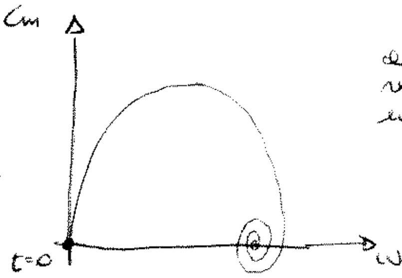
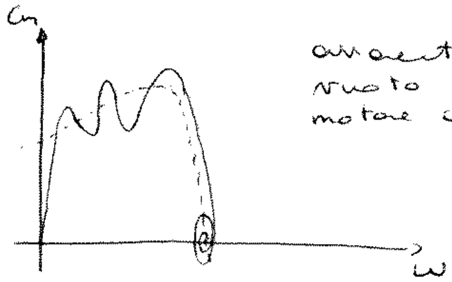
DINAMICA delle MACCHINE ELETTRICHE

In macchine elettriche si vede il comportamento a regime delle macchine. Noi analizzeremo il funzionamento in transitorio.



avviamento a vuoto di un motore DC



avviamento a vuoto di un motore sincrono.

Noi ci occuperemo solo delle macchine rotanti.

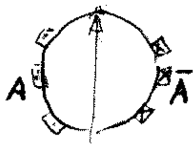
MODELLO DINAMICO di una MACCHINA ELT GENERALIZZATA

macchina elettrica è ferro e rame (avvolgimenti e circuito magnetico) che si accoppiano magneticamente

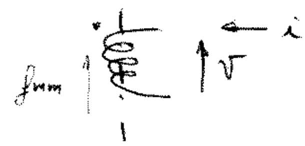
Un compito di un avvolgimento è generare una forza magneto motrice nei traferri. Il secondo compito dell'avvolgimento è concatenare opportunamente il flusso.

Il circuito magnetico guida il flusso come vogliamo e fornisce il grado di accoppiamento tra gli avvolgimenti.

AVVOLGIMENTI: possono essere — concentrati (trafo) o eccitat. del sincron.
— distribuiti

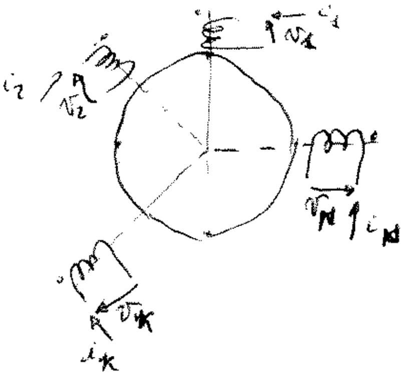


Ogni avvolgimento ha un asse magnetico e viene sempre rappresentato così:



Negli avvolgimenti useremo sempre la convenzione di segno degli utilizzatori. Una convenzione ulteriore è quella della forza magneto motrice (fmm) come si vede in figura.

Consideriamo una macchina elettrica rotante. Ci interessano gli assi magnetici degli avvolgimenti della macchina.



La numerazione degli avvolgimenti è antioraria. Gli eventi temporali che si inducono negli avvolgimenti saranno sfasati in modo che 1 anticipa su 2, 2 su 3 e così via.

Per ogni avvolgimento bisogna scrivere un'equazione elettrica ed una magnet

Sistema di equazioni elettriche:

$$v_K(t) = R_K i_K + \frac{d\lambda_K(t)}{dt} \qquad K = 1, \dots, n$$

$\frac{d}{dt} \rightarrow p$

Le equazioni elettriche non sono un grosso problema.

$$v_K = R_K i_K + p\lambda_K$$

SISTEMA di equazioni magnetiche

$$\lambda_K = \lambda_K(i_j) = M_{K1} i_1 + M_{K2} i_2 + \dots + M_{KK} i_K + \dots + M_{Kn} i_n$$

Se c'è saturazione M dipende dalla corrente. Inoltre M dipende dagli angoli.

È meglio usare una notazione matriciale.

