$$\frac{c_{Cu} K_1 K_4}{\lambda S_{Fe}} = \frac{c_{Fe} K_2 \sqrt{K_4}}{\lambda} \Rightarrow S_{Fe} = \frac{c_{Cu} K_1 \sqrt{K_4}}{c_{Fe} K_2 \sqrt{K_4}} = \frac{c_{Cu}}{c_{Fe}} \cdot \frac{K_1}{K_2} \sqrt{K_4}$$

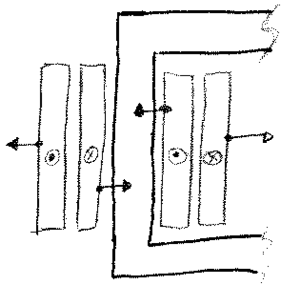
Inoltre
$$S_g = \frac{K_4}{S_{Fe}} = \frac{c_{Fe} K_2 \sqrt{K_4}}{c_{Cu} K_1}$$

Ne segue che
$$\frac{S_{Fe}}{S_g} = \frac{c_{Cu} K_1 \cancel{\sqrt{K_4}}}{c_{Fe} K_2} \cdot \frac{c_{Cu} K_1}{c_{Fe} K_2 \cancel{\sqrt{K_4}}} = \frac{c_{Cu}^2 K_1^2}{c_{Fe}^2 K_2^2}$$

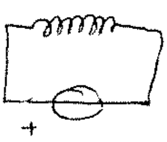
K_1 e K_2 sono le proporzioni tra le dimensioni del trasformatore. Ne segue che per fare il costo minimo devo scegliere il trafo che ha rapporto S_{Fe}/S_g proporzionale al quadrato dei **costi**.

Forze meccaniche tra avvolgimenti di un trasformatore

Le forze meccaniche sono un effetto dell'induttanza di dispersione del trasformatore. La forza magnetomotrice sul nucleo di Fe è circa zero. Ne segue che la corrente che ~~attra~~ percorre un avvolgimento è di segno opposto rispetto all'altro. Due conduttori percorsi da correnti non equiverse tendono a respingersi.



L'energia in ingresso ad un induttanza è $e\,i\,dt$.
L'energia deve diventare lavoro meccanico più energia immagazzinata nel campo magnetico.

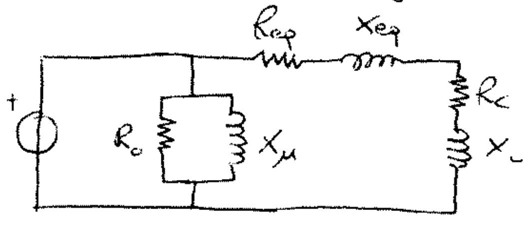


$W_{magn} = \frac{1}{2} L I^2$ (I funzione del tempo) quindi

W_{magn} è funzione di i e L.

$$\frac{dW_{magn}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x} dx\right) i^2 + \frac{1}{2} L \cdot 2 i \frac{di}{dt}$$

per far variare L è necessario che varino le dimensioni del solenoide.
Nel caso del trasformatore i parametri del ferro possono anche trascurati. Parte dell'energia che viene fornita al trafo va al carico. A noi interessa l'energia che viene ~~assorb~~ persa dal trasformatore. L'unico parametro che è connesso da forze meccaniche



è Xeq. Valutiamo la tensione ai capi e la corrente che attraversa Xeq. Ai capi dell'induttanza ho energia magnetica più lavoro meccanico.

$$e\, i\, dt = L_{mecc} + \Delta W_{magn} \qquad \text{cioè}$$

$$e\, i\, dt = F_x \cdot dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)dx\; i^2 + \frac{1}{2}\, 2\, L\, i \frac{\partial i}{\partial t}$$

