

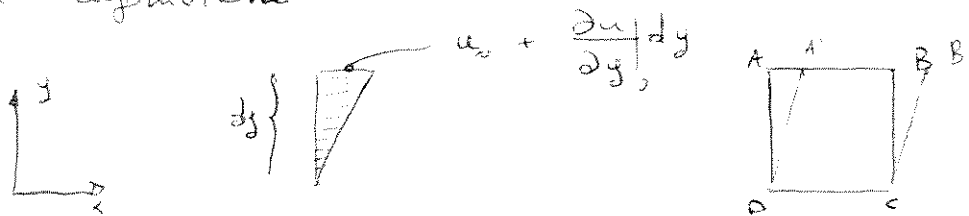
Gli impianti idroelettrici hanno piccole inerte e quindi sono adatti a sopprimere ai picchi di carico.

IDRAULICA (Meccanica dei fluidi)

è una scienza che studia i cinemotismi e l'interazione dei fluidi con le strutture

FLUIDO: corpo materiale dotato di elevata mobilità delle particelle che lo compongono (la sua deformazione non cessa quando cessano le sollecitazioni).

Dobbiamo capire quale è la differenza tra deformazione e velocità di deformazione



Come deforma il quadrato? C e D sono soggetti a velocità nulle e non si muovono. invece i punti A e B in un tempo infinitesimo si spostano in A' e B'. Quindi il quadrato dopo un tempo infinitesimo diventa un parallelogramma.

consideriamo la deformazione angolare



$$AA' = \frac{\partial u}{\partial y} dy dt$$

$$\frac{AA'}{AD} = \frac{1}{dy} \gamma \approx \gamma \quad \delta \text{ molto piccolo}$$

$$\gamma \approx \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (AD = dy)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{velocità di deformazione (legata al gradiente di velocità)}$$

Concetti base

- Differenze gas e liquido: i gas possono variare il volume mentre i liquidi sono incompressibili.
- Meccanica del continuo: poiché si osserva il fluido a scale molto più grandi delle scale molecolari allora possiamo trattare il fluido come se fosse un elemento continuo.

Simbologia

ρ : densità del fluido $\frac{M}{V} = [kg/m^3]$

γ : $\rho \cdot g = [\frac{N}{m^3}]$

P : pressione $\frac{F}{\text{superficie}} = [\frac{N}{m^2} = Pa]$

$$10^5 Pa = 1 \text{ bar}$$

E : modulo di elasticità a compressione cubica $E = -V \frac{dp}{dV} = [Pa]$

$$\frac{1}{E} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

L : indicazione della comprimibilità del fluido.
i liquidi: $E = n \cdot 10^9 Pa$ (acqua: $E = 2 \cdot 10^9$)

$$m = \rho V \Rightarrow \frac{dm}{\downarrow=0} = dV \rho + V d\rho \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ velocità del propagazione del suono $c_{H_2O} = \sqrt{2} \cdot 10^3 = 1400 \text{ m/s}$

τ : sforzo tangenziale $\vec{\tau} = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\Omega}$

Reologia è quella parte del legame $\tau = K \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ cioè come τ dipende da $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Noi studieremo solo i fluidi Newtoniani cioè i fluidi dove il legame precedente è lineare.

$$\tau_{\text{tangenziale}} = \tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dove μ è la viscosità dinamica $[\frac{Ns}{m^2}]$

In meccanica dei fluidi si usa la viscosità cinematica

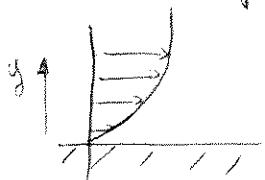
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = [\frac{m^2}{s}]$$

$$\nu_{\text{aria}} = 15 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$\nu_{H_2O} = 12 \div 1.5 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

Nei campi di moto vicino ad una parete lo sforzo

tangenziale alla parete vale



$$\tau = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$$

La viscosità dipende dalla temperatura. La viscosità di un gas
 è viscosità aumenta con l'aumento della temperatura.
 La viscosità dei liquidi aumenta con la diminuzione della
 temperatura.

Notazioni alternative

1) a (lungo o per o per) = scalare

2) \vec{a} = vettore $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

3) $A = \{ \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \} = A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \dots & \dots \\ A_{31} & \dots & A_{33} \end{pmatrix}$

Regole di Einstein degli indici ripetuti: se scriviamo

$$A_{ij} b_j = \sum_{j=1}^3 A_{ij} b_j = c_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{u}$$

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \text{traccia}(A) = \text{tr}(A)$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_j \text{div}(\vec{u})$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \vec{u} \cdot \text{grad}(u_i)$$

Derivata totale $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}(\quad)$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}(p)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}(\vec{u})$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

∇a gradiente di a

$\nabla \cdot \vec{a}$ divergenza di \vec{a}

$\nabla \times \vec{a}$ rotore di \vec{a}

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Teorema del trasporto

Supponiamo di voler calcolare

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_w e \, dw \right)$$

con il volume di controllo che varia nel tempo.

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_w e \, dw \right) = \int_w \left(\frac{De}{Dt} + e \operatorname{div}(\vec{u}) \right) dw$$

Equazione di continuità

Principio di conservazione della massa in mezzi continui

$$m = \int_w \rho \, dw \quad \text{è la massa}$$

il principio di conservazione dice che

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{Dt} \left(\int_w \rho \, dw \right) = 0$$

$$\int_w \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) \right) dw = 0$$

$$\textcircled{*} \quad \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0} \quad \text{equazione di continuità}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{u} \cdot \nabla(\rho)}_{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0}$$

$$\int_w \frac{d\rho}{dt} \, dw = - \int_w \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \, dw = \int_a \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dw = Q_m$$

Dalle $\textcircled{*}$ deriva che

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \operatorname{div}(\vec{u})$$

Se il fluido è incomprimibile $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$ e quindi $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$

Supponiamo di voler calcolare

$\frac{D}{Dt} \int_W \rho e \, dW$ se utilizziamo il teorema del trasporto e l'equazione di continuità si ha:

$$\frac{D}{Dt} \int_W \rho e \, dW = \int_W \rho \frac{De}{Dt} \, dW$$

(e a fosse un vettore al posto di e funzione lo stesso)

Le linee di corrente è una curva che in ogni punto è tangente al campo di moto.

Dinamica dei fluidi

\vec{F} : forza di massa per unità di massa.

$\int \rho \vec{F} \, dW$ peso di un volume di controllo

\vec{e} : sfera unitaria

$$\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{e} \, d\Omega$$

$m \vec{u}$: quantità di moto

$\int_W \rho \vec{u} \, dW$ quantità di moto contenuta all'interno di un volume di controllo W

$\int_W (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \rho \vec{u} \, dW$ momento angolare del fluido contenuto di un volume di controllo W

Teorema del tetraedro di Cauchy

$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) = T(\vec{x}) \cdot \vec{n}$
normali alla superficie di un tetraedro
lo sfera

↳ tensore degli sforzi

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yt} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

la traccia di T ($\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$) non dipende dal sistema di riferimento ed è 3 volte la pressione.

Teorema delle quantità di moto

$$\frac{D}{Dt} \int_w \rho \vec{u} dW = \int_w \rho \vec{F} dW + \int_a \tau dW =$$

$$\frac{D}{Dt} \int_w \rho \vec{u} dW = \int_w \rho \vec{F} dW + \int_a T \vec{n} d\Omega =$$

Teorema delle
divergenze

$$\int_w \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dW = \int_w \rho \vec{F} dW - \int_w \operatorname{div}(\vec{T}) dW$$

$$\int_w \rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) - \operatorname{div}(\vec{T}) = 0$$

$$\rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \operatorname{div}(\vec{T}) \quad \text{Equazione di Cauchy.}$$

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \operatorname{div}(\vec{T})$$

il risultato di questa equazione è che il tensore degli sforzi è simmetrico (questa considerazione nasce dal bilancio dei momenti angolari).

In generale la risoluzione di un corpo in moto ha le seguenti incognite.

$$u, v, w, \rho, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}$

In totale ho 10 incognite

Posso usare le seguenti equazioni:

- continuità (risolve 4 incognite)
- Cauchy (" 3 incognite)
- di stato $f(\rho, p) = 0$ (risolve 4 incognite)

Abbiamo 5 equazioni per 10 incognite, non riusciamo a risolvere il sistema.

Per risolvere il sistema dobbiamo trovare 5 equazioni. Per questo andremo a proprietà dei fluidi ideali, viscosi e statici.

FLUIDI ideali:

$$T = pI = p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se fluido ideale non produce sforzi tangenziali. Il fluido si può considerare ideale se è sufficientemente lontano dalla parete.

In questo caso $\text{div}(T) = \text{grad}(p)$
d'equazione di Cauchy diventa:

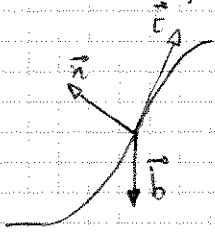
$$\boxed{\rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \text{grad } p} \quad \text{Equazione di eulero}$$

Che può anche essere scritto $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p)$

Da questa equazione si può ricavare il teorema di Bernoulli:

$$\vec{F} = -g \text{grad}(\vec{z}) \quad ; \quad \gamma = \rho g \quad \text{sostituisco nell'equaz. di eulero}$$

$$-\gamma \text{grad}(\vec{z}) - \rho \vec{A} = \text{grad}(p)$$



b. binomiale della traiettoria

$$-\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - A_s = \frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{con } s \text{ la coordinata curvilinea della traiettoria}$$

Durante la traiettoria il fluido è incompressibile, quindi $\gamma = \text{cost}$

$$-\frac{A_s}{g} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

h. campo idrostatico (o piezometrico)

A_s è la componente lungo s dell'accelerazione, cioè $A_s = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{ds}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{g} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{u}{g} \frac{du}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \Rightarrow -\frac{1}{g} \frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \\ u \frac{du}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \end{cases} \quad H: \text{ campo totale}$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial s}}$$

Se il moto è permanente (non ci sono ~~stato~~ variazioni temporali del moto), allora:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0, \text{ cioè}$$

$H = \text{costante}$
su traiettoria

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{costante}$$

Se il rotore ($\vec{\omega}$) = 0 allora H è costante ovunque.