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \qquad I = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{vmatrix} \qquad \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$V = RI + p\Lambda \qquad R = \begin{bmatrix} R_1 & & 0 \\ & R_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & R_n \end{bmatrix} = R^T$$

$$\Lambda = L(\theta) I = L_\sigma I + M_p(\theta) I$$

dove $L_\sigma = \begin{bmatrix} L_{\sigma 1} & & 0 \\ & L_{\sigma 2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & L_{\sigma n} \end{bmatrix}$ e $M_p(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ M_{n1} & & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}$

$L_\sigma I$ fornisce il vettore dei flussi dispersi (si suppone che la dispersione sia causata solo dalla corrente che circola nell'avvolgimento).

Note: $R = R^T$, $L(\theta) = L(\theta)^T$, ma anche $L_\sigma = L_\sigma^T$ e $M(\theta) = M(\theta)^T$

~~Equazioni~~: Sistemi di equazioni:

$$V = RI + p\Lambda \qquad \text{elettrico}$$

$$\Lambda = L(\theta)\,I = L_\sigma I + M(\theta) I \qquad \text{magnetico}$$

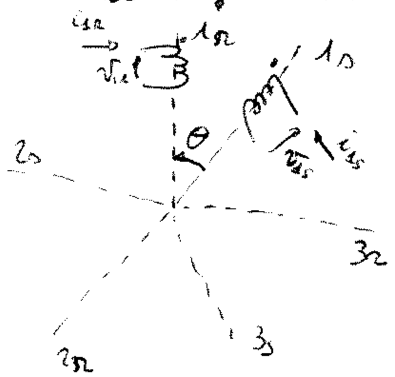
Per risolvere il sistema dobbiamo individuare le variabili di stato. Le nostre variabili di stato sono i flussi (forniscono dei vantaggi in caso di non linearità)

Bisogna conoscere $\Lambda(0)$ cioè i flussi a $t=0$.
Devo conoscere anche le forzanti del sistema (cioè gli impressi):
V e $\theta(t)$

$$I = L^{-1}(\theta)\cdot\Lambda \qquad\qquad p\Lambda = +V - RI$$

Noti $\Lambda(0)$ e $p\Lambda$ si fa un integrazione numerica e otteniamo il valore di Λ in $0+\Delta t$ e poi ripetiamo il ciclo.

Di solito si ordinano prima gli avvolgimenti di statore e poi quelli di rotore. In questo modo si utilizza 1 solo angolo

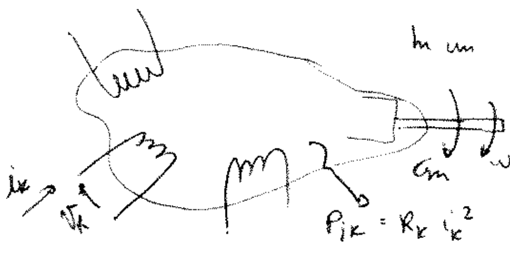


$$\begin{vmatrix} V_S \\ V_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_S \\ I_R \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \Lambda_S \\ \Lambda_R \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Lambda_S \\ \Lambda_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{SS} & L_{SR} \\ L_{RS} & L_{RR} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_S \\ I_R \end{vmatrix}$$

Sicuramente L_{RS} e L_{SR} dipendono dall'angolo θ. Le induttanze di statore possono dipendere da θ quando il rotore è anisotropo. Allo stesso modo le induttanze di rotore dipendono da θ se lo statore è anisotropo.

Per studiare il transitorio elettromeccanico dobbiamo conoscere <u>l'equazione di coppia</u>.
Supponiamo di trovarci in linearità magnetica.



