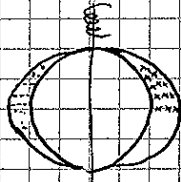


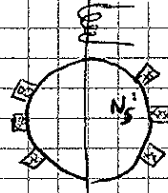
MACCHINA ASINCRONA (o a induzione)

- Ipotesi:
- 1) 2 poli, 1 coppia polare $\Rightarrow \alpha_e = \alpha_m$
 - 2) avvolgimenti stator trifase, identici, sfasati di 120° , con numero di N_s spire e distribuzione sinusoidale.

distribuzione sinusoidale



sinusoidale



non realizzabile

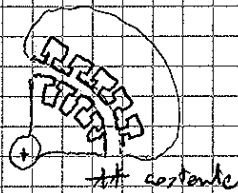
Stidiamo se la fondamentale delle forze magnetomotrici. Per lo studio delle fondamentali le N_s spire contano come N_s' , mentre per il concatenamento di flusso le N_s spire contano come N_s'' .

La distribuzione sinusoidale implica: - distribuzione di fmm puramente sinusoidale
- concatenamento distrib. di flusso puramente sinusoidale.

- Ipotesi:
- 3) Rotore con avvolgimento di rotore trifase (non a poble), con indutture sfasate di 120° , formato da N_r spire a distribuzione sinusoidale

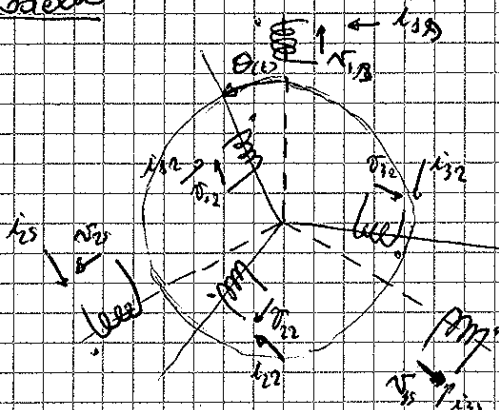
a) Ferro ideale $\begin{cases} \mu_r \rightarrow \infty \\ \rho_{Fe} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ le indutture di ferro magnetico avvolgono solo il rotore

b) Macchina isotropa cioè $\exists L_e = \text{cost}$ cioè $\exists R_e = \text{cost}$



$NI = R_e \phi$ se R_e è uguale per tutti i punti
allora $\phi = \frac{F_{mm}}{R_e}$

Modello



$$\begin{cases} V_{s1} = R_s i_{s1} p \lambda_{s1} \\ V_{s2} = R_s i_{s2} p \lambda_{s2} \\ V_{s3} = R_s i_{s3} p \lambda_{s3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{r1} = R_r i_{r1} p \lambda_{r1} = 0 \\ V_{r2} = R_r i_{r2} p \lambda_{r2} = 0 \\ V_{r3} = R_r i_{r3} p \lambda_{r3} = 0 \end{cases}$$

paoli nel 99% dei casi gli avv. di rotore sono in c.c.

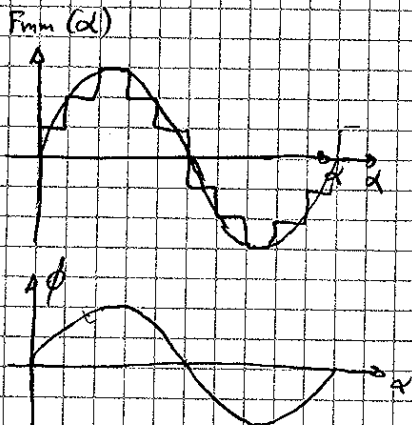
$$G_{123}^S = \begin{vmatrix} g_{11}^S \\ g_{12}^S \\ g_{23}^S \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} V_{123}^S = R_S I_{123}^S + p \Lambda_{123}^S \\ V_{123}^R = R_R I_{123}^R + p \Lambda_{123}^R = 0 \end{cases}$$

eq. magnetica

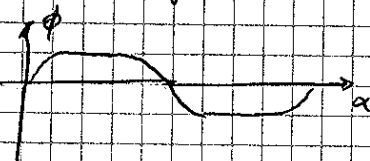
$$\Lambda = L(\theta) I$$

$$\begin{cases} \Lambda_{123}^S = L_{S3} I_{123}^S + M_{113}^{SS} I_{123}^S + M_{113}^{SR}(\theta) I_{123}^R \\ \Lambda_{123}^R = L_{R3} I_{123}^R + M_{113}^{RS}(\theta) I_{123}^S + M_{113}^{RR} I_{123}^R \end{cases}$$

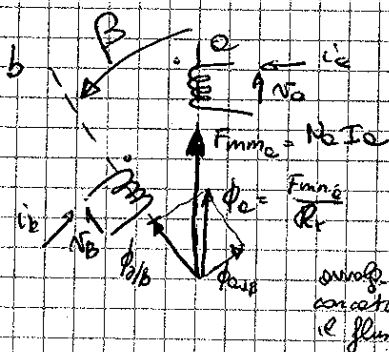


Prima ipotesi: in un motore reale è a postutto
Se consideriamo la spira e distribuzione sinusoidale
si ha solo la fondamentale.

Se il ferro satura succede che $\phi(\alpha)$ risulta



Per ipotesi il ferro non satura.



dobbiamo trovare la mutua induttanza tra
l'avvolgimento a e b.

$$\phi_0 = \frac{F_{m_a}}{R_{eq}} = \frac{N_a i_a}{R_{eq}}$$

$$\phi_{a|b} = \phi_0 \cos \beta$$

$$\phi_{a|b} = \pm \phi_0 \sin \beta$$

valutata eq.
di trasf. mag.

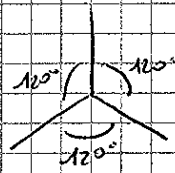
$$\lambda_{ba} = N_b \phi_{a|b} = \frac{N_a N_b}{R_{eq}} \cos(\beta) i_a \Rightarrow$$

$$M_{ba} = \frac{N_a N_b}{R_{eq}} \cos(\beta) = M_{ab}$$

$$M_{123}^{SS} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

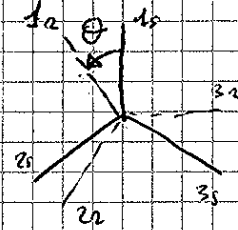
$$= M_S \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{N_S}{M_S} =$$



$$M_{123}^{RR} = M_R \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{123}^{SR} = M_{123}^{RS T} = \frac{N_S N_R}{M_{SR}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta+240^\circ) \\ \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) & \cos(\theta+120^\circ) \\ \cos(\theta+240^\circ) & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Se $N_S = N_R = N$ allora $M_S = M_R = M_{RS} = M$

$$\begin{cases} V_{123}^S = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} I_{123}^S + p \Delta_{123}^S \\ V_{123}^R = 0 = \begin{bmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} I_{123}^R + p \Delta_{123}^R \end{cases}$$

con

$$\Delta_{123}^S = \begin{bmatrix} L_{OS} & 0 & 0 \\ 0 & L_{OS} & 0 \\ 0 & 0 & L_{OS} \end{bmatrix} I_{123}^S + M \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} I_{123}^S + M \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta+240^\circ) \\ \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) & \cos(\theta+120^\circ) \\ \cos(\theta+240^\circ) & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) \end{bmatrix} I_{123}^R$$

$$\Delta_{123}^R = \begin{bmatrix} L_{OR} & 0 & 0 \\ 0 & L_{OR} & 0 \\ 0 & 0 & L_{OR} \end{bmatrix} I_{123}^R + M \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta+240^\circ) \\ \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) & \cos(\theta+120^\circ) \\ \cos(\theta+240^\circ) & \cos(\theta+120^\circ) & \cos(\theta) \end{bmatrix} I_{123}^S + M \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} I_{123}^S$$

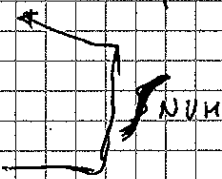
h $t=0$ dobbiamo conoscere

$\Delta_{123}^S, \Delta_{123}^R(\omega, \theta)$ da cui si possono ricavare

$$I = L^{-1}(\theta) \Delta$$

$$p \Delta_{123}^S = V_{123}^S - R_S I_{123}^S$$

$$p \Delta_{123}^R = V_{123}^R - R_R I_{123}^R$$

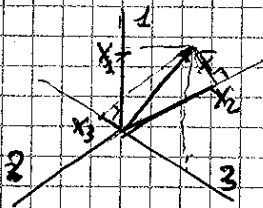


molte a seconda del collegamento degli avvolgimenti sono le seguenti informazioni:

$$\sum v_{is} = 0 \quad \text{colleg. } \Delta$$

$$\sum i_{is} = 0 \quad \text{colleg. } Y$$

Noi abbiamo una macchina con 6 avvolgimenti (3 a statore e 3 a rotore).
Tuttavia possiamo sostituirla con una macchina a 4 avvolgimenti (2 a rotore e 2 a statore).