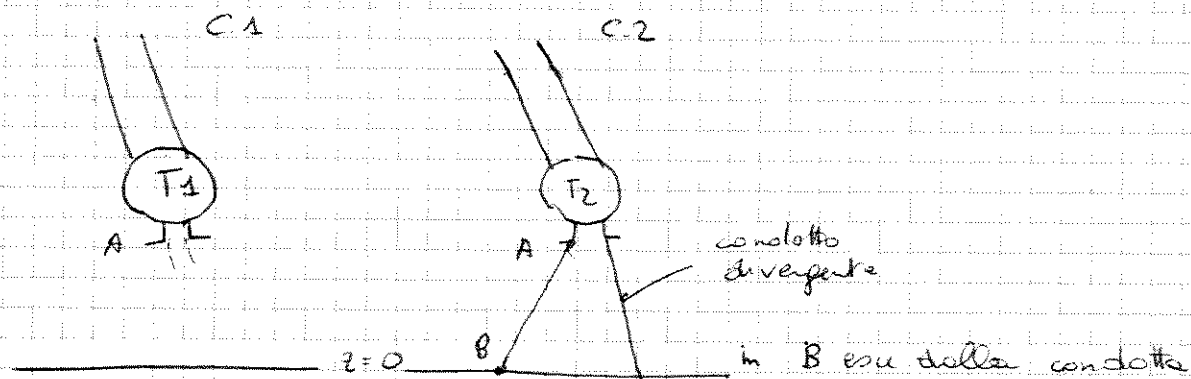
z è la quota, ~~ma~~ può anche essere considerata come energia potenziale per unità di peso. $z = \frac{m g z}{m g}$

$\frac{u^2}{2g}$ può essere intesa come energia cinetica per unità di peso

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2} m u^2}{m g} \text{ ed è l'energia cinetica}$$

$\frac{p}{\gamma}$ è un'energia di pressione.

Esercizio



Trovare H per le particelle che transitano in A

$$H_A^{(1)} = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g}$$

= 0

$$H_A^{(2)} = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g}$$

= 0 = 0

$H_A^{(1)} > H_A^{(2)}$ quindi mi conviene inserire un condotto divergente

Soltanto inserendo un diffusore aumento il rendimento.

$$\frac{p_A}{\gamma} = \frac{u_B^2}{2g} - \frac{u_A^2}{2g} - z_A < 0 \text{ cioè è minore della pressione atmosferica. Se scende troppo la pressione avviene la cavitazione.}$$

Equazione globale dell'equilibrio dinamico per i fluidi ideali:

Partiamo dall'equazione di eulero

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}(p)$$

Integriamo l'espressione nel volume w

$$\int_w \rho (\vec{F} - \vec{A}) dw = \int_w \text{grad}(p) dw$$

$$\int_w \rho \vec{F} dw - \int_w \rho \vec{A} dw = \int_w \text{grad}(p) dw$$

\downarrow forza peso \vec{P} ; \downarrow $\int_w \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dw = \vec{M} = - \int_{\Omega} p \vec{u} d\Omega = \vec{\Pi}$ spinta statica (dipende dalle pressioni)

$$= \frac{D}{Dt} \int_w \rho \vec{u} dw = \int_w \frac{D}{Dt} (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} \text{div}(\vec{u}) dw =$$

$$= \int_w \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) dw = \int_w \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dw + \int_w \text{div}(\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) dw =$$

$$= \int_w \frac{\partial \rho u}{\partial t} dw + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{v_n} dw$$

Quindi l'equazione diventa:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{M} - \vec{I} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{M} = \int_{\Omega} \rho \vec{u} v_n d\Omega = \vec{M}_e - \vec{M}_u \quad \begin{array}{l} \text{flussi di} \\ \text{p.to di noto} \end{array}$$

ed $\vec{I} = \int_w \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dw$ venutone temp. delle p.to di noto

Possiamo scrivere l'equazione

$$\boxed{\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u - \vec{I} = 0} \quad \text{equazione temporale di equilibrio dinamico}$$

Se consideriamo traiettorie parallele

$$v_n = v \quad \text{ed} \quad \vec{u} = v \cdot \vec{n}$$

$$\text{quindi} \quad \vec{M}_e = \vec{n} \int_{\Omega} v^2 \rho d\Omega = \vec{n} \beta \rho Q V \quad \text{con}$$

$\beta =$ coefficiente di riappoggio (o di Coriolis).

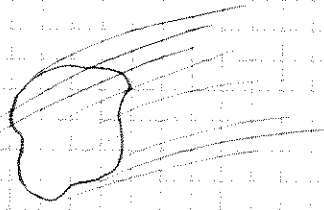
$$\text{quindi} \quad \beta = \frac{\int_{\Omega} v^2 \rho d\Omega}{\rho Q V} = \frac{\int_{\Omega} v^2 \rho d\Omega}{\rho v^2 \Omega} \quad \text{con} \quad Q = V \Omega$$

β non ha un range di variabilità: se il corpo di noto è uniforme $\beta = 1$; se il corpo di noto è parabolico $\beta = \frac{4}{3}$.

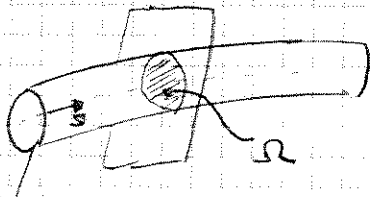
$\beta = \frac{4}{3}$ è il range di variabilità di β

la maggior parte delle volte $\beta = 1$ (noti turbolenti)

Considerando tutte le linee di corrente che passano per una curva chiusa si individua un tubo di flusso. Il tubo di flusso è attraversato solo tangenzialmente alla superficie.



Una corrente è un tubo di flusso che presenta linee di corrente parallele.



tubo di corrente

$$Q = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega \quad \text{è la portata volumetrica}$$

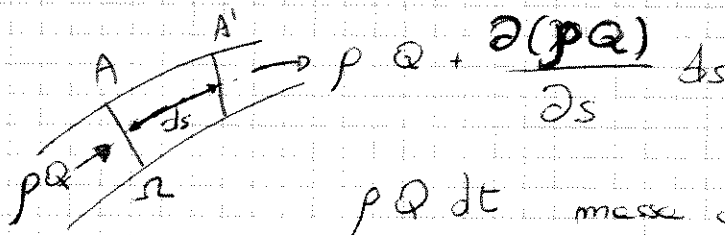
Se la sezione è trasversale $Q = \int_{\Omega} v d\Omega$ con $v = \vec{u} \cdot \vec{n}$

la velocità media è $U = \frac{Q}{\Omega}$

Si ha una corrente gradualmente variata se tubo di flusso ha linee di corrente parallele e rettilinee.

Le coordinate sono le coordinate cartesiane x ed il tempo t .

Equazione di continuità per le correnti:



$\rho Q dt$ massa che attraversa A in un tempo dt

$\left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt$ massa che attraversa A' in un tempo dt

In un tempo t la massa immagazzinata è $\rho \Omega ds$

In un tempo $t+dt$ " " " " è $\left[\rho \Omega + \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt \right] ds$

Durante dt la $\Delta m = \frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt ds = - \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt$

cioè

$$\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0}$$

vali anche per fluidi non ideali

Per condotte indeformabili o in moto permanente $Q = \text{cost}$ quindi

$$U\Omega = \text{cost}$$

In un condotto se la sezione è costante anche la velocità sarà costante.

Estensione al teorema di Bernoulli (vali solo per fluidi ideali)

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{cost}}$$

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega}$$

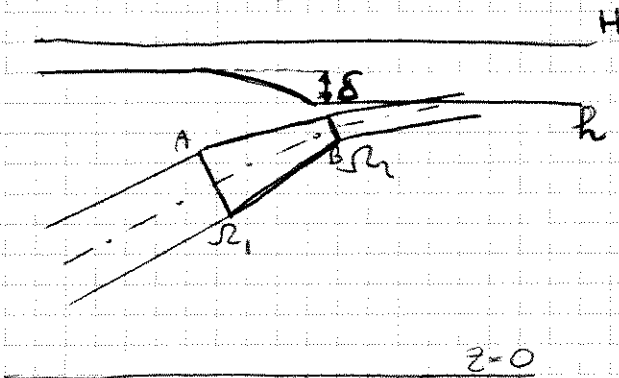
Per i moti turbolenti $\alpha = 1,02$

Per moti laminari $\alpha = 2$

$$(\alpha - 1) = 3(\beta - 1)$$

Applicazione del teorema di B.

Tubo convergente / Venturmetro



Nel tratto convergente supponiamo il fluido ideale. Supponiamo quindi che H è costante.

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

S è la variazione di energia cinetica nel passaggio dalla sezione A a B.

Applichiamo il tes di Bernoulli nel tubo convergente

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$S = z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} = \frac{1}{2g} (U_B^2 - U_A^2), \text{ seppero che } U_A \Omega_A = U_B \Omega_B = Q$$

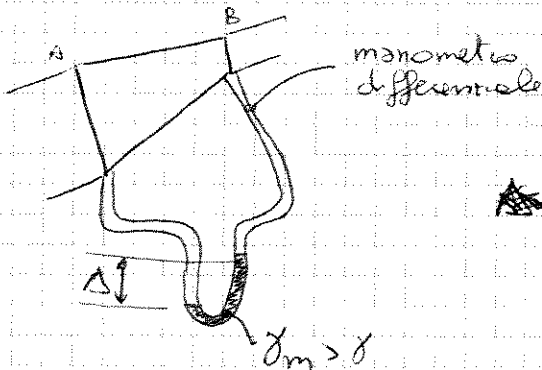
si può scrivere che $U_A = \frac{Q}{\Omega_A}$ e $U_B = \frac{Q}{\Omega_B}$

quindi

$$\delta = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_B^2} - \frac{1}{\Omega_A^2} \right)$$

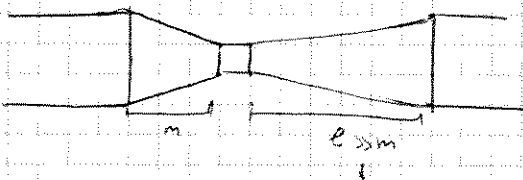
Di conseguenza

$$Q = \frac{\Omega_A \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \sqrt{2g \delta}$$



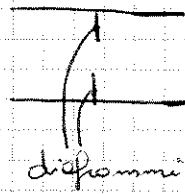
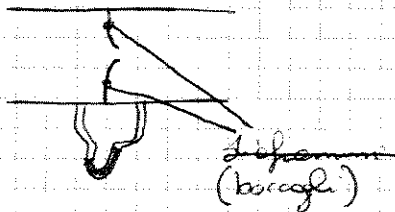
$$\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta h = \delta$$

I venturimetri sono fatti così:



questo perché le perdite nei divergenti sono \gg che nei convergenti.