In un certo dt si ha che $dE_E - dE_M = dE_T + dE_W$

energia elettrica — energia meccanica — energia termica (perdite) — energia magnetica

$dE_E = I^T V\, dt$

$dE_M = C_m\, d\theta$

$dE_W = \frac{1}{2} d(I^T L I)$ ← valido solo in condizioni di linearità magnetica

$dE_t = I^T R I\, dt$

Risolviamo l'equazione sostituendo i valori ottenuti

$$\cancel{I^T R I\, dt} + I^T p \Lambda\, dt - C_m d\theta = \cancel{I^T R I\, dt} + \frac{1}{2} d(I^T L I)$$

$$+ C_m \frac{d\theta}{dt} = I^T \frac{d(LI)}{dt} \cancel{dt} - \frac{1}{2} \frac{d(I^T L I)}{dt}$$

$$C_m \omega_R = I^T \frac{d(LI)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d I^T}{dt}(LI) - \frac{1}{2} I^T \frac{d(LI)}{dt}$$

$$C_m \omega_R = \frac{1}{2} I^T \frac{dL}{dt} I + \underbrace{\frac{1}{2} L \frac{dI}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dI^T}{dt}(LI)}_{=0}$$

$$C_m \omega_R = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega_R} \cdot I$$

$$\boxed{C_m = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} I}$$ Valido solo in linearità magnetica

Se $L(\theta) = \left|\begin{array}{c|c} L_{ss} & L_{sR} \\ \hline L_{Rs} & L_{RR} \end{array}\right| = L^T(\theta)$ e $I = \left|\begin{array}{c} I_s \\ \hline I_R \end{array}\right|$ allora si ha che

L_{ss} e L_{RR} sono matrici simmetriche e $L_{sR}^T = L_{Rs}$

$$C_m = \underset{①}{\frac{1}{2} I_{ss}^T \frac{\partial L_{ss}}{\partial \theta} I_{ss}} + \underset{②}{\frac{1}{2} I_s^T \frac{\partial L_{sR}}{\partial \theta} I_R} + \underset{③}{\frac{1}{2} I_R^T \frac{\partial L_{Rs}}{\partial \theta} I_s} + \underset{④}{\frac{1}{2} I_R^T \frac{\partial L_{RR}}{\partial \theta} I_R}$$

Ci può essere coppia motrice se si ha corrente a statore e se si ha variazione della mutua induttanza.

① e ④ sono validi per le macchine anisotrope in cui posto un solo avvolgimento o a rotore o a statore

② e ③ sono validi per le macchine isotrope in cui si hanno avvolgimenti sia a rotore che a statore.

Quindi le equazioni risultano essere:

$$\begin{cases} V = RI + p\Lambda \\ \Lambda = L(\theta) I = L_{r} I + M_p(\theta) I \\ C_m = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} I \\ C_m - C_r = J_{eq} \frac{d\omega_r}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_r \end{cases}$$

i parametri sono:
$R,\ L(\theta),\ J_{eq}$

gli ingressi sono:
$V,\ C_r$

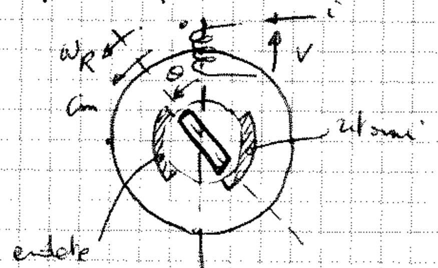
variabili di stato (cond. iniziali)
$\Lambda(0),\ \omega_r(0),\ \theta(0)$

Se abbiamo tutto noto:

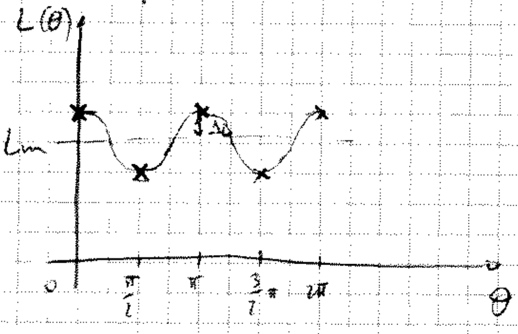
$$\begin{cases} I = L^{-1}(\theta)\Lambda \\ C_m = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} I \\ p\Lambda = V - RI \\ p\omega_R = \frac{C_m - C_r}{J_{eq}} \\ p\theta = \omega_R \end{cases} \xrightarrow{\int \text{numerico}} \text{trovo valori delle variabili in } t = 0 + dt$$

$I = L^{-1}(\theta)\Lambda$ non è facile invertire $L(\theta)$ anche numericamente.