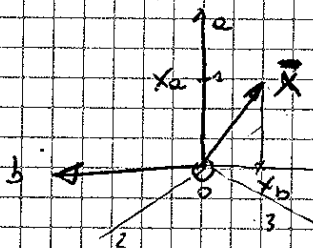


$$\text{se } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\vec{x}$$

se proiettato il vettore \vec{x} sui tre assi ottengo x_1, x_2 e x_3

Scelgo due assi



$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

T

T ha due problemi:

- non conserva il modulo del vettore ma lo scala di $\frac{2}{3}$

$$T_{cont} = \frac{2}{3} T$$

- non conservano il formalismo della potenza

$$P_{123} = I_{123}^T \cdot V_{123} = \sqrt{2} i_2 + \sqrt{2} i_3 + \sqrt{3} i_3$$

$$P_{123} - P_{ab0} = (T^{-1} I_{ab0})^T \cdot (T^{-1} V_{ab0}) = I_{ab0}^T \underbrace{(T^{-1})^T T^{-1}}_{\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}} V_{ab0} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{2} i_a + \frac{2}{3} \sqrt{2} i_b + \frac{1}{3} \sqrt{3} i_3$$

Il problema non si risolve neanche con T_{cont} .

$$\text{infatti: } (T_{cont}^{-1})^T (T_{cont}) = \begin{vmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{vmatrix}$$

$$\text{cioè } P = \frac{3}{2} N_a i_a + \frac{3}{2} N_b i_b + \frac{3}{4} N_0 i_0$$

Noi vogliamo una T_0 che conservi il formalismo delle potenze.

$$P = N_a i_a + N_b i_b + N_0 i_0 \quad \text{con } T_0$$

Vogliamo trovare una T_0 tale che $(T_0^{-1})^T \cdot T_0^{-1} = I_3 \Rightarrow T_0^{-1} = T_0^T$
 cerchiamo una trasformazione "ortogonale"

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T_0 = \begin{bmatrix} h & h & h \\ h & \frac{h}{2} & -\frac{h}{2} \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

troviamo h e k in modo che $(T_0^{-1})^T \cdot T_0^{-1} = I_3$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{da cui}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad T_0 \text{ scala il vettore } \vec{i} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

esempio

$$\begin{array}{c} | x_a(t) \\ | x_b(t) \\ | x_0(t) \end{array} \xrightarrow{X_{100} = T_0 X_{123}} \begin{array}{c} | x_a(t) \\ | x_b(t) \\ | x_0(t) \end{array} = \begin{array}{c} \sqrt{\frac{2}{3}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} (x_2 + x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (x_1 + x_2 + x_3) = 0 \end{array}$$

con $x_1, x_2, x_3 = 0$

$$x_2 + x_3 = -x_1$$

$$\begin{cases} x_a(t) = x_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} x_1(t) \\ x_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2(t) - x_3(t)) \\ x_0(t) = 0 \end{cases}$$

$x_0(t)$ conferme la fase dritta dell'axe 1

Esempio

$$v_1(t) = V \cos(\omega t)$$

$$v_2(t) = V \cos(\omega t - 120^\circ)$$

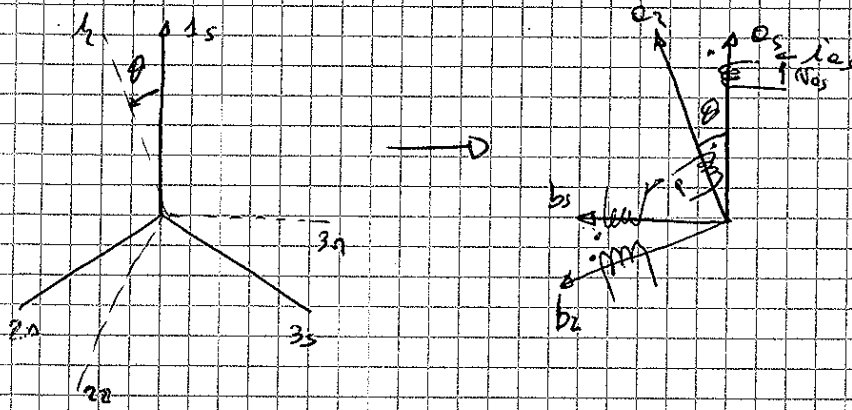
$$v_3(t) = V \cos(\omega t - 240^\circ)$$

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} V \cos(\omega t)$$

$$v_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} V [\sin(\omega t)]$$

$$v_0(t) = 0$$

Ors vogliamo applicare le trasformazioni al sistema $1_s, 2_s, 3_s$ e $1_r, 2_r, 3_r$.



Molti preferiscono per T_0 le equazioni elett. e magnetiche

$$\begin{cases} \times T_0 \\ \times T_0 \end{cases} \begin{cases} V_{123}^S = R_S I_{123}^S + p \Delta_{123}^S \\ V_{123}^R = R_R I_{123}^R + p \Delta_{123}^R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{ab0}^S = R_S I_{ab0}^S + p \Delta_{ab0}^S \\ V_{ab0}^R = 0 = R_R I_{ab0}^R + p \Delta_{ab0}^R \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{ab0}^S = T_0 L_{ab0}^S I_{ab0}^S + T_0 M_{123}^{SS} I_{123}^S + T_0 M_{123}^{SR} I_{123}^R \\ \Delta_{ab0}^R = T_0 L_{ab0}^R I_{ab0}^R + T_0 M_{123}^{RS} I_{123}^S + T_0 M_{123}^{RR} I_{123}^R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_0 M_{123}^{SS} T_0^T &= M_{ab0}^{SS} \\ T_0 M_{123}^{SR} T_0^T &= M_{ab0}^{SR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0 M_{123}^{RS} T_0^T &= M_{ab0}^{RS} \\ T_0 M_{123}^{RR} T_0^T &= M_{ab0}^{RR} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta_{ab0}^S = L_{ab0}^S I_{ab0}^S + M_{ab0}^{SS} I_{ab0}^S + M_{ab0}^{SR} I_{ab0}^R \\ \Delta_{ab0}^R = L_{ab0}^R I_{ab0}^R + M_{ab0}^{RS} I_{ab0}^S + M_{ab0}^{RR} I_{ab0}^R \end{cases}$$

Per $N_S = N_R = N$ $M_{ab0}^{SR} = (M_{ab0}^{RS})^T = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_{ab0}^{SR} = (M_{ab0}^{RS})^T = \frac{3}{2} M \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_0^S = R_S I_0^S + p \lambda_0^S I_0^S, & \lambda_0^S = L_{ab0}^S I_0^S \\ V_0^R = 0 = R_R I_0^R + p \lambda_0^R I_0^R, & \lambda_0^R = L_{ab0}^R I_0^R + M_{ab0}^{RS} I_0^S + M_{ab0}^{RR} I_0^R = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_0^R(t) = T_0^R e^{\frac{t}{\tau_R}}$$

$$\tau_R = \frac{L_{ab0}^R}{R_R}$$

quindi non ci potrai mai avere I_0^R in un notaie esatto.

$$N_0^s = R_s i_0^s + L_{os} p i_0^s \quad \text{a statore}$$

se avvolgimento a triangolo $N_0^s = 0$ e ricorriamo nel caso del rotore (ci si può buttare via i_0^s)

se avvolgimento a stella $\sum i_s = 0 \rightarrow i_0^s = 0$ e quindi possiamo buttare via l'omopolo.