Altri metodi di misura



FLUIDI IN QUIETE

Se i fluidi sono in quiete ($\vec{u} = 0$) si ha questa relazione tra sforzi e deformazioni:

$$T = p I = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$p (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p \Rightarrow \vec{A} = 0$$

$$p \vec{F} = \text{grad } p \quad \text{eq. indifferente della statica}$$

$$\vec{p} + \vec{\pi} + \vec{\gamma} + \vec{\gamma} - \vec{f} = 0 \quad \text{equazioni globali della statica}$$

$$\Rightarrow \vec{p} + \vec{\pi} = 0 \quad \text{in idrostatica}$$

se $\vec{F} = -\rho \text{ grad } z$

allora l'eq. indefinita della statica diventa

$$-\rho g \text{ grad } z = \text{grad } p$$

$$-\gamma \text{ grad } z = \text{grad } p \Rightarrow \text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

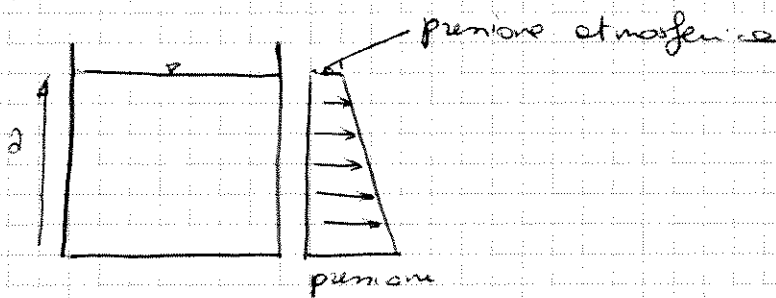
$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$$

equazione di Stevino

Note: qualsiasi superficie isobara si trova su un piano a quote costante

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} \Rightarrow p_B = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$

Esempio:



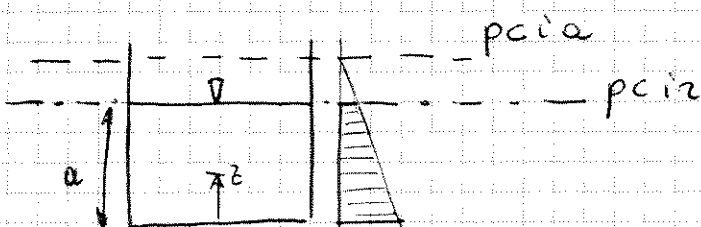
Definizione: piano dei carichi idrostatici assoluti (p.c.i.a.) piano su cui si misura una pressione assoluta uguale a zero

$$p_B = 0 = p_A + \gamma (z_A - z) \Rightarrow z = \frac{p_A + \gamma z_A}{\gamma} = \frac{p_A}{\gamma} + z_A$$

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} = \begin{cases} H_2O: 10,33 \text{ m} \\ \text{mercurio}: 0,76 \text{ m} \end{cases}$$

Definizione: piano dei carichi idrostatici relativi (p.c.i.r.) piano su cui la pressione assoluta non è quella atmosferica vale 0

$$p - p_{atm} = 0$$

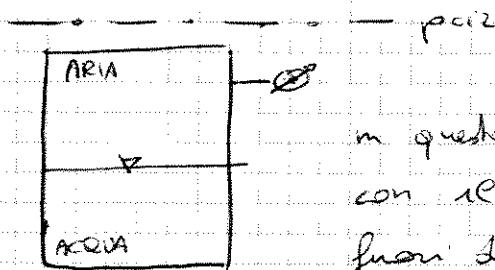
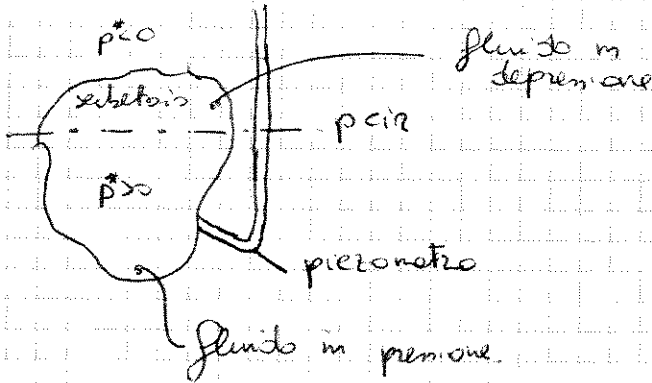


La legge di Stevino ci dice che

$$p(z) = p_{atm} + \gamma (a-z)$$

affondamento rispetto al p.c.i.r.

$$P_2^* = P_2 - p_{atm} = \gamma (a-z) \quad \text{pressione relativa}$$



in questo caso il p.c.i.r. non coincide più forte con il pelo d'acqua. Può anche essere fuori del serbatoio.

Esempio

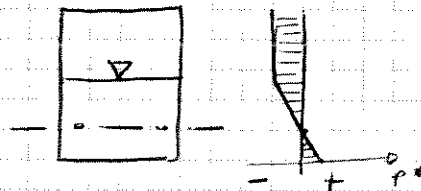
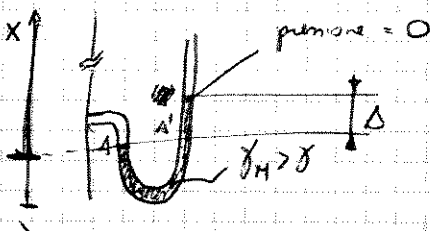


diagramma delle pressioni

Se la pressione da misurare è molto elevata il piezometro non va bene, ma si usa il manometro.

manometro semplice

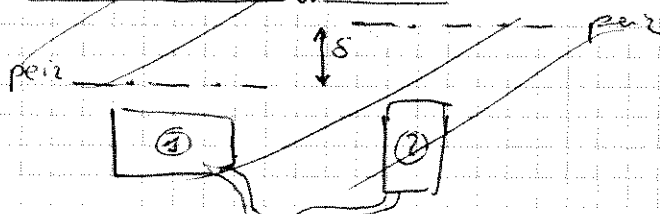


$$P_A' = \Delta \gamma_H = P_A \quad \Delta \gamma_H = \gamma x$$

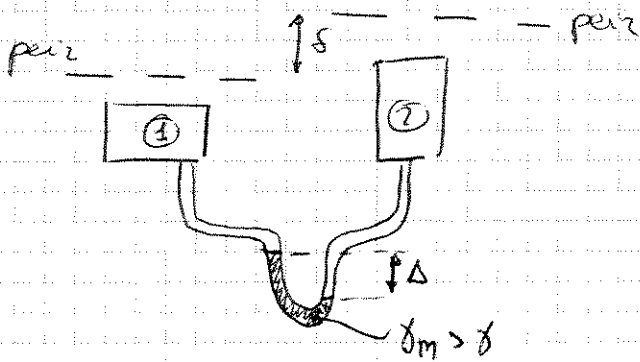
$$P_A = \gamma x = 0 \quad \Downarrow$$

$$x = \Delta \frac{\gamma_H}{\gamma}$$

Manometro differenziale

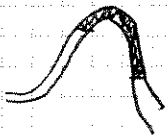


Manometro differenziale



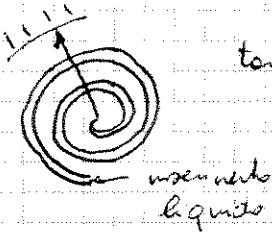
$$s = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \quad \text{nel caso in cui } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

Se $\gamma_m < \gamma$ allora il manometro differenziale è ad M rovescio e



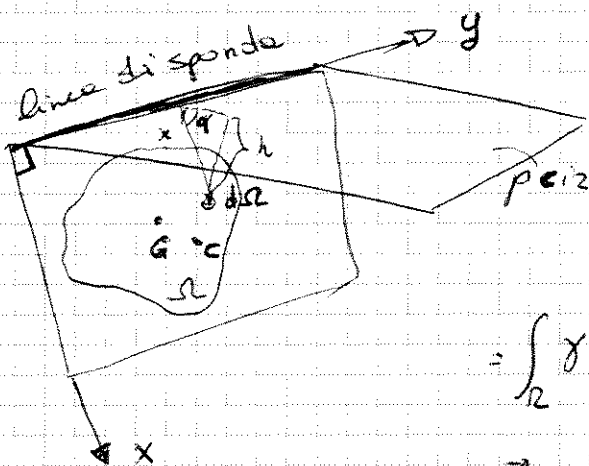
$$s = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}$$

Manometri metallici



tanto più la pressione del liquido è elevata più le spirali tendono ad aprirsi.