Esempio: piccole macchine monofase ~~ad induttanza~~ a riluttanza con ipotesi di linearità magnetica



$$v = Ri + p\lambda$$
$$\lambda = L(\theta) \cdot i$$

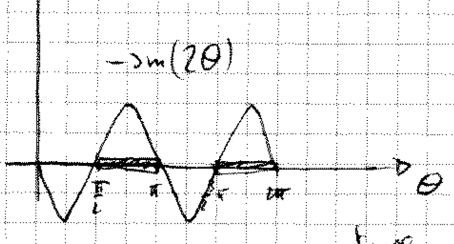


$$L(\theta) = L_m + \Delta L \cos(2\theta)$$

$$C_m = \frac{1}{2} i \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} i = \frac{1}{2} i^2 (-2\Delta L \sin 2\theta)$$

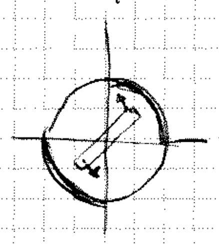
Modello dinamico della macchina:

$$\begin{cases} v = Ri + p\lambda \\ \lambda = (L_m + \Delta L \cos(2\theta))\, i \\ C_m = -\Delta L\, i^2 \sin(2\theta) \\ C_m - C_r = J_{eq} \frac{d\omega_R}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_R \end{cases}$$

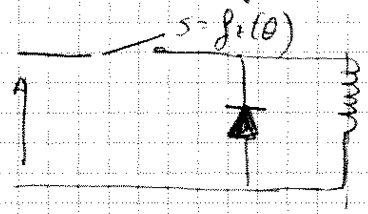


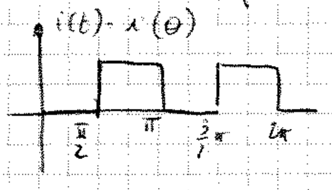
per avere coppia positiva bisogna avere corrente tra $\theta = \frac{\pi}{2}$ e π e tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π.

Cioè quando



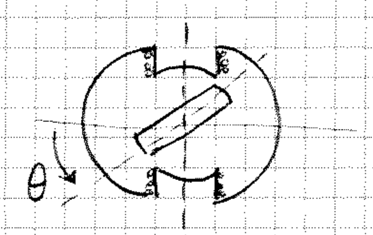
La struttura più semplice per alimentare queste macchine è un chopper.





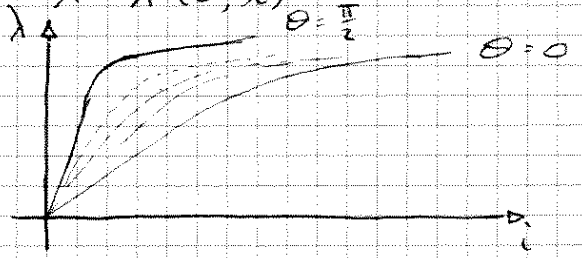
Espressione della coppia in caso di saturazione

Esempio: statore anisotropo e rotore anisotropo

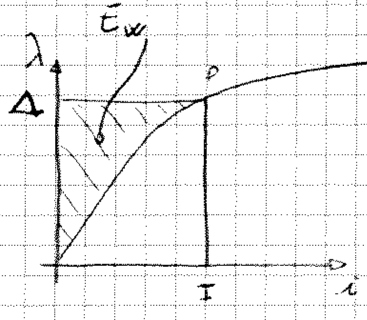


$V = Ri + p\lambda$, ma $\lambda = L(\theta)\, i$ non è più accettabile (perché c'è saturazione).