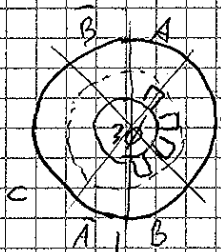
Si può avere i_0^s se si ha il neutro, ma noi lo trascuriamo.

Otteniamo quindi:

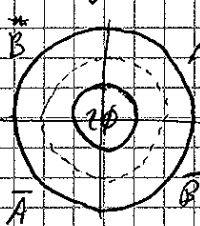
$$\begin{cases} V_{eb}^s = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} I_{eb}^s + p \Delta_{eb}^s \\ V_{eb}^r = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} I_{eb}^r + p \Delta_{eb}^r \\ \Delta_{eb}^s = \begin{bmatrix} L_{os} & 0 \\ 0 & L_{os} \end{bmatrix} I_{eb}^s + \frac{3M}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_{eb}^s + \frac{3}{2} M \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} I_{eb}^r \\ \Delta_{eb}^r = \begin{bmatrix} L_{or} & 0 \\ 0 & L_{or} \end{bmatrix} I_{eb}^r + \frac{3M}{2} \begin{vmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} I_{eb}^s + \frac{3M}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_{eb}^r \end{cases}$$

$\frac{3M}{2}$ è l'induttanza di magnetizzazione della macchina trifase

CONFRONTO MACCHINA 3Φ e MACCHINA 2Φ EQUIVALENTE



Noi abbiamo sostituito la parte interna con una macchina bifase. Noi non modifichiamo la costruzione della macchina e la struttura degli avvolgimenti. Il numero di cavi sarà



$$N_{c2\phi} = \frac{2}{3} N_{c3\phi}$$

$$h_{c2\phi} = h_{c3\phi} \quad \text{stessa altezza di cavo}$$

Questo significa che le cavi saranno più larghe nella macchina bifase

$$w_{c2\phi} = \frac{3}{2} w_{c3\phi} \quad \text{larghezza cavo}$$

Quindi l'area: $A_{c2\phi} = \frac{3}{2} A_{c3\phi}$

molto ricordarsi che

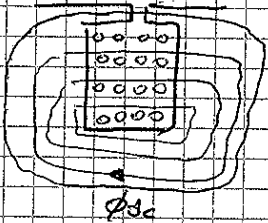
$$N_{sp,2\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} N_{sp,3\phi} \quad \xrightarrow{B \propto \cos \theta} \quad N_{sp,2\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} N_{sp,3\phi}$$

$$A_{cond,2\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} A_{cond,3\phi} \quad \xrightarrow{\frac{V}{I} \propto \cos \theta} \quad A_{cond,2\phi} = \sqrt{\frac{3}{2}} A_{cond,3\phi}$$

$$R_{s2\phi} = \rho_{cu} \frac{l_{medio\ spire\ 2\phi} N_{spire\ 2\phi}}{A_{cond\ 2\phi}} = \rho \frac{l_{medio\ spire\ 3\phi} \sqrt{\frac{3}{2}} N_{spire\ 3\phi}}{\sqrt{2} A_{cond\ 3\phi}} = R_{s3\phi}$$

$$P_{s2\phi} = 2 R_{s2\phi} I_{s2\phi}^2 = 2 R_{s3\phi} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} I_{s3\phi}\right)^2 = 3 R_{s3\phi} I_{s3\phi}^2 = P_{s3\phi}$$

$$M_{2\phi} = \frac{(N_{spire\ 2\phi})^2}{R_{eq\ 2\phi}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} N_{spire\ 3\phi}\right)^2}{R_{eq\ 3\phi}} = \frac{3}{2} M_{3\phi}$$

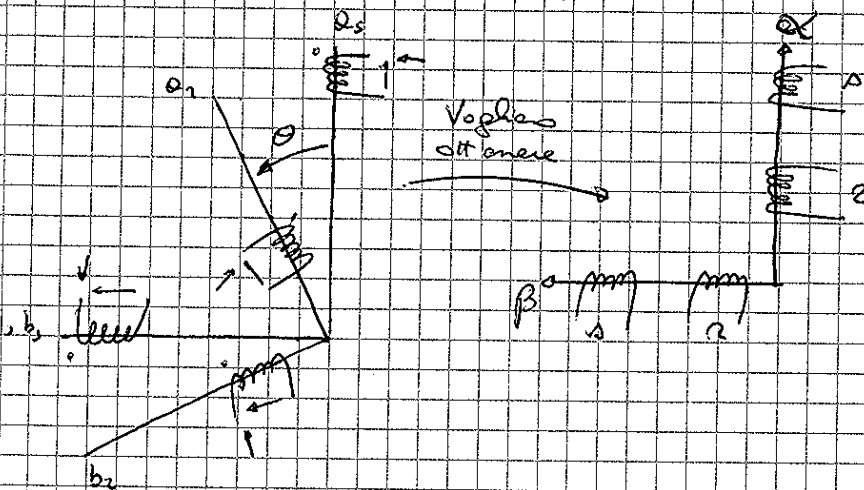


$$L_{s2\phi} = \frac{N_{spire\ 2\phi}^2}{R_{eq\ 2\phi}} = \frac{N_{spire\ 2\phi}^2}{\frac{l_{eq}}{\mu_0 \cdot S_{eq}}} \propto \frac{N_{spire\ 2\phi}^2}{w_c \cdot l_c} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} N_{spire\ 3\phi}\right)^2}{\frac{3}{2} w_c \cdot l_c}$$

l_{eq} = lunghezza di core (w_c)

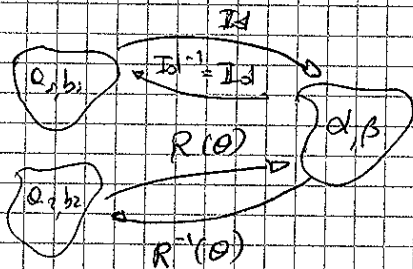
S_{eq} = l_c : emmele nel chine

In prime appox $L_{s2\phi} \propto L_{s3\phi}$

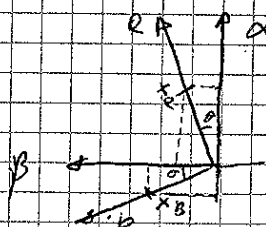


Per lo stato vero in α, β con l'identità

il rotore lo sposta in α, β con una operazione di rotazione del sistema di riferimento - Fros



Operatore rotazione R



Supponiamo di considerare @ componenti x_A e x_B sul sistema a, b .

Voglio trovare $R(\theta)$ per $x_{a,b} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$ tale che

111

$$X_{\alpha\beta} = R(\theta) X_{ab}$$

$$\begin{cases} X_{\alpha} = X_a \cos \theta - X_b \sin \theta \\ X_{\beta} = X_a \sin \theta + X_b \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} X_{\alpha} \\ X_{\beta} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}}_{R(\theta)} \begin{vmatrix} X_a \\ X_b \end{vmatrix}$$

$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$ è una trasformazione ortogonale, e conserva le lunghezze delle potenze

$$P = \sqrt{2} X_{\alpha} + \sqrt{2} X_{\beta}$$

Conserva anche i moduli:

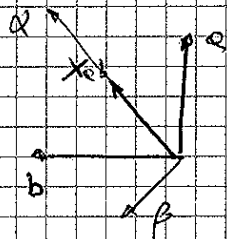
$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) \Rightarrow R^{-1}(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

Il piano ruota in senso ^{orario} antiorario per passare da (α, β) a (a, b) ruota in senso antiorario. Facciamo quindi una rotazione di $-\theta$

$R(\theta)$ è la rotazione oraria del sistema di riferimento

Considerazioni

$$\begin{vmatrix} X_{\alpha} \\ X_{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \cos \omega t \\ X \sin \omega t \end{vmatrix}$$