Spinte su pareti piane



$$d\vec{s} = p \vec{n} d\Omega$$

spinta infinitesimale

\vec{n} verso normale a $d\Omega$

$$\vec{S} = \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega} \gamma h \vec{n} d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \gamma x \sin(\alpha) \vec{n} d\Omega = \vec{n} \sin(\alpha) \gamma \int_{\Omega} x d\Omega =$$

$$= \vec{n} \underbrace{\sin(\alpha)}_{h_G} x_G \Omega \gamma =$$

M_y momento statico rispetto all'asse y

$$M_y = x_G \Omega$$

$$= \vec{n} \gamma h_G \Omega = \boxed{\vec{n} p_G \Omega} = \vec{S}$$

\vec{S} verso applicato in C . Dobbiamo trovare le coordinate di C :

$$\vec{n} |s| x_c = \int_{\Omega} x p \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega} x \gamma h \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega} x^2 \gamma \sin(\alpha) \vec{n} d\Omega =$$

$$= \gamma \sin(\alpha) \vec{m} \int_R x^2 d\Omega$$

I_y : momento d'inerzia rispetto a y

$$\vec{r} \sin(\alpha) x_c = \gamma \sin(\alpha) \vec{r} I_y$$

$$\gamma \sin(\alpha) M_y x_c = \gamma \sin(\alpha) I_y \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{I_y}{M_y}}$$

$$\boxed{y_c = \frac{I_{xy}}{M_y}} \quad \text{con} \quad I_{xy} = \int_R xy d\Omega \quad \text{momento polare}$$

$$x_c - x_G = \frac{I_{y_0}}{M_y} - x_G = \boxed{\frac{I_{y_0}}{M_y} = x_c - x_G}$$

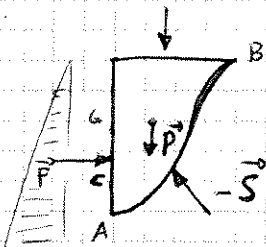
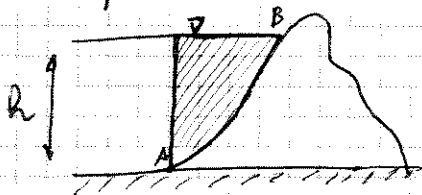
$$\boxed{G} \quad I_{y_0} = I_y + x_G^2 \Omega$$

Spinte su superficie piana curva

Equazione globale della statica $\vec{p} + \vec{\pi} = 0$

forza peso \downarrow risultante delle forze al contorno \searrow
 $\int_W p F d\omega = \gamma W$ $\sum_i \vec{\pi}_i$

Esempio



Quanto vale la spinta su AB?

considero il volume di controllo tratteggiato (ha 2 superfici piane ed una curva).

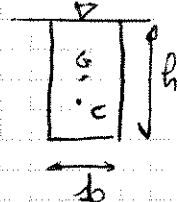
Per poter soddisfare l'equazione globale della statica si dovrà avere

$$\vec{F} + \vec{P} - \vec{S} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} - S_h = 0 \\ \vec{P} - S_v = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{proiezione orizzontale} \\ \text{" " " verticale} \end{array}$$

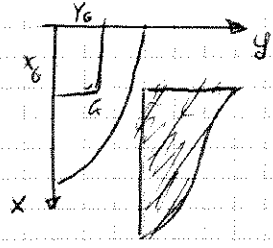
$$\left\{ \begin{array}{l} S_h = F = P_G \Omega = \gamma \frac{h}{2} (h \cdot 1) = \gamma \frac{h^2}{2} \\ S_v = P = \gamma W \end{array} \right. \Rightarrow |S| = \sqrt{S_h^2 + S_v^2}$$

$$\bar{GC} = \frac{I_{oy}}{M_y} = \frac{h^3/12}{x_G \Omega} = \frac{h^3/12b}{\frac{b}{2} \cdot h} = \frac{h}{6}$$



$$I_{oy} = \frac{h^3 b}{12} = \frac{b^3}{12} \text{ in questo caso } b=1$$

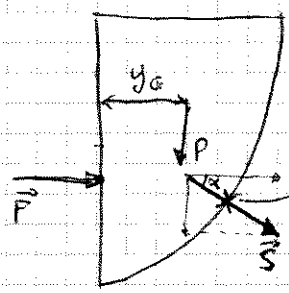
Baricentro del volume:



$$x_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} x d\Omega$$

$$y_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} y d\Omega$$

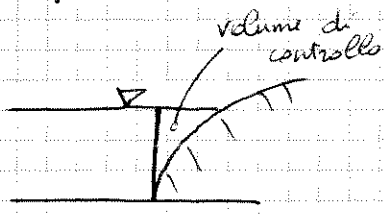
A noi interessa solo il valore y_G



punto di applicazione di \vec{S}

$$x = \arctg\left(\frac{S_v}{S_h}\right)$$

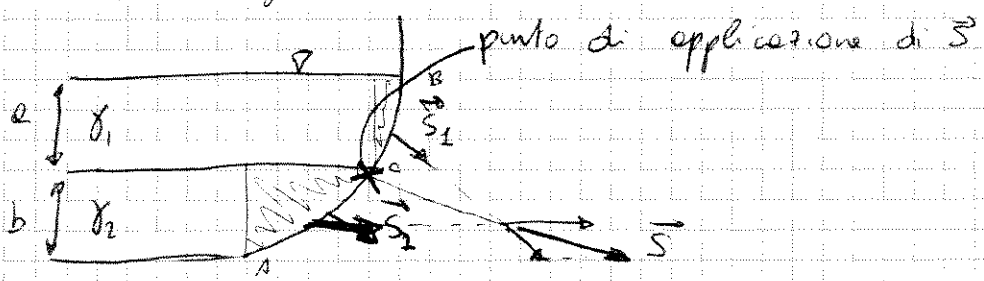
Esempio:



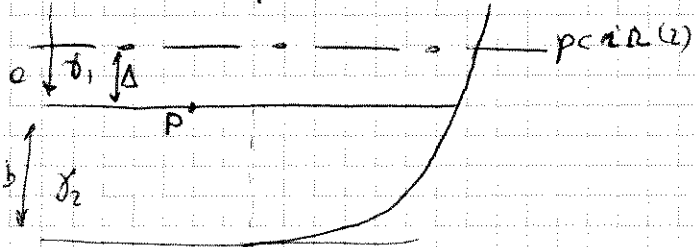
volume di controllo finito

(s. sostituisca il solido con il eq fluido in questione)

Esempio: 2 fluidi distinti



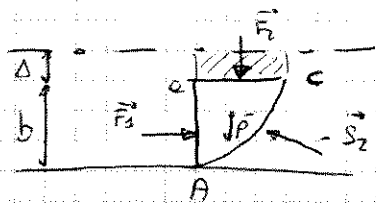
Il piano dei centri p.c.i.R(z) non è sulle superficie di separazione ma è più in alto di un valore Δ



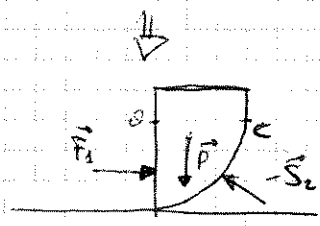
Strato 1 $P \in \delta_1$
 $P_p = \delta_1 \alpha$

Strato 2 $P \in \delta_2$ $P_p = \delta_2 \Delta$

Da cui risulta $\gamma_1 a = \gamma_2 b \Rightarrow \Delta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a$



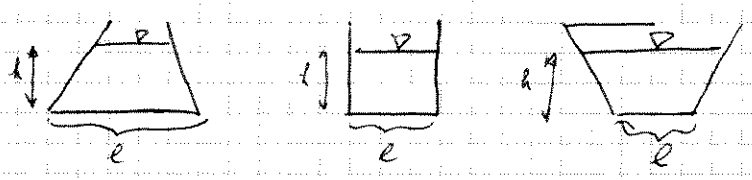
In questo caso $F_2 \neq 0$
 Il contributo di F_2 è uguale al contributo di un liquido che sta tra il volume di controllo ed il piano da cui.



Così quindi un nuovo volume di controllo da si ricorda agli esempi precedenti.

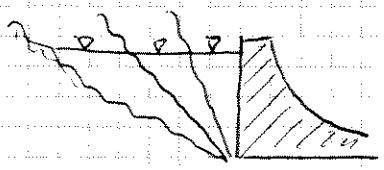
F_3 è lo stesso, P invece varia con anche il baricentro del volume.

Paradosso di Stevino



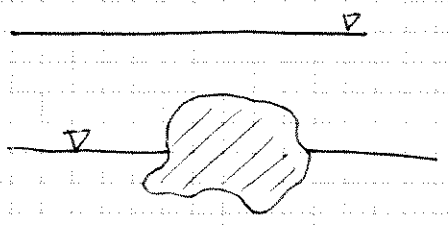
La forza applicata sul fondo del serbatoio è uguale in tutti e tre i casi!!!

dato una diga



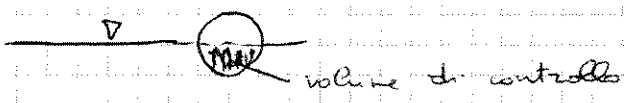
La spinta nella diga è la stessa per ogni inverso

Spinte di Archimede



$$\vec{P} + \vec{\Pi} = 0 \quad \vec{\Pi} = -\vec{P} = -\gamma \vec{W}$$

\uparrow spinta da parte il corpo
 \uparrow del liquido



$$\vec{S} + \vec{B} = 0$$

\uparrow $\gamma_e W_c$
 \uparrow $\gamma_s W_s$
 volume di controllo

FLUIDO REALE

considerano un fluido reale quando si trova vicino alla parete.

$$T_{ij} = p \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ per fluidi Newtoniani incomprimibili b.c.}$$

$$\delta_{ij} \text{ operatore di Kronecker } \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{div } T$$

$$\boxed{\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}} \text{ Eq di Navier-Stokes}$$

$\mu \nabla^2 \vec{u}$ termine diffusivo

Per risolvere l'equazione di Navier-Stokes abbiamo bisogno di 2 condizioni al contorno. (Per l'equazione di Euler era 1 sola impermeabilità delle pareti $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ alle pareti).

Condizioni al contorno per Stokes:

- impermeabilità alla parete $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

- no slip condition $\vec{u} \cdot \vec{t} = 0$ (alla parete ho velocità nulla).
condizione di non slittamento.