$\lambda = \lambda(\theta, i)$



Dobbiamo poter esprimere l'energia che immagazziniamo nel circuito magnetico. Supponiamo di alimentare con una tensione V (continua) la bobina. In questo caso $I = \frac{V}{R}$. Teniamo il rotore fermo nella posizione θ^*, il bilancio energetico ci dice:



$$\Delta E_E - \underbrace{\cancel{\Delta E_M}}_{=0 \text{ perché } \theta^* = \text{cost.}} = \Delta E_T + \Delta E_W$$

$$V i \Delta t = R i^2 \Delta t + \Delta E_W$$

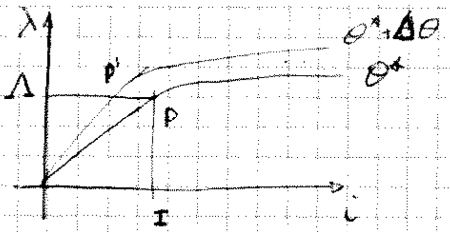
$$\cancel{R i^2 \Delta t} + \Delta\lambda\, i = \cancel{R i^2 \Delta t} + \Delta E_W$$

$$\Delta E_W = \Delta\lambda\, i \Rightarrow E_W = \int_0^{\Lambda} i\, d\lambda$$

$$= \int_0^{\Lambda} i(\lambda, \theta)\, d\lambda$$

Per trovare la coppia ~~appl~~ usiamo il principio dei lavori virtuali

1) Λ = costante, $\theta = \theta^* + \Delta\theta$



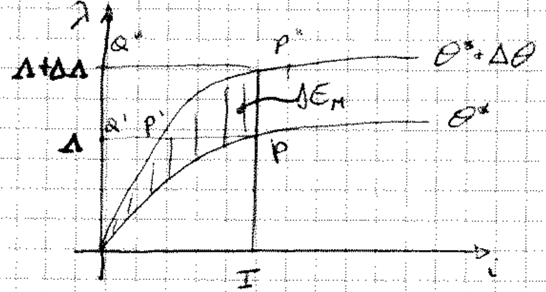
$$\Delta E_E - \Delta E_M = \Delta E_T + \Delta E_W$$

$$R i^2 \Delta t + \underbrace{\Delta\Lambda}_{=0}\, i - \Delta E_M = R i^2 \Delta t + \Delta E_W$$

<0 perde e campo magnetico si è impoverito

$$C_m \Delta\theta = -\Delta E_W \Rightarrow C_m = -\left.\frac{\partial E_W(\lambda,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\Lambda=\text{cost}}$$

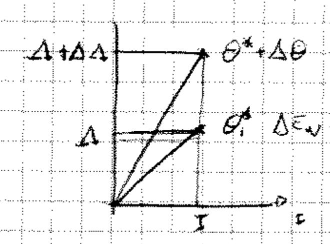
2) $\theta = \theta^* + \Delta\theta \qquad I = \text{cost.}$



$$\Delta E_E - \Delta E_M = \Delta E_T + \Delta E_W$$

$$\underbrace{\frac{\Delta\Lambda}{\Delta t} I}_{>0}\,\Delta t - \Delta E_M = \Delta E_W$$

C'è variazione di energia magnetica ed è positiva (vediamolo nel caso lineare)



$$\Delta E_W = \frac{(\Lambda+\Delta\Lambda)I}{2} - \frac{\Lambda I}{2} = \frac{1}{2}\Delta\Lambda I$$ nel caso lineare invece energia meccanica

Nel nostro caso nella situazione iniziale l'energia magnetica è l'area OPQ', durante la trasformazione mettiamo $\Delta\Lambda I$ cioè l'area Q'PP''Q''. Alla fine si ha ~~...~~ la somma delle aree OP'Q'' e OPP'': la prima area è $E_W(P'')$ mentre la seconda è l'energia meccanica.

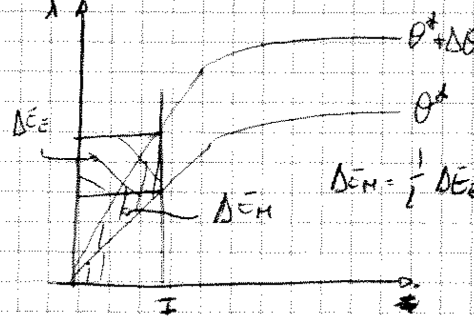
Definiamo la coenergia $E'_W = \int_0^I \lambda(i,\theta)\,di$ in questo modo

$$\Delta E_M = C_m \Delta\theta = \Delta E'_W \Rightarrow C_m = \left.\frac{\partial E'_W(i,\theta)}{\partial\theta}\right|_{I=\text{cost}}$$

