute di tensione a carico.

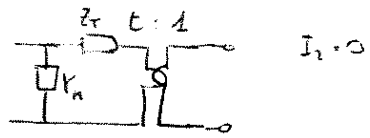
In questo caso scelgo

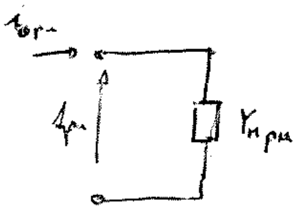
$V_{B1} = 132\ kV \qquad V_{B2} = 20\ kV \Rightarrow t_{pu} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} \cdot \frac{V_{B2}}{V_{B1}} = \frac{132}{20{,}6} \cdot \frac{20{,}0}{132} = 0{,}98$

Molti i trasformatori AT/MT sono a rapporto di trasformazione variabile sotto carico

Prova a vuoto del trasformatore

S_N, V_{N1}, V_{N2} base nominale





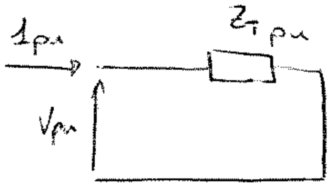
$$Y_{Mpu} = \frac{I_{0pu}}{1} = I_{0pu}$$

Se $I_{0\%} = 0{,}5\ \%$ $\Rightarrow I_{0pu} = 0{,}005 \Rightarrow Y_{Mpu} = 0{,}005\ pu$

$$Y_{M1} = Y_{Mpu}\, Y_{B1} = I_{0pu} \frac{S_N}{V_{N1}^2}$$

$$Y_{M2} = Y_{Mpu}\, Y_{B2} = I_{0pu} \frac{S_N}{V_{N2}^2}$$

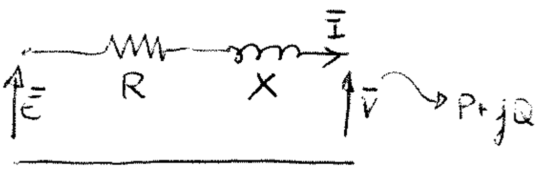
Prova in corto circuito del trasformatore (trascuro Y_M)



$$Z_{Tpu} = \frac{V_{cc\%}}{100} = V_{pu}$$

$$Z_{T1} = Z_{T1pu} \frac{V_{N1}^2}{S_N} \qquad Z_{T2} = Z_{Tpu} \frac{V_{N2}^2}{S_N}$$

Trasferimento P/Q attraverso un'impedenza



Questo circuito equivalente può rappresentare:

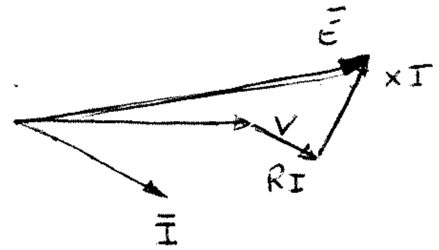
- linea
- trasformatore

Possiamo anche immaginarlo come un equivalente di Thevenin ($\bar{E}$ è tensione a vuoto, $\bar{Z}$ è l'impedenza equivalente)

Attribuiamo fase 0 a $\bar{V}$ $\quad (\bar{V} = V\angle 0)$

$\bar{E} = E\angle\delta$, δ è lo sfasamento tra $\bar{E}$ e $\bar{V}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}-\bar{V}}{R+jX} \qquad \bar{E} = \bar{V} + (R+jX)\bar{I}$$



$$\bar{I} = I\angle -\varphi$$

$$P + jQ = \bar{V}\,\bar{I}^*$$

$$P = VI\cos\varphi \qquad Q = \bar{V}\bar{I}\sin\varphi$$

$$\bar{I}^* = \frac{P+jQ}{\bar{V}} \Rightarrow \bar{I} = \frac{P}{V} - j\frac{Q}{V}$$

$\bar{I}_A = \dfrac{P}{V}$ è componente attiva della corrente

$\bar{I}_R = +\dfrac{Q}{V}$ è componente reattiva

$$\bar{I} = I_A - jI_R \qquad \bar{E} = V + (R+jX)(I_A - jI_R) = E\angle\delta$$

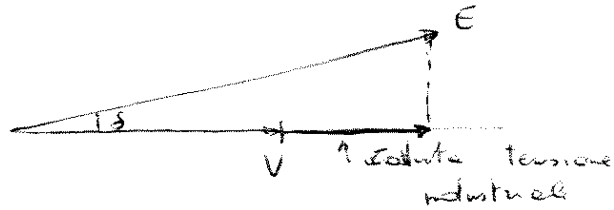
$$\begin{cases} E\cos\delta = V + RI_A + XI_R \\ E\sin\delta = \cancel{V} + RI_R + XI_A \end{cases}$$