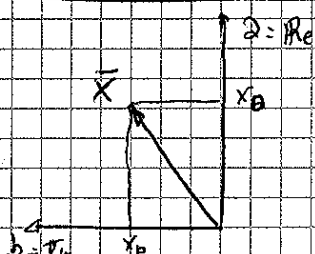
Vogliamo avere il vettore ed un sistema (α, β) che ruota insieme ad ~~il~~

$$\begin{vmatrix} X_{\alpha} \\ X_{\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \end{vmatrix}$$

Proviamo a fare la trasformazione

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X_{\alpha} \\ X_{\beta} \end{vmatrix} &= R^{-1}(\theta) \begin{vmatrix} X_a \\ X_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \cos \omega t \\ X \sin \omega t \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \\ -\sin \omega t \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Altra rotazione (per vettori a 2 componenti)

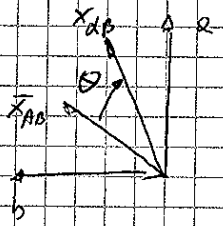


$$X_{ab} = \begin{vmatrix} X_a \\ X_b \end{vmatrix}$$

$$\bar{X}_{ab} = X_a + j X_b \quad \text{vettore spinale}$$

permette rotazioni più veloci

Vogliamo sapere $\bar{X}_{\alpha\beta}$ di un angolo θ in modo da ottenere un vettore $\bar{X}_{\alpha\beta}$ - Ruota il sistema di riferimento di un angolo $-\theta$.



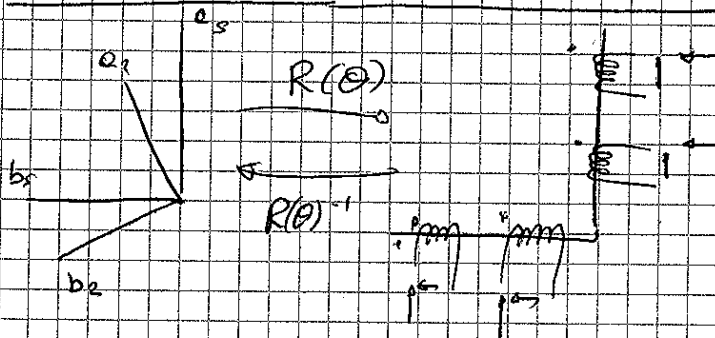
$$\begin{bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_\alpha \cos\theta + X_\beta \sin\theta \\ -X_\alpha \sin\theta + X_\beta \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\alpha\beta} &= X_\alpha + jX_\beta = X_\alpha \cos\theta - X_\beta \sin\theta + j(-X_\alpha \sin\theta + X_\beta \cos\theta) \\ &= (X_\alpha + jX_\beta) \cos\theta - j(X_\alpha - jX_\beta) \sin\theta = \\ &= \bar{X}_{\alpha\beta} e^{-j\theta} \end{aligned}$$

Riassumendo

Rot. Sdz	Rot. Vettore	OP. Matriciale	OP. complesso
Orologio	Antiorario	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot R(\theta)$	$e^{j\theta}$
Antiorario	Orologio	$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot R(-\theta)$	$e^{-j\theta}$

APPLI CHIAMO le matrici di rotazione di macchine bifase



$$\begin{aligned} \text{I} \times \int V_{\alpha\beta}^s &= R_s I_{\alpha\beta}^s + p \Delta_{\alpha\beta}^s \\ R(\theta) \times \int V_{\alpha\beta}^r &= R_s I_{\alpha\beta}^r + p \Delta_{\alpha\beta}^s \end{aligned}$$

$$\begin{cases} V_{\alpha\beta}^s = R_s I_{\alpha\beta}^s + p \Delta_{\alpha\beta}^s \\ V_{\alpha\beta}^r = R_r I_{\alpha\beta}^r + \underbrace{R(\theta)^T}_p \Delta_{\alpha\beta}^r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(\theta) \cdot p R^T(\theta) \Delta_{\alpha\beta}^r &= R^T(\theta) \Delta_{\alpha\beta}^r \\ &= R(\theta) p [R^T(\theta)] \Delta_{\alpha\beta}^r + \underbrace{R(\theta) R^T(\theta)}_{\text{I}} p \Delta_{\alpha\beta}^r = \\ &= \omega_R \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Delta_{\alpha\beta}^r + p \Delta_{\alpha\beta}^r \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \frac{d\theta}{dt} \Delta_{\alpha\beta}^r = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \omega_R \Delta_{\alpha\beta}^r$$

Risolvendo le equazioni elettriche si ottiene:

$$\begin{cases} V_{\alpha\beta}^s = R_s I_{\alpha\beta}^s + p \Delta_{\alpha\beta}^s \\ V_{\alpha\beta}^R = 0 = R_R I_{\alpha\beta}^R + p \Delta_{\alpha\beta}^R + \underbrace{\omega_R}_{\Omega_R} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Delta_{\alpha\beta}^R \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Fem trasformate}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{fem motionali}}$

I termini motionali non dipendono mai dal proprio seno.

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha\beta}^s = L_{\alpha s} I_{\alpha\beta}^s + \text{Id } M_{\alpha\beta}^{ss} \text{Id}^{-1} I_{\alpha\beta}^s + \text{Id } M_{\alpha\beta}^{sR} R^T(\theta) I_{\alpha\beta}^R \\ \Delta_{\alpha\beta}^R = L_{\alpha R} I_{\alpha\beta}^R + R(\theta) M_{\alpha\beta}^{RR} \text{Id}^{-1} I_{\alpha\beta}^R + R(\theta) M_{\alpha\beta}^{RS} R^T(\theta) I_{\alpha\beta}^R \end{cases}$$

$$M_{\alpha\beta}^{ss} = \text{Id } M_{\alpha\beta}^{ss} \text{Id}^{-1}$$

$$M_{\alpha\beta}^{sR} = \text{Id } M_{\alpha\beta}^{sR} R^T(\theta)$$

$$M_{\alpha\beta}^{RS} = R(\theta) M_{\alpha\beta}^{RS} \text{Id}^{-1}$$

$$M_{\alpha\beta}^{RR} = R(\theta) M_{\alpha\beta}^{RR} R^T(\theta)$$

Risulta che

$$M_{\alpha\beta}^{ss} = M_{\alpha\beta}^{RR} = M_{\alpha\beta}^{sR} = M_{\alpha\beta}^{RS} = \frac{3}{2} M \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dentro la matrice mutua non si ha più dipendenza da θ (è dipendente da θ si ha nei termini motionali.)

$$\bar{V}_s \begin{cases} \bar{V}_{\alpha s} = R_s i_{\alpha s} + p \lambda_{\alpha s} \\ \bar{V}_{\beta s} = R_s i_{\beta s} + p \lambda_{\beta s} \end{cases}$$

$$\bar{V}_R \begin{cases} \bar{V}_{\alpha R} = R_R i_{\alpha R} + p \lambda_{\alpha R} + \omega_R \lambda_{\beta R} = 0 \\ \bar{V}_{\beta R} = R_R i_{\beta R} + p \lambda_{\beta R} + \omega_R \lambda_{\alpha R} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{\alpha s} = L_{\alpha s} i_{\alpha s} + \frac{3}{2} M i_{\alpha s} + \frac{3}{2} M i_{\beta R} \\ \lambda_{\beta s} = L_{\alpha s} i_{\beta s} + \frac{3}{2} M i_{\beta s} + \frac{3}{2} M i_{\alpha R} \\ \lambda_{\alpha R} = L_{\alpha R} i_{\alpha R} + \frac{3}{2} M i_{\alpha R} + \frac{3}{2} M i_{\beta s} \\ \lambda_{\beta R} = L_{\alpha R} i_{\beta R} + \frac{3}{2} M i_{\beta R} + \frac{3}{2} M i_{\alpha s} \end{cases}$$