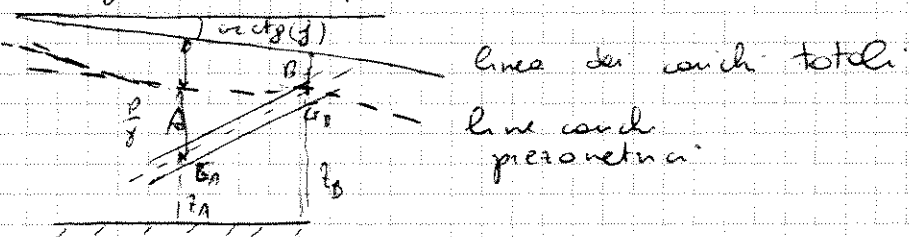
$$\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u - \vec{T} = \vec{I} \quad T = \text{azione di trascinamento}$$

$$T = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\omega$$

$\frac{\partial H}{\partial s} \neq 0$ nei fluidi reali e cause degli attriti.

$\frac{\partial H}{\partial s} = -f$ con $f > 0$. cioè il carico totale diminuisce.

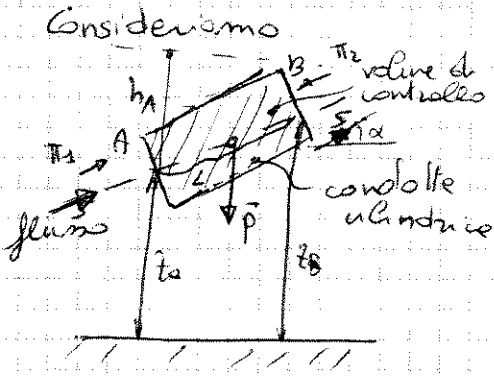
f è detta pendenza motrice



Se il fluido fosse ideale la linea del carico totale sarebbe orizzontale.

Se $\Omega = \text{costante}$, poiché $\Omega u = \text{costante}$ (eq. moto permanente) allora u è costante allora la linea dei carichi totali è parallela alle linee dei carichi piezometrici.

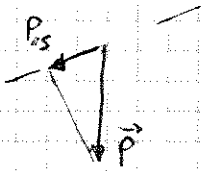
Talvolta j è detta costante piezometrica.



Poiché la condotta è inclinata anche la linea dei carichi piezometrici sarà inclinata

$$R_0 = \frac{T}{L \rho} \quad \text{pendenza delle condotte}$$

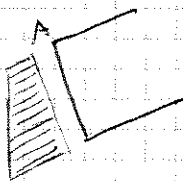
$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{T} = \vec{I}$$



$$\vec{P} \cdot \vec{s} = -P \sin \alpha$$

$$\vec{T} = \int_R p \vec{n} dR$$

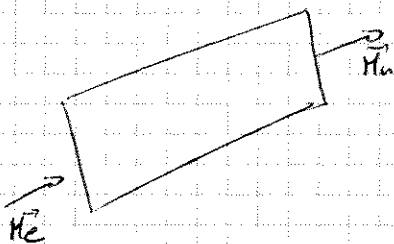
Distribuzione della pressione nel volume di controllo è come nelle condizioni idrostatiche perché condotta rett. linea



Il piano idrostatico ^{relativi} idrostatico V per la superficie A consiste nel piano orizzontale passante distante h_A dal baricentro della sezione A .

$$|\vec{T}_A| = p_A \Omega$$

$$|\vec{T}_B| = p_B \Omega$$



$$\left. \begin{aligned} |\vec{M}_e| &= \beta \rho \Omega u_A = \\ |\vec{M}_u| &= \beta \rho \Omega u_B = \end{aligned} \right\} \text{poiché } \vec{u}_A = \vec{u}_B$$

$$\vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$\vec{I} = 0$$

$$\vec{T} \cdot \vec{s} = T = -P \sin \alpha + p_A \Omega - p_B \Omega$$

$$L \rho \sin \alpha = z_B - z_A$$

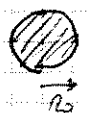
$$T = P \frac{z_B - z_A}{L} - (P_B - P_A) \Omega = - \gamma K \Omega \frac{z_B - z_A}{L} - (P_B - P_A) \Omega$$

$$\frac{T}{\gamma \Omega} = \left[\underbrace{\left(z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right)}_{h_B} + \underbrace{\left(z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right)}_{h_A} \right] = L j$$

$$T = + \gamma \Omega L j = + \gamma W j$$

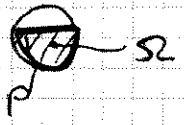
$$\frac{W}{\rho} = \frac{T}{L P} = \gamma \frac{\Omega}{P} S = \boxed{\gamma R j} \quad R: \text{raggio idraulico}$$

Se la rete è circolare e totalmente bagnata



$$R = \frac{\pi R_0^2}{2 \pi R_0} = \frac{R_0}{2}$$

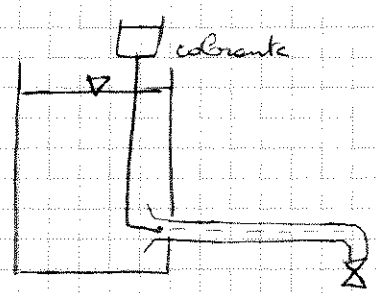
Se ret. circolare ma parzialmente bagnata



$$R = \frac{e b}{2(e+b)}$$

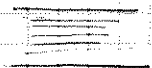
Moto turbolento vs Moto laminare

Esperienza di Reynolds



Reynolds osservava come ^{comportamento} il fluido variava la portata

Reynolds ha osservato il percorso del colorante. Per portate basse il colorante che si trova sull'asse rimane sull'asse e si allunga un pochetto per effetto della diffusione molecolare. Questo perché il

campo di moto è formato da filetti paralleli. 

Il moto formato da filetti paralleli è il moto laminare.

Per portate più elevate il filetto inizia ad oscillare. Aumentando le portate si aumentano le irregolarità del campo di moto si genera

delle componenti trasversali e medie nulle. Superato una certa portata il campo di moto diventa completamente irregolare.

Reynolds ha definito $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$ il n. di Reynolds.

Se $Re < 2000$ moto laminare
 $Re > 4000$ moto turbolento
 $2000 < Re < 4000$ moto di transizione

con:

ρ : densità

μ : viscosità

D: diametro

u : velocità.

Esistono delle equazioni che descrivono il campo di moto medio nel tempo. Queste equazioni si ottengono facendo una media temporale delle equazioni di N. Stokes.

$\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$ decomposizione di Reynolds

ne fanno la media sulle fluttuazioni (\vec{u}')

$$\frac{1}{T} \int_0^T \vec{u}' dt = 0$$

$$\overline{(\cdot)} = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt \text{ è l'operatore di media}$$

Nota: $\overline{(\nabla p)} = \overline{(\nabla(P+p))} = \nabla(\overline{P}) = \nabla P$

Il problema si ha nell' $\vec{u} \text{ grad}(\vec{u})$

$$\begin{aligned} \text{supponiamo che } \vec{u} \text{ grad}(\vec{u}) &= u \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \\ &= u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) - \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\nabla \cdot \vec{u} = 0} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j)$$

facendo la media $\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(u_i u_j)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{[(U_i + u'_i)(U_j + u'_j)]} =$

rimane $x=X$ e $y=y$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{(U+u')(V+v')} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{UV} + \overline{Uv'} + \overline{Vu'} + \overline{u'v'} \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\overline{UV} + \underbrace{\overline{Uv'}}_{=0} + \underbrace{\overline{Vu'}}_{=0} + \overline{u'v'} \right]$$

$\rho \overline{(u'_i u'_j)}$ sono gl. sforzi di Reynolds o tensioni turbolente

$$\rho(\overline{F-A}) = \nabla p + \text{div}(\overline{T}) \quad \text{dove} \quad \overline{T} = \rho \delta_{ij} - 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \rho \overline{(u'_i u'_j)}$$

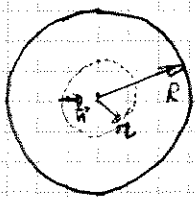
\downarrow
 tensore degli sforzi

Di solito gl. sforzi di Reynolds sono maggiori di quelli viscosi.

Modelli per risolvere le equazioni di Reynolds

- R-E
- LES Large Eddy Simulation
- DNS Direct Numerical Simulation

Calcolo delle perdite di carico nel moto laminare



$T(r)$ azione trasversale

$$T(r) = \mu \int_{\Omega(r)} \frac{du}{dn} d\Omega = -\mu \int_{\Omega(r)} \frac{du}{dr} d\Omega =$$

$$= -\mu \frac{du}{dr} \int_r^R d\Omega = -\mu \frac{du}{dr} (2\pi r) \cdot L$$

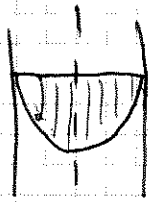
$$T = \gamma W J = \gamma \pi r^2 L \cdot \gamma$$

eguagliamo i due risultati:

$$-\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L = \gamma \pi r^2 L \cdot \gamma$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{\gamma r \gamma}{\mu}$$

$$\mu(r) = \frac{1}{4} \frac{\gamma \delta}{\mu} (R^2 - r^2)$$



$$\mu(R) = 0$$

$$Q = \int_{\Omega} u(r) d\Omega = \int_{\Omega} u(r) d(\pi r^2) = \int_{\Omega} u(r) 2\pi r dr =$$

↓
portata

$$= \boxed{\frac{\pi}{128} \frac{\gamma \delta}{\mu} D^4 \cdot Q}$$

legge di Poiseuille

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{32} \frac{\gamma \delta}{\mu} D^2$$

se condotto circolare $U = \frac{1}{2} \frac{\gamma \delta}{\mu} R^2$ ← raggio ideale

se condotto ellittico con base $\propto R^2$ $\alpha = \frac{1}{3}$ e

$$U = \alpha \frac{\gamma \delta}{\mu} R^2$$

legge tipica del moto laminare.

sfiori tangenziali all'interno della condotta:

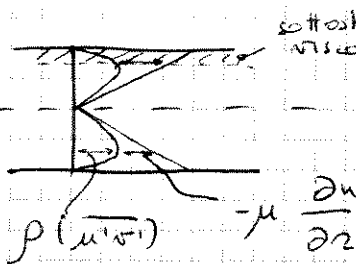


$$u_0 = \gamma R \delta$$

↓
raggio ideale

$$\tau(r) = \gamma \frac{r}{2} \delta$$

in caso di moto turbolento gli sfiori tangenziali



possiamo identificare la zona di strato viscoso dove sono predominanti l'azione della viscosità

Resistenze di un moto turbolento in condotta idraulica (Perdite di carico nei moti turbolenti.)