Ipotesi:

- δ "piccolo" cioè $\sin\delta \simeq \delta$ e $\cos\delta \simeq 1$

$$E \simeq V + RI_A + XI_R \qquad E - V \simeq RI_A + XI_R = \frac{RP+XQ}{V}$$

$\boxed{E - V \simeq \frac{RP + XQ}{V}}$ è formula della caduta di tensione industriale



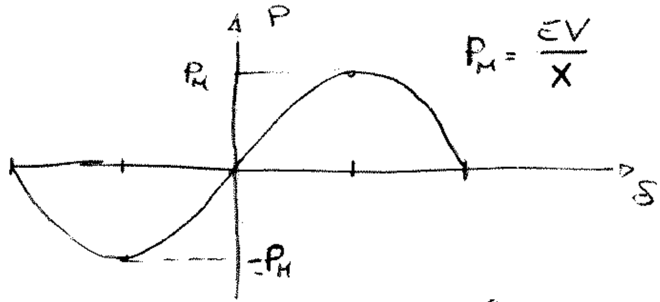
Questo è una situazione tipica dei sistemi di distribuzione

Ipotesi 2: $R \ll X$. Cioè R trascurabile

$$\begin{cases} E\cos\delta = V + X I_R \\ E\sin\delta = \cancel{R} + X I_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_R = \dfrac{E\cos\delta - V}{X} \\ I_A = \dfrac{E\sin\delta \cancel{-}}{X} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P = V I_A = \frac{EV}{X}\sin\delta$$

$$Q = V I_R = \frac{V}{X}\left(E\cos\delta - V\right)$$



Posso far variare la potenza ~~pot~~ attiva variando gli sfasamenti e non i moduli delle tensioni.

In DC non posso perchè $X = 0$ $\quad P = V\dfrac{E-V}{R}$

Consideriamo potenza reattiva. se δ è "piccolo" allora $\cos\delta \simeq 1$

$|P| \ll P_M$

$$Q = \frac{V}{X}(E - V)$$ cioè Q è proporzionale alla differenza dei moduli delle tensioni.

Questo è uno dei motivi per cui è necessario il rifasamento.

Questa trattazione è valida per i componenti del sistema elettrico AT

$\boxed{\cancel{E - V = \frac{RP + XQ}{V}}}$ ~~è la formula della caduta di tensione industriale~~

Funzioni iperboliche $(x \in \mathbb{R})$

$$\cosh = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$$

ricordiamo che

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Se $\bar{z} \in \mathbb{C}$

$$\cosh \bar{z} = \frac{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2}$$

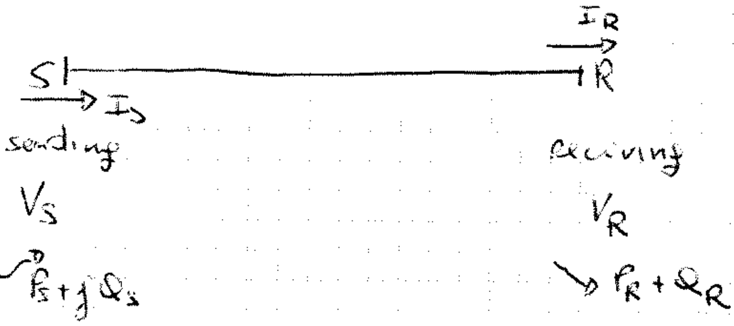
$$e^{\bar{z}} = e^{x + jy} = e^{x}(\cos y + j \sin y)$$

A noi interessa il caso in cui $\bar{z} = jy$

$$\left.\begin{aligned} \cosh(jy) &= \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} = \cos y \\ \sinh(jy) &= j\,\frac{e^{jy} - e^{-jy}}{j2} = j \sin y \end{aligned}\right\} \tanh(jy) = j \tan(y)$$

Linee elettriche

Noi consideriamo linee elettriche 3-fase simmetriche funzionanti in regime trifase simmetrico ed equilibrato funzionanti in sequenza diretta



Definiamo a la lunghezza della linea

Consideriamo un elemento di lunghezza infinitesima dx