Per semplificare usiamo la notazione complessa

$$\bar{V}_s = \bar{V}_{\alpha s} + j \bar{V}_{\beta s} = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Delta}_s$$

$$\bar{V}_R = 0 = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R - j \omega_R \Delta_R$$

$$\omega_R \lambda_{\beta R} + j \omega_R \lambda_{\alpha R} = -j \omega_R (\lambda_{\alpha R} + j \lambda_{\beta R}) = -j \omega_R \Delta_R$$

j è operatore
puramente spaziale

$$\bar{I}_s = L_{os} \bar{I}_s + \frac{3}{2} M (\bar{I}_s + \bar{I}_r)$$

$$\bar{I}_r = L_{or} \bar{I}_r + \frac{3}{2} M (\bar{I}_r + \bar{I}_s)$$

$$L_m = \frac{3}{2} M \quad \text{induttanza di magnetizzazione}$$

$$L_s = L_{os} + L_m \quad \text{induttanza totale di statore}$$

$$L_r = L_{or} + L_m \quad \text{induttanza totale di rotore}$$

$$I_s + I_r = I_m \quad \text{corrente di magnetizzazione}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Lambda}_s \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + p \bar{\Lambda}_r - j \omega_r \bar{\Lambda}_r \\ \bar{\Lambda}_s = L_{os} \bar{I}_s + L_m (\bar{I}_m) = L_s \bar{I}_s + L_m \bar{I}_r \\ \bar{\Lambda}_r = L_{or} \bar{I}_r + L_m (\bar{I}_m) = L_r \bar{I}_r + L_m \bar{I}_s \\ \bar{I}_m = \bar{I}_s + \bar{I}_r \end{cases}$$

Macchina con più di due poli ($p_p > 1$)

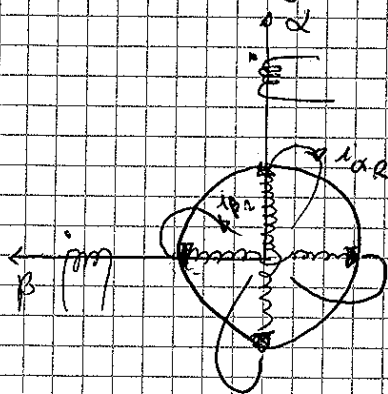
ricordiamo che

$$\begin{cases} \alpha_e = p_p \alpha_m \\ \omega_e = p_p \omega_m \end{cases}$$

L'angolo giusto per scrivere i concatenamenti di flusso è l'angolo meccanico. L'unica diversità del modello ad 1 coppia polare è:

$$\bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + p \bar{\Lambda}_r + j \underline{p_p} \omega_r \bar{\Lambda}_r$$

Macchine generalizzate



α_r e I_{pr} nel modello sono generalizzati con nome frequente uguale a quelle di i_a e i_{ps} .
Se si nota un certo attraverso la natura.
 R^{-1} e T^{-1} si ottiene che le correnti hanno frequenza circa zero (come deve essere nelle macchine commutate).

Cerchiamo la funzione di coppia.

$$C_m = f(\bar{\Lambda}, \bar{I})$$

$$C_m \propto B_{tr} \sin \alpha_p R^2 L$$

$$\vec{P}_s = N_\alpha \vec{I}_\alpha + N_\beta \vec{I}_\beta = \vec{I}_{\alpha\beta}^s \cdot \vec{V}_{\alpha\beta}^s$$

$$P_s = \vec{V}_s \times \vec{I}_s = (N_\alpha \vec{I}_\alpha + j N_\beta \vec{I}_\beta) \times (I_\alpha + j I_\beta) = N_\alpha I_\alpha + N_\beta I_\beta$$

↑
scalare

$$P_{\text{elatt. entrante}} = \vec{V}_s \times \vec{I}_s + \vec{V}_R \times \vec{I}_R = \underbrace{R_s \vec{I}_s \times \vec{I}_s}_{P_{js}} + p \vec{I}_s \times \vec{I}_s + \underbrace{R_R \vec{I}_R \times \vec{I}_R}_{P_{jR}} + p \vec{I}_R \times \vec{I}_R - j p \omega_R \vec{I}_R$$

$\times \vec{I}_R =$

$$P_{js} = R_s (I_{\alpha s}^2 + I_{\beta s}^2) = R_s I_{\alpha s}^2 + R_s I_{\beta s}^2 = R_s |\vec{I}_s|^2 = 3 R_s I_{s \text{ eff}}^2$$

$$|\vec{I}_s| = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{s \text{ eff max}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{2} I_{s \text{ eff}} = \sqrt{3} I_{s \text{ eff}}$$

$I_{s \text{ eff}}$ efficace misurata sul motore 3φ

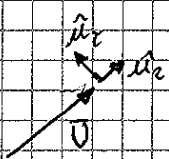
$$P_{\text{elatt. entrante}} = P_{js} + P_{jR} + \underbrace{p \vec{I}_s \times \vec{I}_s + p \vec{I}_R \times \vec{I}_R}_{se \neq p_{mech}} + j p p \omega_R \vec{I}_R \times \vec{I}_R$$

$\Rightarrow j p p \omega_R \vec{I}_R \times \vec{I}_R$ è potenza meccanica.

Cerchiamo di capire cosa sono $p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + p \vec{I}_s \times \vec{I}_s$

$$p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + p \vec{I}_s \times \vec{I}_s = L_{\alpha s} (p \vec{I}_s) \times \vec{I}_s + L_m p \vec{I}_m \times \vec{I}_s + L_{\alpha R} p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + L_m p (\vec{I}_m) \times \vec{I}_R = L_{\alpha s} p \vec{I}_s \times \vec{I}_s + L_{\alpha R} p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + L_m p (\vec{I}_m) \times (\vec{I}_R + \vec{I}_s)$$

Ora dobbiamo valutare i vettori:



$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d|\vec{u}|}{dt} \hat{u}_r + \omega |\vec{u}| \hat{u}_\tau$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{u} &= \frac{d|\vec{u}|}{dt} \hat{u}_\tau \times |\vec{u}| \hat{u}_r + \omega |\vec{u}| \hat{u}_\tau \times |\vec{u}| \hat{u}_r = \\ &= |\vec{u}| \frac{d|\vec{u}|}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d|\vec{u}|^2}{dt} \end{aligned}$$

Quindi:

$$p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + p \vec{I}_s \times \vec{I}_s = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_{\alpha s} |\vec{I}_s|^2 + \frac{1}{2} L_{\alpha R} |\vec{I}_R|^2 + \frac{1}{2} L_m |\vec{I}_m|^2 \right]$$

variazione di energia magnetica \neq nel tempo

$\frac{1}{2} L_{\alpha s} |\vec{I}_s|^2 + \frac{1}{2} L_{\alpha R} |\vec{I}_R|^2$ è l'energia magnetica di dispersione totale

$\frac{1}{2} L_m |\vec{I}_m|^2$ è l'energia magnetica associata al flusso principale

Da cui si ha $p \vec{I}_R \times \vec{I}_R + p \vec{I}_s \times \vec{I}_s$ è la potenza magnetizzante, cioè

Di conseguenza la potenza all'ore risulta essere:

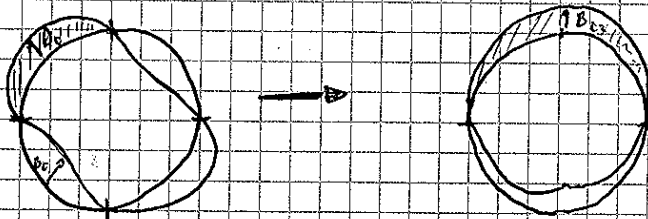
$$P_{ore} = C_m \omega_R = -j p p \omega_R \bar{I}_R \times \bar{I}_R \quad \text{da cui}$$

$$C_m = (-j p p \bar{I}_R) \times \bar{I}_R =$$

$$= [-j p p (\lambda_{\alpha\alpha} + \lambda_{\alpha\beta})] \times (i_{\alpha\alpha} + j i_{\alpha\beta}) = [p p (\lambda_{\alpha\beta} - j \lambda_{\alpha\alpha})] \times (i_{\alpha\alpha} + j i_{\alpha\beta})$$

$$= p p (\lambda_{\alpha\beta} i_{\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha} i_{\alpha\beta}) = C_m$$

Note: la coppia non è proporzionale al numero di poli.