Definizione: Scabrezza di una condotta cioè le asperità all'interno di un tubo che si oppongono al moto.

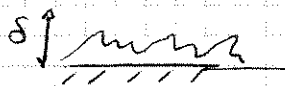
Nikuradse costruì dei tubi nella cui parete interna erano stati messi granuli di sabbia.

He calcolò le resistenze ~~opposte~~ opposte al moto nelle condotte.

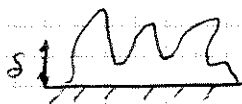
Scabrezza equivalente: la scabrezza che genera la stessa resistenza del tubo di Nikuradse (con dimensione della sabbia pari alla scabrezza).

E: scabrezza.

Un tubo è idraulicamente liscio se lo spessore del sottile strato viscoso (δ) è maggiore di $2E$



Se la scabrezza emerge dal sottile strato viscoso il tubo è idraulicamente scabro



Velocità di attrito: $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

La velocità media sulle turbolenze sarà funzione di:

$$u = u(y, u_*, E, \rho, \mu, D)$$

Si ha che $\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y) + c$

con κ costante di Von-Karman $\approx 0,41$

Se tubo liscio

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) + 5,5$$

Se tubo scabro

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{E}\right) + 8,5$$

coefficiente dello sforzo tangenziale

$$\tau_0 = f(\nu, \rho, \mu_0, \epsilon, D)$$

utilizziamo il teorema di Buckingham (o teorema Π) di

$$\frac{\tau_0}{\rho \mu_0^2} = F\left(\frac{\nu}{\rho \mu_0 D}, \frac{\epsilon}{D}\right) = \lambda'(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

$$\tau_0 = \gamma Q j$$

$$\frac{\gamma \frac{D}{4} j}{\rho \mu_0^2} = \frac{\rho g D j}{4 \rho \mu_0^2} = \frac{D j}{4 \frac{\mu_0^2}{\rho}} = \frac{D j}{8 \frac{\mu_0^2}{2g}} =$$

$$\frac{D j}{\frac{\mu_0^2}{2g}} = 8 \lambda' = \lambda(Re, \frac{\epsilon}{D}) \quad \lambda: \text{indice di resistenza}$$

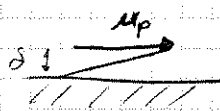
$$J = \lambda \frac{u_0^2 / 2g}{D} \quad \text{Darcy-Weisbach}$$

Nel caso di moto laminare

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Moti turbolenti:

$$\epsilon < \frac{\delta}{2}$$



$$\tau_0 = \mu \frac{u_p}{\delta} = \rho u_*^2$$

$$u_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = \mu \frac{u_p}{\rho \delta} \Rightarrow \frac{u_* \delta \rho}{\mu} = \frac{u_p}{u_*} = N$$

$$N = \frac{u_* \delta \rho}{\mu} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right) + 5,5$$

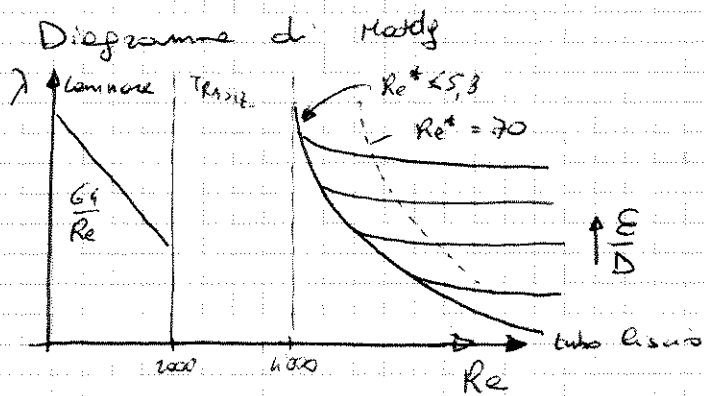
$$N = \frac{1}{k} \ln(N) + 5,5$$

$$N = 11,6 \quad \text{numero di Nikuradse}$$

$$\frac{u_* \delta \rho}{\mu} = 11,6 \Rightarrow \delta = \frac{11,6 \mu}{u_* \rho} = 11,6 \frac{\nu}{u_*}$$

$$\text{cioè } \epsilon < \frac{11,6 \nu}{2 u_*} = 5,8 \frac{\nu}{u_*}$$

$$Re_* = \frac{\epsilon u_*}{\nu} < 5,8 \quad \text{tubo liscio}$$



tubo liscio: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \ln\left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}}\right)$

formule di Blasius $\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$

Superato Re e E/D tratteggiata le curve di λ dipendono solo da E/D .

A destra della curva tratteggiata si ha "turbolenza pienamente sviluppata".

Per $Re^* > 70$ si ha che $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{E}{3,71 D}\right)$

Per $Re^* < 70$
 Per noto turbolento: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{E}{3,71 D}\right)$ Formula di Colbrook - White

I problemi che hanno come incognita

- D sono problemi di dimensionamento
- Q, E, J sono problemi di verifica.

Problema 1:

Nota $Q, D, E \rightarrow J$ $U_0 = \frac{4Q}{\pi D^2}$ $Re = \frac{U_0 D}{\nu}$

$j = \frac{\lambda U_0^2 / 2g}{D}$ non pedinare nota

Problema 2 Nota $Q, D, J \rightarrow E$ trova U_0, Re

$\lambda = \frac{5D}{U_0^2 / 2g}$ trovare λ e Re sul diagramma di Moody e trovare E

Problema 3 Nota $D, J, E \rightarrow Q$

$Re \sqrt{\lambda} = \frac{U_0 D}{\nu} \frac{\sqrt{2g j D}}{U_0} = \frac{D}{\nu} \sqrt{2g j D}$

Sostituisci $Re \sqrt{\lambda}$ nelle formule di Colbrook - White e trova

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{U_0}{\sqrt{2g j D}} = -2 \log\left(\frac{2,51 \nu}{D \sqrt{2g j D}} + \frac{E}{3,71 D}\right)$ trova U_0

$Q = U_0 \frac{\pi D^2}{4}$

Problema 4 $Q, S, E \rightarrow D$

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$\frac{4Q / \pi D^2}{\sqrt{2g} D} = -2 \log \left(\frac{2.51 U}{D \sqrt{2g} D} + \frac{E}{3.71 D} \right) \quad \text{equazioni con unica incognita } D$$

Formule di Chézy

$$U = \chi \sqrt{R J} \rightarrow J = \frac{U^2}{\chi^2 R} \quad R \text{ raggio idraulico}$$

χ è il coefficiente di Chézy

GAUCKLER STRICKLER

$$\chi = c R^{\frac{1}{6}} \quad c: \text{coefficiente di Strickler}$$

in USA di solito si usa $n = \frac{1}{c}$ coefficiente di Manning

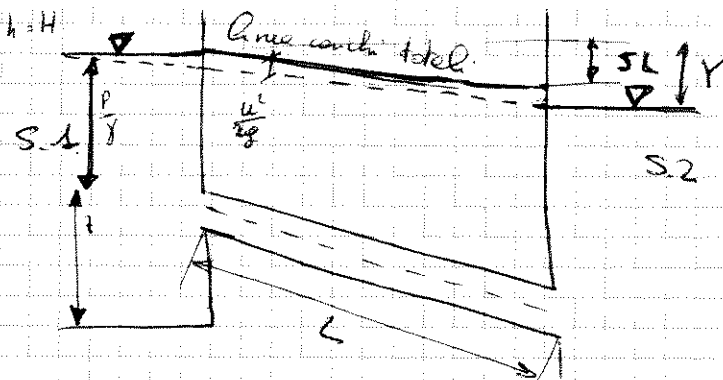
Darcy

$$J = \beta \frac{Q^2}{D^5} \quad \beta = \beta(E, D) \quad \beta = a + bD$$

altra formula di Darcy

$$J = \beta' \frac{Q^2}{D^{5.33}} \quad \text{per le lunghe condotte}$$

Esempio



La pendenza della linea dei carichi totali è legata a J in quanto $J = \frac{dH}{ds}$

--- curva piezometrica

SL è la differenza di carico totale tra monte e valle

$$K = SL + \frac{u^2}{2g}$$

Fissati K, L, D ed E ci poniamo il problema del calcolo di Q

$$u = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

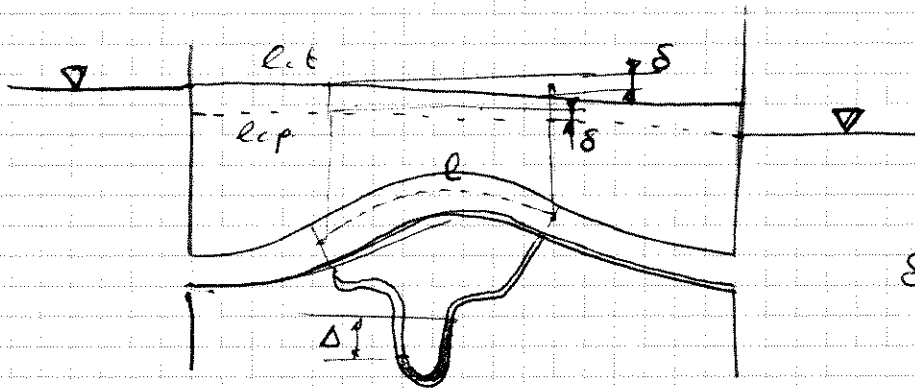
$$\chi = c R^{\frac{1}{6}} = c \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$J = \frac{u^2}{\chi^2 R} = \frac{\frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}}{c^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{D}{4}} = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} \frac{4^{\frac{1}{3}}}{c^2} \frac{4}{D^{\frac{1}{3}} D^2} = \frac{64 \cdot 4^{\frac{1}{3}} Q^2}{\pi^2 D^{\frac{53}{3}} c^2} = 64 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \frac{Q^2}{\pi^2 c^2 D^{\frac{53}{3}}}$$

$$Y = \frac{64 \cdot 4^{\frac{1}{3}} Q^2 L}{\pi^2 D^{\frac{53}{3}} c^2} + \frac{16Q^2}{2g \pi^2 D^4}$$

$$Q = \sqrt{Y \left(\frac{64 \cdot 4^{\frac{1}{3}} L}{\pi^2 D^{\frac{53}{3}} c^2} + \frac{8}{g \pi^2 D^4} \right)}$$