La corrente è sinusoidale con f imposta. La variazione di i nel tempo dipende dalla frequenza a cui lavora il trasformatore. Studiamo i fenomeni per un intervallo di tempo tale che i possa ritenersi costante. (trascuriamo $L\, i \frac{\partial i}{\partial t}$). Quindi

$$e\, i\, dt = d\lambda\, i = (dL\, i + \underbrace{L\, di}_{i \simeq \text{costante}})\, i = dL\, i^2 = i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx$$

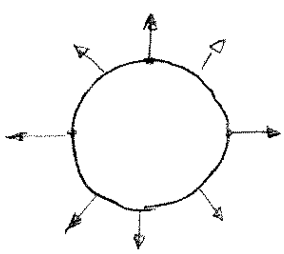
$$i^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) dx = F_x\, dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) dx\; i^2$$

$$F_x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) dx\; i^2 \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}$$

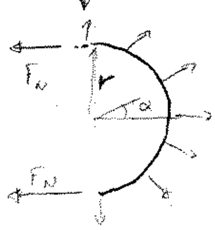
Ipotesi: supponiamo che lo spessore degli avvolgimenti resti costante, cioè che vari solo la distanza tra gli avvolgimenti.

$$L = \mu_0 N^2 \pi \frac{D_m}{h}\left(\frac{b_1 + b_2}{3} + d\right)$$ La variazione ∂x è la variazione ∂d

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial d} = \mu_0 N^2 \pi \frac{D_m}{h}$$



F_x è una forza complessiva che tende a dilatare l'avvolgimento esterno del trasformatore



Consideriamo una sezione della spira per equilibrare le forze superf. sono necessarie due forze che tengono in equilibrio il sistema

$$2F_N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\, f_x \cos\alpha\, d\alpha$$

f_x è forza di dilatazione per unità di lunghezza del conduttore

$$f_x = \frac{F_x}{2\pi r}$$

$$\cancel{2}F_N = \frac{F_x}{2\pi}\cdot \mathcal{Z} \Rightarrow F_N = \frac{F_x}{2\pi} = \frac{1}{2} i^2 \mu_0 N^2 \cancel{\pi} \frac{D_m}{h}\left(\frac{1}{2\cancel{\pi}}\right)$$

Ci interessa anche la tensione nel singolo conduttore che è $\frac{F_N}{N S_{cu}} = \sigma$

$$\sigma = \frac{1}{N S_{cu}} \cdot \frac{1}{4} i^2 \mu_0 N^2 \frac{D}{h}$$

σ_{max} ammissibile $= 40 \frac{kgf}{mm^2}$

il $\sigma_{max,\ reale} \simeq 5 \frac{kgf}{mm^2}$

Se si supera σ_{max} si ~~rischia il corto circuito~~ rompe il trasformatore.

All'interno del singolo avvolgimento abbiamo due conduttori percorsi da correnti equiverse e che tendono ad attrarsi.

Forze di attrazione tra conduttori appartenenti allo stesso avvolgimento

$$L = \mu_0 N^2 2\pi \frac{D_m}{h}\left(\frac{b_1+b_2}{3}+d\right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial h} = -\mu_0 N^2 2\pi \frac{D_m}{h^2}\left(\frac{b_1+b_2}{3}+d\right)$$

Di solito $D < h$ quindi $D/h^2 \ll 1$

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial h} = -i^2 \mu_0 \pi \frac{D_m}{h^2}\left(\frac{b_1+b_2}{3}+d\right)N^2$$

Raffreddamento dei trasformatori

Per indicare il metodo del raffreddamento si usa la convenzione:

- A aria
- O olio
- W acqua

} fluido di raffreddamento primario a contatto con Fe e Cu

il fluido ha circolazione

- N naturale
- F forzata
- D (deep) circolazione interna

Non si ha quasi mai l'acqua come circuito di raffreddamento primario (può accadere un raffreddamento OF W/F)

il riscaldamento del trafo è dovuto alle perdite Joule e alle perdite nel ferro.