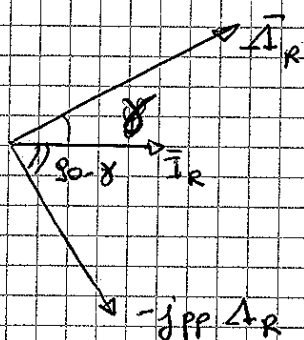


Il flusso del pp λ_e è riferito al flusso dei 2 poli equivalenti, però noi ragioniamo sulla singola coppia polare.

Al modello precedente si aggiunge l'equazione

$$\begin{cases} C_m = p p (\lambda_{\alpha\beta} i_{\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha} i_{\alpha\beta}) \\ C_m - C_r = J_{eq} p \omega_R \\ p \theta_{mecc} = \omega_R \end{cases}$$

Equazioni alternative di coppia



$$C_m = | -j p p \bar{I}_R | | \bar{I}_R | \cos(90 - \gamma) =$$

$$= p p | \bar{I}_R | | \bar{I}_R | \sin(\gamma) =$$

$$= p p | \bar{I}_R \wedge \bar{I}_R |$$

$$C_m = p p | (L_r \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s) \wedge \bar{I}_R | = p p | (0 + \bar{I}_s \wedge \bar{I}_R) | L_m = p p L_m | \bar{I}_s \wedge \bar{I}_R |$$

$$| \bar{I}_R \wedge \bar{I}_R | = \det \begin{vmatrix} i_{\alpha\alpha} & i_{\alpha\beta} \\ \lambda_{\alpha\alpha} & \lambda_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = \lambda_{\alpha\beta} i_{\alpha\alpha} - \lambda_{\alpha\alpha} i_{\alpha\beta}$$

Studio regime sinusoidale

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Delta}_s \\ \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R - j p p \omega_R \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_s = L_{os} \bar{I}_s + L_m \bar{I}_m \\ \bar{\Delta}_R = L_{or} \bar{I}_R + L_m \bar{I}_m \\ \bar{I}_m = \bar{I}_s + \bar{I}_R \end{cases}$$

A regime sinusoidale

$$\frac{d}{dt} = p = j\omega_e$$

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_e \bar{\Delta}_s \\ \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + j\omega_e \bar{\Delta}_R - j p p \omega_R \bar{\Delta}_R = 0 \\ \bar{\Delta}_s = L_{os} \bar{I}_s + L_m \bar{I}_m \\ \bar{\Delta}_R = L_{or} \bar{I}_R + L_m \bar{I}_m \\ \bar{I}_m = \bar{I}_s + \bar{I}_R \end{cases}$$

A regime i vettori spaziali

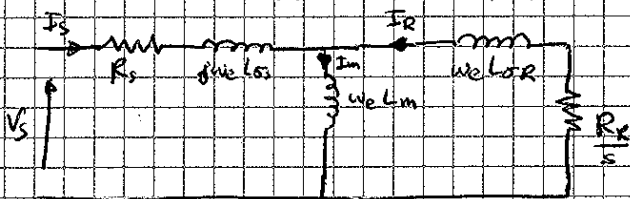
possono essere interpretati

come fasori a 50 Hz

(x eliminati è a 50 Hz)

$$\bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_e (L_{os} \bar{I}_s + L_m \bar{I}_m)$$

$$0 = \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + j(\omega_e - p p \omega_R) (L_{or} \bar{I}_R + L_m \bar{I}_m) = R_R \bar{I}_R + j(\omega_e - p p \omega_R) L_{or} \bar{I}_R + j(\omega_e - p p \omega_R) L_m \bar{I}_m$$



definiamo $s = \frac{\omega_e - p p \omega_R}{\omega_R} = \frac{\omega_s - \omega_R}{\omega_s} = \frac{n_s - n_2}{n_s}$

Da cui otteniamo che

$$\bar{V}_R = 0 = \frac{R_R}{s} \bar{I}_R + j s \omega_e L_{or} \bar{I}_R + j s \omega_e L_m \bar{I}_m$$

Questo è un modello dinamico partato a regime.

CIRCUITO EQUIVALENTE

- descrive una fase
- ~~V~~ $V_{s, \text{eff}}$ di fase
- $I_{s, \text{eff}}$ di fase
- P si calcolano con il 3
($P_{js} = 3 R_s I_s^2$)

MOD DINAMICO A REGIME

- descrive tutta la macchina
- $|V_s| = \sqrt{3} V_{\text{eff}}$ del circ. equiv.
- $|I_s| = \sqrt{3} I_{s, \text{eff}}$ del circ. equiv.
- Potenze si calcolano senza il 3
($P_{js} = R_s |I_s|^2$)

TRANSITORIO di BRUSCA APERTURA del motore con rotore

$$\begin{cases} \bar{N}_s = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Lambda}_s \\ \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Lambda}_R - j p \omega_e \bar{\Lambda}_R \\ \bar{\Lambda}_s = L_s \bar{I}_s + L_m \bar{I}_R \\ \bar{\Lambda}_R = L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s \\ C_m = p p L_m |\bar{I}_s \wedge \bar{I}_R| \end{cases}$$

Q ruota il motore esercita una corrente \bar{I}_s e a rotore $\bar{I}_R = 0$ e $C_m = 0$

Esistono $\bar{\Lambda}_s = L_s \bar{I}_s$ e $\bar{\Lambda}_R = L_m \bar{I}_s$.

Ora avviene il fenomeno di brusca apertura (cioè all'istante $t_0^-: I_s = I_{s0}$ e a $t_0^+: I_s = 0$).

L'interruzione brusca fa sì che $\bar{\Lambda}_s$ non è più variabile di stato. Sostituisco a I_s il valore 0. Notiamo subito che il motore non fornisce coppia prima né dopo. Si genera corrente di rotore per mantenere i flussi di rotore. Il motore si comporta come un sincro ed induce tensione a statore.

Le equazioni sono:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = p \bar{\Lambda}_s \\ \bar{V}_R = 0 = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Lambda}_R - j p \omega_e \bar{\Lambda}_R \\ \bar{\Lambda}_s = L_m \bar{I}_R \\ \bar{\Lambda}_R = L_R \bar{I}_R \end{cases}$$

$$\frac{R_R}{L_R} \bar{\Lambda}_R + p \frac{\bar{\Lambda}_R}{L_R} - j p \omega_e \bar{\Lambda}_R = 0$$

$$p \bar{\Lambda}_R + \left(\frac{R_R}{L_R} \bar{\Lambda}_R + j p \omega_e \bar{\Lambda}_R \right) = 0$$

$$\bar{\Lambda}_R = \bar{\Lambda}_{R0} e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