Esempio 2



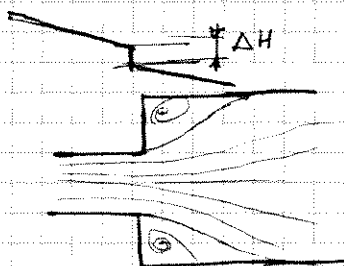
$$S = \Delta \frac{\delta_m - \delta}{\delta}$$

$$S e = S = \Delta \frac{\delta_m - \delta}{\delta} \Rightarrow S = \frac{\Delta}{e} \frac{\delta_m - \delta}{\delta}$$

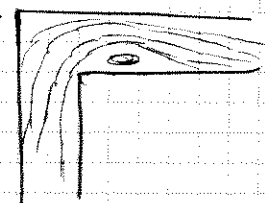
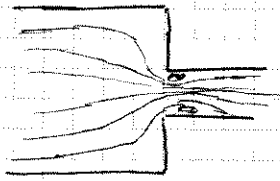
$$S = \lambda \frac{u^2}{2gD} \Rightarrow \lambda = \frac{2gD S \pi^2 D^4}{16Q^2}$$

Quando si disegnammo di Moody e ricaviamo la resistenza.

Perdite di carico localizzate



La corrente subisce una forte perdita di carico.



$$\Delta H = n \frac{u^3}{2g}$$

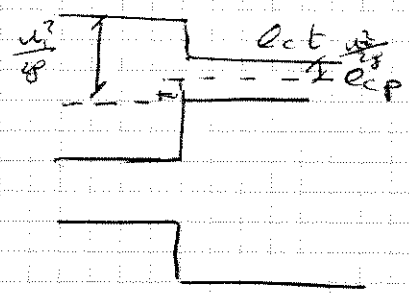
u : termine cinetico e nelle

n si può calcolare solo nel caso di brusco allargamento:

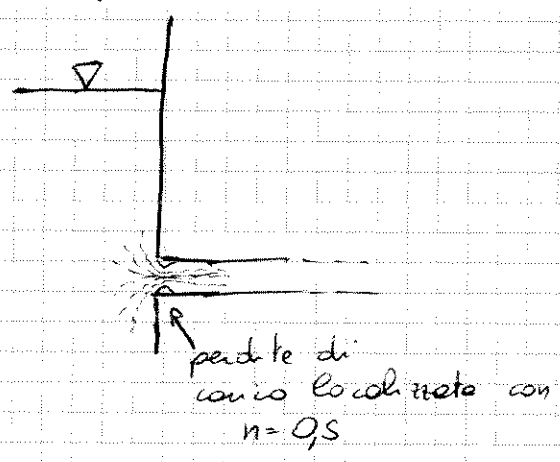
$$\Delta H = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}$$

u_1 : velocità a monte

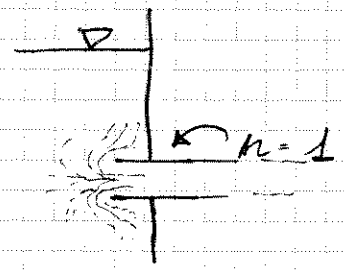
u_2 : velocità a valle.



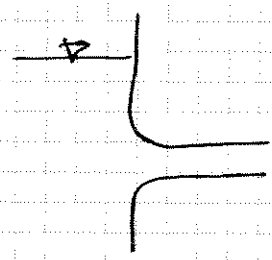
Esempio



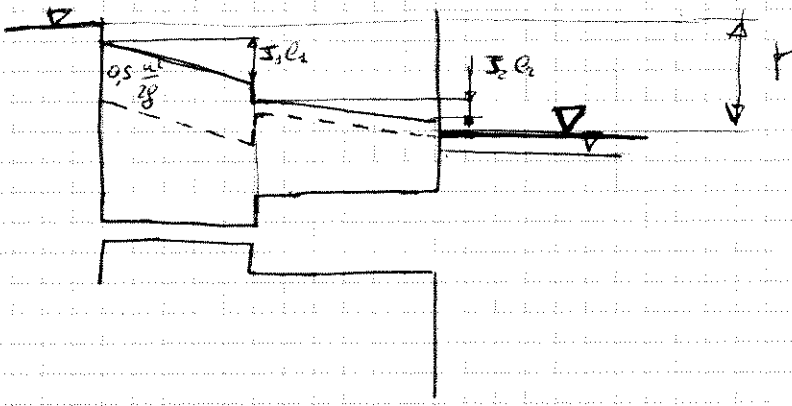
Se l'imbotto è con tubo addizionale



Se l'imbotto è ben raccordato non ha perdite di carico



Esempio



$$Y = 0.5 \frac{u_1^2}{2g} + J_1 l_1 + \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} + J_2 l_2$$

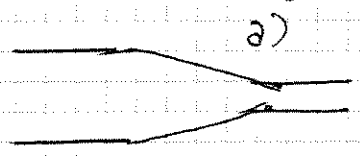
$$J_1 = \beta' \frac{Q^2}{D_1^{5.33}}$$

$$J_2 = \beta' \frac{Q^2}{D_2^{5.33}}$$

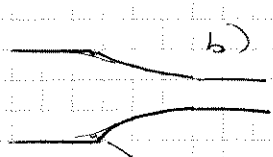
$$u_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2}$$

$$u_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2}$$

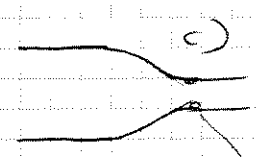
Condotti convergenti:



buono



ottimo



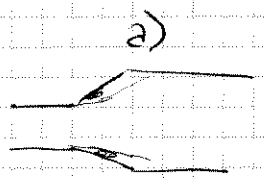
peggiore

valore localizzato dove la velocità è alta

il valore localizzato avviene in un luogo dove la velocità è bassa

- il c) è peggio perché non minimizza né i costi né le perdite di carico
- il d) minimizza i costi
- il b) è un buon compromesso

Anche per questo riguarda i condotti divergenti il condotto b



a)

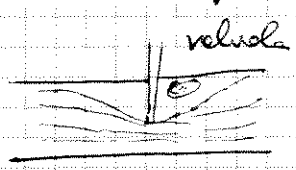


b)

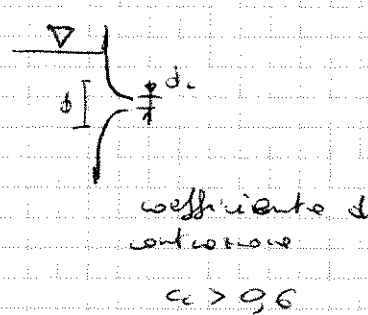
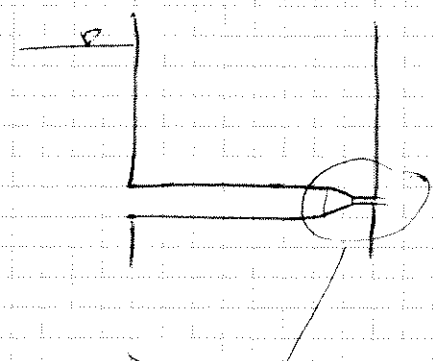
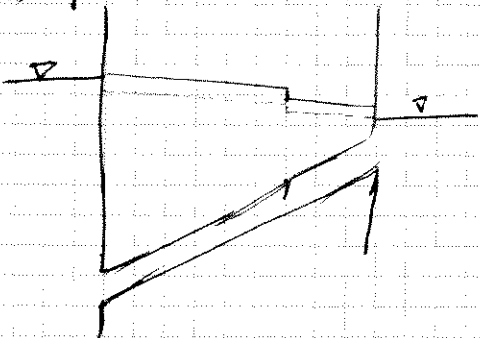
è migliore del condotto a)

a)

A volte si può notare una perdita di carico

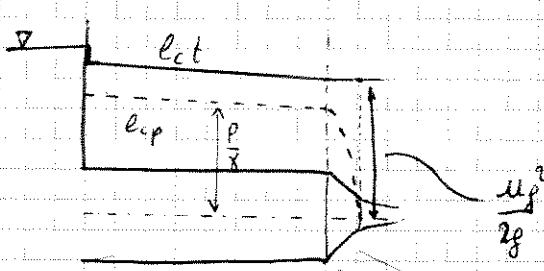


esemp.