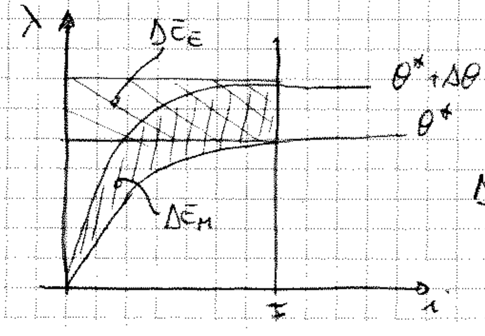
Il triangolino P'PP'' è un infinitesimo di ordine superiore (ma non è ~~n~~ esatto). Quindi si può trascurare e perciò:

$$C_m = -\left.\frac{\partial E_W}{\partial\theta}\right|_{\lambda=\text{cost}} = +\left.\frac{\partial E'_W}{\partial\theta}\right|_{I=\text{cost}}$$

Consideriamo l'esperimento 2



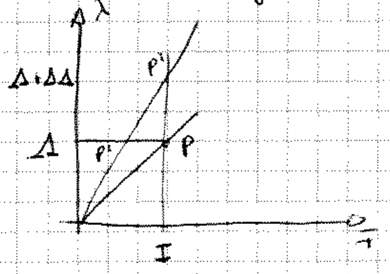
$$\Delta E_M = \frac{1}{2}\Delta E_E$$



$$\Delta E_M > \frac{1}{2}\Delta E_E$$

Uguaglianza delle due espressioni ~~dell AEM~~ di C_m nel caso lineare

Abbiamo già visto che $C_m = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta}$



$$\lambda = L(\theta)\, i$$

$$C_m = - \left.\frac{\partial E_W(\lambda,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda = cost}$$

$$E_W = \int_0^{\Lambda} i(\lambda,\theta)\, d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(\theta)}$$

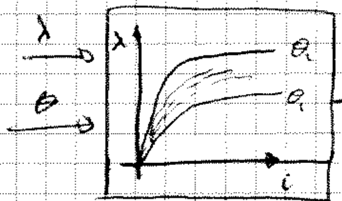
$$C_m = - \left.\frac{\partial E_W(\lambda,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda = cost} = -\frac{1}{2} \lambda^2 \left(-\frac{1}{L^2(\theta)} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta}$$

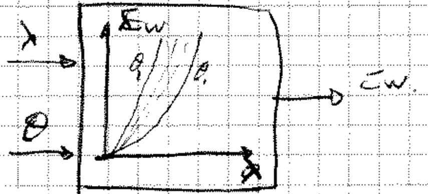
$$E_W' = \int_0^{I} \lambda(\lambda,\theta)\, di = \frac{1}{2} L(\theta) I^2$$

$$C_m = \left.\frac{\partial E_W'(i,\theta)}{\partial \theta}\right|_{i = cost} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad \blacksquare$$

Metodi di risoluzione

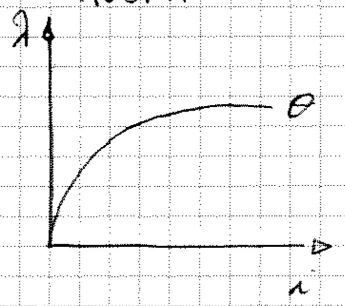
1) Tabelle a due ingressi ed un'uscita. Entro con λ e con θ ed esco con i. Inoltre entro con λ e θ ed esco con E_W.

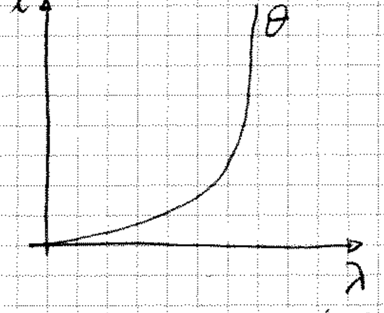




Si hanno problemi con i calcoli delle derivate di E_W. Inoltre servono interpolatori piuttosto complessi.