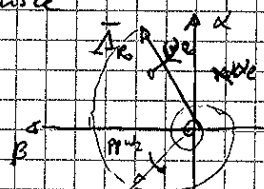
$$\tau_R = \frac{1}{\frac{R_R}{L_R} - j p \omega_e}$$

$$\bar{\Lambda}_R(t) = \bar{\Lambda}_{R0} e^{-\frac{t}{\tau_R}} e^{j p \omega_e t}$$

$$\tau_R = \frac{L_R}{R_R}$$

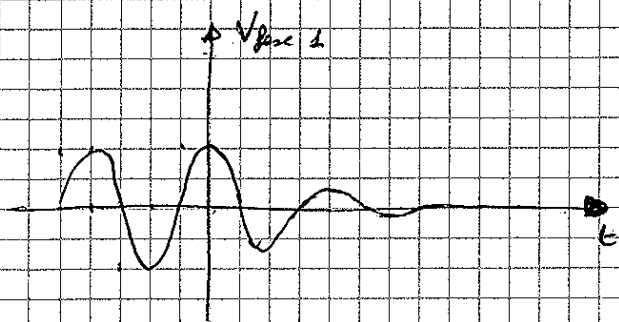
limit il modulus di intensità

rotazione di $\Delta \varphi$

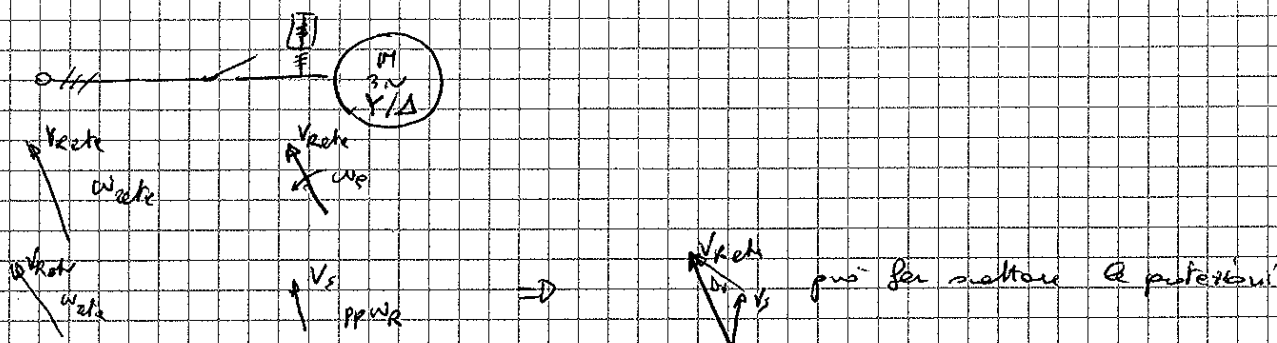


$p \omega_e = \omega_e$ perché sente entrambi

La tensione V_s si comporta come del grafico sotto.



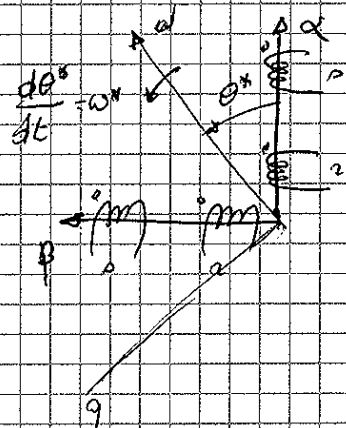
In applicazioni più onere chiedere spina d'interruttore e richiederlo velocemente. Questo avviene in caso di ambiente stella-triangolo.



Per evitare questo inconveniente si può mettere un banco di resistenze che riducono più rapido lo smantare di tensione.

Modello del motore asincrono riferito ad una coppia ferenca di assi ortogonali.

rotanti



Facciamo una rotazione antioraria del sistema α, β .

Daso moltiplicare per $e^{-j\theta^*}$

Sugli assi α, β

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \begin{aligned} \bar{V}_s &= R_s \bar{I}_s + p \bar{\Delta}_s \\ \bar{V}_R &= R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R - j\omega_r r_r \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_s &= L_s \dot{\bar{I}}_s + L_m \dot{\bar{I}}_R \\ \bar{\Delta}_R &= L_R \dot{\bar{I}}_R + L_m \dot{\bar{I}}_s \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\bar{V}_s^* = R_s \bar{I}_s^* + e^{-j\theta^*} p \bar{\Delta}_s^*$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-j\theta^*} p (e^{j\theta^*} \bar{\Delta}_s^*) = \\
 & = e^{-j\theta^*} \left(e^{j\theta^*} p \bar{\Delta}_s^* + e^{-j\theta^*} j \frac{d\theta^*}{dt} e^{j\theta^*} \bar{\Delta}_s^* \right) = \\
 & = p \bar{\Delta}_s^* + j\omega^* \bar{\Delta}_s^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_s^* = R_s \bar{I}_s^* + p \bar{\Delta}_s^* + j \omega^* \bar{\Delta}_s^* \\ \bar{V}_R^* = R_R \bar{I}_R^* + p \bar{\Delta}_R^* + j \omega^* \bar{\Delta}_R^* - j \omega_R p p \bar{\Delta}_R^* \\ \bar{\Delta}_s^* = L_s \bar{I}_s^* + L_m \bar{I}_R^* \\ \bar{\Delta}_R^* = L_R \bar{I}_R^* + L_m \bar{I}_s^* \end{cases}$$

$$C_m = -j p p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R = -j p p \bar{\Delta}_R^* \times \bar{I}_R^*$$

Motor asincrono alimentato in corrente

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Delta}_s \\ \bar{V}_R = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R + j p p \omega_R \bar{\Delta}_R & \leftarrow \text{modello dinamico del motore} \\ \bar{\Delta}_s = L_s \bar{I}_s + L_m \bar{I}_R & \leftarrow \text{espresso del 5° ordine} \\ \bar{\Delta}_R = L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s \\ C_m = -j p p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R \\ C_m - C_e = J \omega p \omega_R \end{cases}$$

Se il motore è alimentato in corrente dimentico la prima e la terza equazione. (\bar{V}_s e \bar{I}_s sono usate, non più impresse)
Questo modello è detto modello dinamico del motore asincrono del 3° ordine.

A regime il modello è così: $p \rightarrow j \omega_e$

$$\begin{cases} 0 = R_R \bar{I}_R + j \omega_e \bar{\Delta}_R - j \omega_R p p \bar{\Delta}_R \Rightarrow 0 = R_R \bar{I}_R + j (\omega_e - \omega_R p p) \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_R = L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s \end{cases}$$

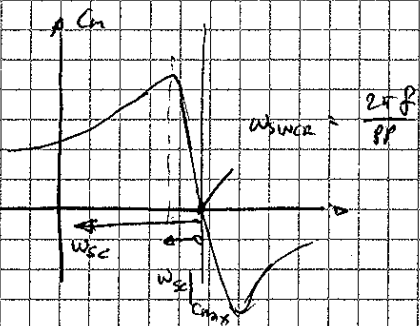
$$\begin{cases} 0 = R_R \bar{I}_R + j \omega_e s \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_R = L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s \end{cases} \Rightarrow -j \bar{\Delta}_R = \frac{R_R}{\omega_e s} \bar{I}_R$$

$$C_m = p p \frac{R_R}{\omega_e s} \bar{I}_R \times \bar{I}_R = p p \frac{R_R}{\omega_e s} |\bar{I}_R|^2$$

$$0 = R_R \bar{I}_R + j \omega_e s (L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_s) \Rightarrow -j \omega_e s \bar{I}_R = \frac{-j \omega_e s \bar{I}_s L_m}{R_R + j \omega_e s L_R}$$

$$|\bar{I}_R|^2 = \frac{\omega_e^2 s^2 L_m^2}{R_R^2 + \omega_e^2 s^2 L_R^2} |\bar{I}_s|^2$$

$$C_m = p p \frac{R_R}{\omega_e s} \frac{\omega_e^2 s^2 L_m^2}{R_R^2 + \omega_e^2 s^2 L_R^2} |\bar{I}_s|^2 = p p \frac{R_R \omega_e s L_m^2}{R_R^2 + \omega_e^2 s^2 L_R^2}$$



$\infty \omega_e = 0$

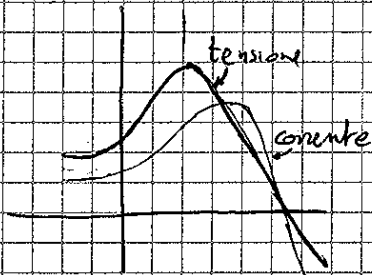
si può usare il motore come freno!!!

$$\frac{\partial C_m}{\partial \omega_{sc}} = 0 \rightarrow \omega_{sc} = \frac{R_R}{L_R}$$

$$C_{max} \propto \frac{1}{L_R}$$

$$|V_s| = \omega \left\{ \begin{array}{l} \omega_{sc} |C_{max}| \propto \frac{R_R}{L_{\sigma R} + L_{\sigma S}} \\ C_{max} \propto \frac{1}{L_{\sigma R} + L_{\sigma S}} \end{array} \right.$$

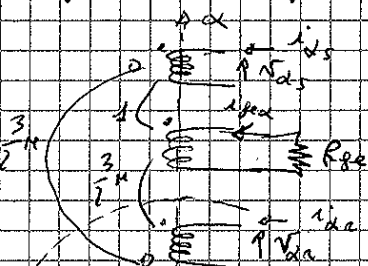
Le ω_{sc} per la tensione è maggiore, idem per C_{max}



Modello con perdite nel ferro

1) Consideriamo le perdite nel ferro solo e statore

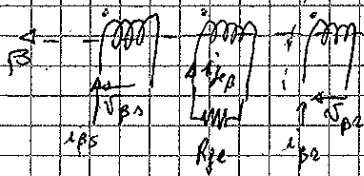
2) Perdite nel ferro solo per correnti parassite $P_{fe} \approx \frac{F_{em}^2}{R_{\sigma fe}}$



Aggiungo degli avvolgimenti fittizi collegati alle resistenze $R_{\sigma fe}$

$$\Delta_{fe} = \Delta_s$$

$$I_{fe} = i_{fe} + j i_{re}$$



3) L'accoppiamento tra gli avvolgimenti reali di statore e quelli fittizi delle $R_{\sigma fe}$ è ideale

Il numero di spire degli avvolgimenti fittizi sarà $N = N_s = N_R = N_{fe}$

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + p \bar{\Delta}_s \\ 0 = R_{fe} \bar{I}_{fe} + p \bar{\Delta}_s \Rightarrow \bar{I}_{fe} = - \frac{p \bar{\Delta}_s}{R_{fe}} \\ 0 = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R - j p \omega L_R \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_s = L_s (\bar{I}_s + \bar{I}_{fe}) + L_m \bar{I}_R = L_{\sigma S} \underbrace{(\bar{I}_s + \bar{I}_{fe})}_{\bar{I}_{\sigma S}} + L_m (\bar{I}_s + \bar{I}_{fe} + \bar{I}_R) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_R = L_R \bar{I}_R + L_m (\bar{I}_S + \bar{I}_{Fe}) = L_{\sigma R} (\bar{I}_R) + L_m (\bar{I}_R + \bar{I}_S + \bar{I}_{Fe}) \\ (\Delta_{Fe} = \Delta_S) \end{cases} \quad \bar{I}_m$$

Nota: Le correnti parassite concorrono alla distribuzione dei flussi.

Riscriviamo il modello per poterlo risolvere in SIMULINK

$$\begin{cases} \bar{V}_S = R_S (\bar{I}_{SF} - \bar{I}_{Fe}) + p \bar{\Delta}_S = R_S \bar{I}_{SF} + p \bar{\Delta}_S \left(1 + \frac{R_S}{R_{Fe}}\right) \\ 0 = R_R \bar{I}_R + p \bar{\Delta}_R - j p p \omega_R \bar{\Delta}_R \\ \bar{\Delta}_S = L_S \bar{I}_{SF} + L_m \bar{I}_R \\ \bar{\Delta}_R = L_R \bar{I}_R + L_m \bar{I}_{SF} \\ \bar{I}_{Fe} = - \frac{p \bar{\Delta}_S}{R_{Fe}} \\ \bar{I}_S = \bar{I}_{SF} - \bar{I}_{Fe} \end{cases}$$

Lo schema di risoluzione risulta:

ingressi: \bar{V}_S, ω_R

parametri noti:

$t=0$

Δ_S, Δ_R

↓ eq. mag.

I_{SF}, I_R

↓ eq. elt.

$p \Delta_S, p \Delta_R \rightarrow I_{Fe}, I_S$

↑ stati

In questo modello manca ancora l'equazione di coppia:

$$P_{ee} = \bar{V}_S \times \bar{I}_S + \bar{V}_R \times \bar{I}_R = \overbrace{R_S \bar{I}_S \times \bar{I}_S}^{P_{js}} + p \bar{\Delta}_S \times \bar{I}_S + \underbrace{R_{Fe} \bar{I}_R \times \bar{I}_R}_{P_{je}} + p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R + \underbrace{-j p p \omega_R \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R}_{P_{mecc}}$$

$$P_{ee} = P_{js} + P_{je} + P_{magnet.} + P_{Fe} + P_{meccanica}$$

Sostituiamo $I_S = I_{SF} - I_{Fe}$

$$I_{Fe} = - \frac{p \Delta_S}{R_{Fe}}$$

$$P_{magn} + P_{Fe} = p \bar{\Delta}_S \times \bar{I}_{SF} + p \bar{\Delta}_S \times \bar{I}_{Fe} + p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R = \underbrace{p \bar{\Delta}_S \times \bar{I}_{SF} + p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R}_{P_{mag}} + p \bar{\Delta}_S \times \frac{p \bar{\Delta}_S}{R_{Fe}}$$

$$P_{magn} = \frac{d W_{mag}}{dt} = p \left[\frac{1}{2} \cos(\theta_S + \theta_R) \left(\bar{I}_S + \bar{I}_R \right)^2 + L_m \frac{1}{2} \left| \bar{I}_R \right|^2 + \frac{1}{2} L_m \left| \bar{I}_S + \bar{I}_R + \bar{I}_{Fe} \right|^2 \right] \quad \frac{|p \bar{\Delta}_S|^2}{R_{Fe}} = \frac{F_{em,Fe}^2}{R_{Fe}} = P_{Fe}$$

$$C_m = -j p p \bar{\Delta}_R \times \bar{I}_R = \dots$$

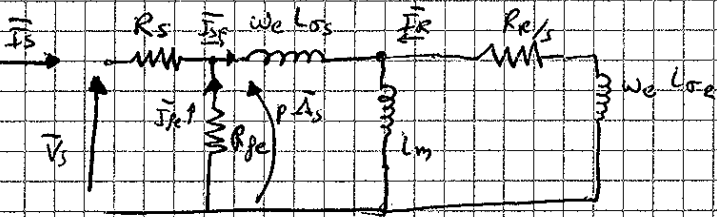
In regime sinusoidale $p \rightarrow j\omega e$

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega e \bar{I}_s \\ 0 = R_r \bar{I}_r + j(\omega e - p p \omega e) \bar{I}_r \\ \bar{I}_s = L_{os} (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe}) + L_m (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_r) \\ \bar{I}_r = L_{or} (\bar{I}_r) + L_m (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_r) \end{cases}$$

⇓

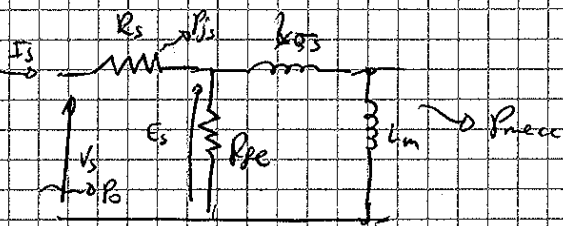
$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega e [L_{os} (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe}) + L_m (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_r)] \\ 0 = R_r \bar{I}_r + j(\omega e - \omega e p p) [L_{or} (\bar{I}_r) + L_m (\bar{I}_s + \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_r)] \end{cases}$$

$$p = \frac{\omega e - p p \omega e}{\omega e}$$



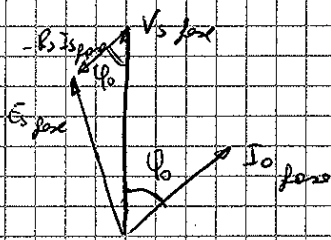
Le perdite del ferro vengono a dipendere anche dai flussi dispersi

Determinazione di R_{Fe} delle prove a vuoto



$$P_{Fe} = P_0 - 3R_s I_0^2 - P_{mecc}$$

Diagramma fasoriale



$$E_{s\text{ fas}} = \sqrt{(V_{s\text{ fas}} - R_s I_0 \cos \phi_0)^2 + (R_s I_0 \sin \phi_0)^2}$$

$$P_{Fe} = \frac{E_{s\text{ fas}}^2}{R_{Fe}}$$