2) POLINOMI





C'è conveniente ad avere come variabile di stato il flusso.
L'approx polinomiale va bene per saturazioni non troppo spinte

$$i(\lambda,\theta) = a_1(\theta)\lambda + a_5(\theta)\lambda^5 + a_7(\theta)\lambda^7$$

	a_1	a_5	a_7	a_1
$\theta_0 = 0$				
θ_{max}				

Con queste formula posso facilmente calcolare l'energia E_W

$$E_W = \int_0^{\Lambda} I(\Lambda, \theta)\, d\Lambda = a_1(\theta)\frac{\lambda^2}{2} + a_5(\theta)\frac{\lambda^6}{6} + a_7(\theta)\frac{\lambda^8}{8}$$

$$C_m = -\left.\frac{\partial E_W(\lambda,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\lambda = cost} = -\frac{\partial a_1(\theta)}{\partial\theta}\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\partial a_5(\theta)}{\partial\theta}\frac{\lambda^6}{6} - \frac{\partial a_7(\theta)}{\partial\theta}\frac{\lambda^8}{8}$$

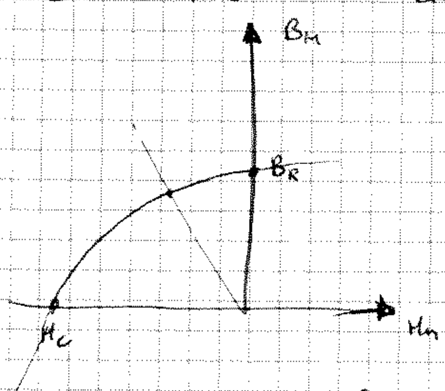
Per trovare C_m ho bisogno di una seconda tabella.

	$\frac{\partial a_1}{\partial\theta}$	$\frac{\partial a_5}{\partial\theta}$	$\frac{\partial a_7}{\partial\theta}$
θ_0			
θ_1			
$\vdots$			
θ_{max}			

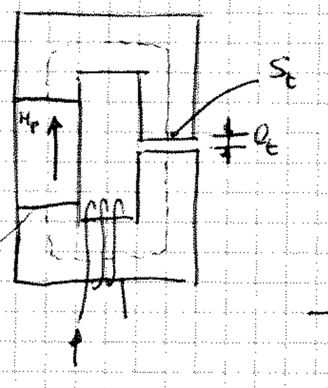
MODELLISTICA dei MAGNETI PERMANENTI

I magneti permanenti sono molto **delicati**.

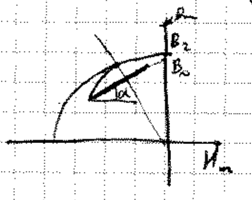
Come trattiamo i magneti permanenti? Li prendiamo, li buttiamo via e li sostituiamo con un avvolgimento alimentato in corrente continua.



Analizziamo un elettromagnete eccitato con un M.P.



In generale il magnete viene stabilizzato in corrente. In modo da creare una caratteristica che è quasi una retta con pendenza $\mu_1 = tg\,\alpha$.



Quindi $B_m = \mu_1 H_m + B_0$

Supponiamo di avere stabilizzato il magnete e vediamo cosa accade al traferro.

$$B_m S_m = B_t S_t \Rightarrow \mu_1 H_m S_m + B_0 S_m = B_t S_t = \mu_0 H_t S_t$$

$$H_m = \frac{\mu_0 H_t S_t - B_0 S_m}{\mu_1 S_m} = \frac{\mu_0}{\mu_1}\frac{S_{t2}}{S_m} H_t - \frac{B_0}{\mu_1}$$

Sostituisco nella circuitazione magnetica

$$0 = H_m l_m + H_{t_2} l_{t_2} + \underbrace{H_{Fe} l_{Fe}}_{\text{trascurabile}}$$

$$0 = \left(\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{S_t}{S_m} H_t - \frac{B_0}{\mu_1} \right) l_m + \frac{H_t}{1} l_t$$

$$H_t = \frac{\frac{B_0}{\mu_1} l_m \cdot \frac{\mu_0}{\mu_0}}{\frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{S_t}{S_m} l_m + l_t} = \qquad \text{definiamo } l_m' = \frac{l_m \mu_0}{\mu_1}$$

$$= \frac{\frac{B_0 l_m'}{\mu_0}}{\frac{S_t}{S_m} l_m' + l_t} \qquad (*)$$

Adesso devo annullare il magnete e inserire una bobina. Annullare il magnete permanente significa eliminare B_0, ma non si cambia la permeabilità magnetica.

$$B_m S_m = B_{t_2} S_{t_2}$$

$$H_m = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{S_{t_2}}{S_m} H_{t_2}$$

Sostituendo nella circuitazione

$$NI = H_m l_m + H_{t_2} l_{t_2} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{S_{t_2}}{S_m} H_{t_2} l_m + H_{t_2} l_{t_2}$$

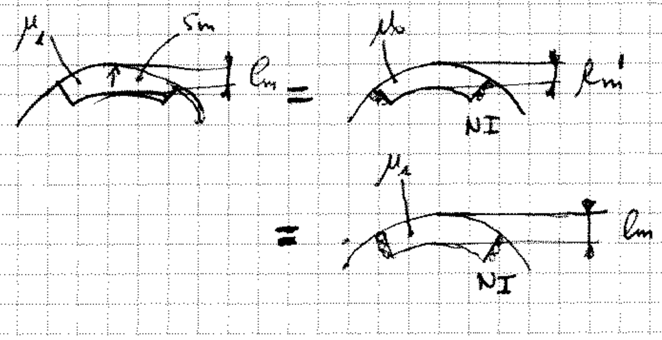
$$\Downarrow$$

$$H_{t_2} = \frac{NI}{\frac{\mu_0}{\mu_1} l_m \frac{S_{t_2}}{S_m} + l_{t_2}} = \frac{NI}{l_m' \frac{S_{t_2}}{S_m} + l_{t_2}} \qquad (**)$$

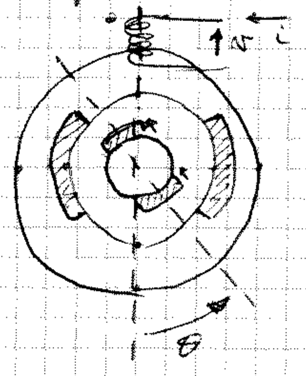
Le equazioni (*) e (**) sono uguali per

$$NI = \frac{B_0 l_m'}{\mu_0}$$

Anche se l'equivalente è stato ricavato a regime è valido anche in transitorio. Noi modellizziamo solo l'equivalente magnetico al traferro (non le perdite!!)



Esempio: macchina monofase a magneti permanenti.



Ipotesi: - assenza di saturazione magnetica
- macchina isotropa (traferro costante)

Solitamente le macchine a magneti permanenti con soluzioni effettuate possono essere considerate isotrope.

$v_s = R_s i_s + p \lambda_s$

v_{Mp} = non interessa

$\lambda_s = L_s i_s + \underbrace{M \cos\theta \, I_{mp}}$

quota concatenata dovuta al flusso di rotore.

$\lambda_{mp} = M \cos\theta \, i_s + L_{mp} I_{mp}$

$$C_m = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} I = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i_s & I_{mp} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{vmatrix} L_s & M \cos\theta \\ M \cos\theta & L_{mp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_s \\ I_{mp} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i_s & I_{mp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -M \sin\theta \\ -M \sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_s \\ I_{mp} \end{vmatrix} = - M \sin\theta \, i_s I_{mp}$$

$\Lambda_{MP} = M I_{mp}$ è la quota di flusso concatenato a statore quando $\theta = 0$

Il modello risulta essere.

$$\begin{cases} v_s = R i_s + p \lambda_s \\ \lambda_s = L_s i_s + \Lambda_{MP} \cos\theta \\ C_m = -\Lambda_{MP} \sin\theta \, i_s \end{cases}$$

Per avere il max effetto di coppia positiva la alimentazione deve essere asservita alla posizione.