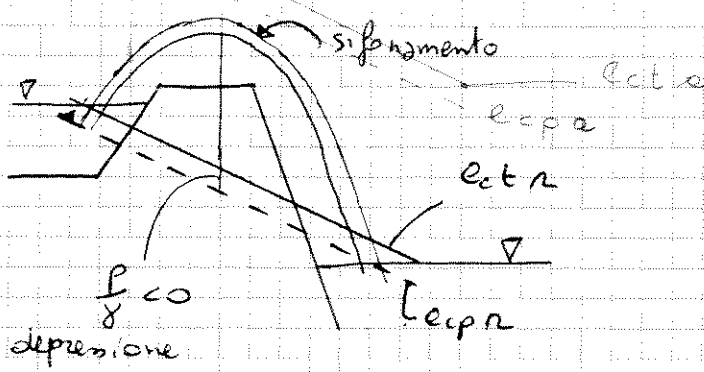


lungo la sezione contratta l'adunato del cono è idrostatico: $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

sezione contratta



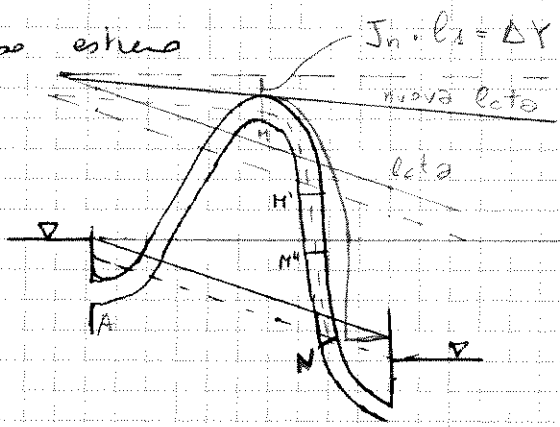
Esempio



Posso tradurre le l_{ct} e l_{cp} in modo da passare dalle relative alle assolute.

Se oltre le condotte sopra le l_{cpa} la c. linea cambia inclinazione e si innalza fino a tornare sopra il tubo. Effetto collaterale: diminuisce la portata.

Caso estremo



l_1 : lunghezza compresa tra A e M

S_n è la nuova perdita di carico

$$S_n l_1 = \beta' \frac{Q_{max}^2}{D^5} l_1 = \Delta Y$$

Q_{max} dipende solo da quota di M e da max portata di po. perlett con Co. condotta

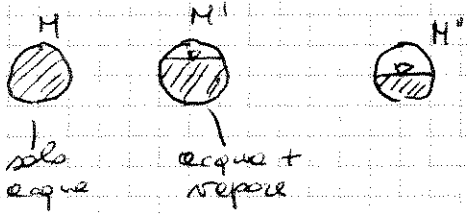
$$\Delta Y = z_0 + \frac{\rho \alpha v_m}{\gamma} - z_n$$

Tra M e N abbiamo pressioni ^{relative} nulle

$$h_{tot} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{cost}$$

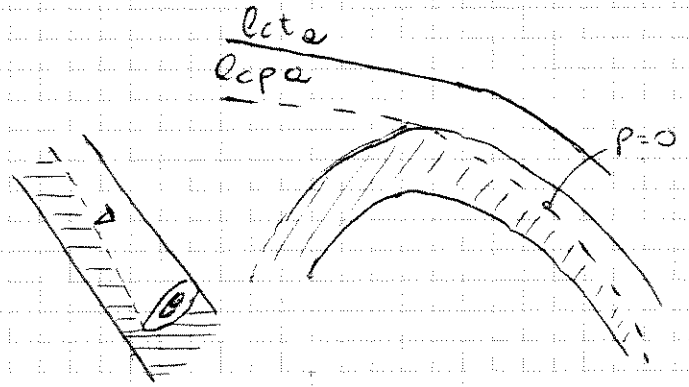
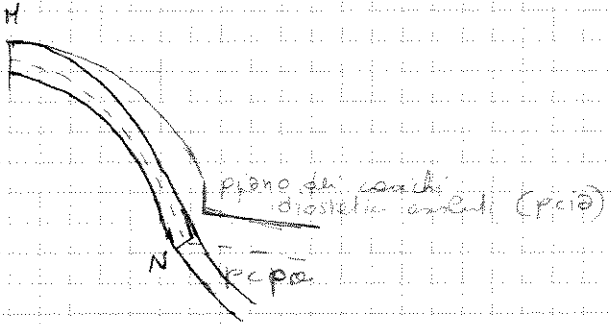
Quindi x e z diminuisce in aumento.

Questo perché si instaura il moto "completto" (vedi figure sottostanti.)

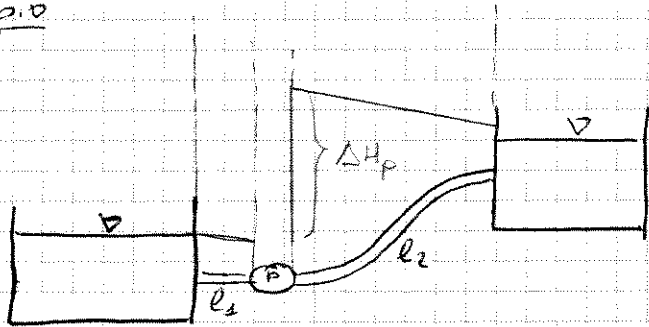


Q rimane costante!!
 Le velocità corrente
 perché

Linea carichi total tra MeN

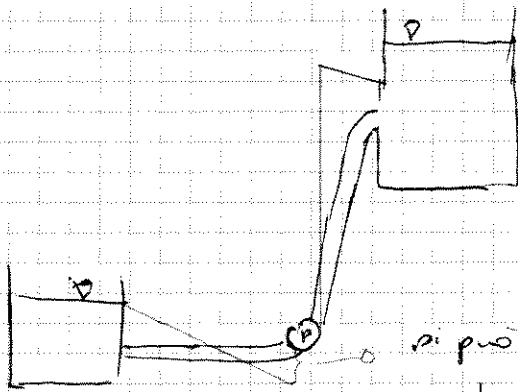


Esempio



ΔH_p prevalenza della pompa

$$(\sum l_1 + \sum l_2 + \Delta H_p) =$$



si può verificare un fenomeno di
 cavitazione, è bene avere la pompa più vicina
 al serbatoio o per non rischiare di rompere la pompa

LUNGHE CONDOTTE

Si parla di lunghe condotte quando $\frac{u^2}{2g} \ll \rho l$. In questo caso si può confondere la linea dei carichi piezometrici con quella dei carichi totali.

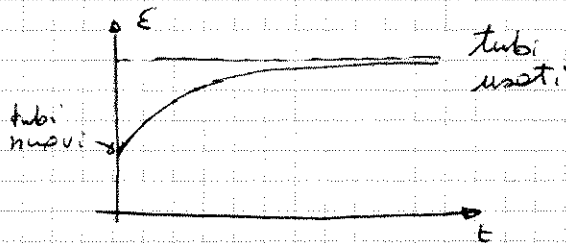
$$\frac{u^2}{2g} < 0,01 \Rightarrow \frac{u^2}{2gD} \ll 1$$

$$\text{Poniamo } L = KD$$

$$L < 0,01 \Rightarrow K > \frac{100}{\lambda}$$

Un valore medio di λ può essere 0,025. Questo implica che $K > 4000$. Quindi se $L > 4000 D$ si può parlare di lunghe condotte.

$$J = \beta \frac{Q^2}{D^5}, \quad n = 5,33$$



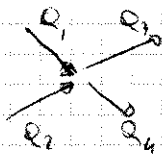
Problemi di verifica

- dati:
- quote dei sifonati
 - geometria (L, D, E)
 - potenze erogate ai nodi

} m colli
n nodi

- incognite:
- m portate Q in ogni collo
 - n portate carichi H in ogni nodo

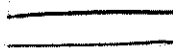
nod:



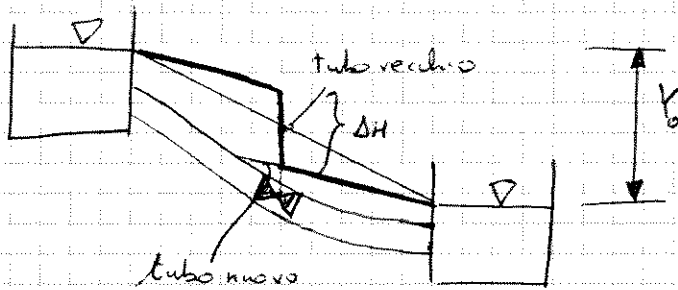
$$\sum Q_e = \sum Q_u$$

e: entranti
u: uscenti

colli:



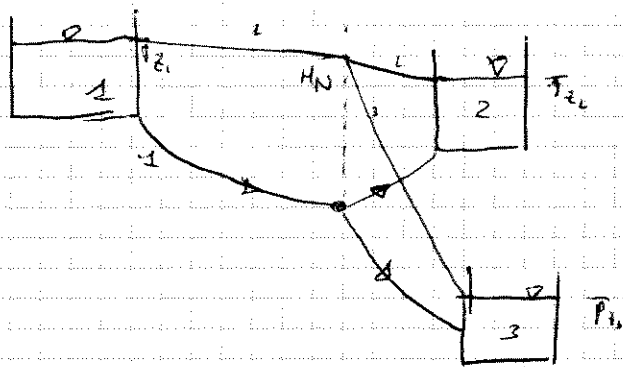
$$\text{colli } \Delta H_i = \beta \frac{Q_i^2}{D_i^5} L_i$$



$$y_0 = \beta \frac{Q^2}{D^5} L$$

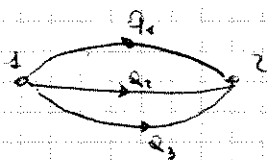
$$Q = \sqrt{\frac{y_0 D^5}{\beta L}}$$

Stesso sistema ma con tubo nuovo fa sì che il moto sia a canaletta. Noi non vogliamo il moto a canaletta quindi si inserisce una valvola. Poiché \$\beta\$ varia nel tempo (in base alla variazione di \$e\$ nei tubi) bisogna regolare la portata che esce per la valvola. Fino ad avere totalmente aperte questo il tubo raggiungerà la sezione di tubo usato.



$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ z_1 - H_n = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^{5.33}} l_1 \\ H_n - z_2 = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^{5.33}} l_2 \\ H_n - z_3 = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^{5.33}} l_3 \end{cases}$$

condotte in parallelo



Nota: \$H_1\$ e \$H_2 \Rightarrow \Delta H\$ vogliamo trovare \$Q_1, Q_2\$ e \$Q_3\$

$$S_i = \beta_i \frac{Q_i^2}{D_i^{5.33}} \quad \Delta H = \sum_i S_i l_i$$

$$Q_i = \sqrt{\frac{\Delta H D_i^{5.33}}{\beta_i l_i}}$$

$$Q = \sum Q_i = \sqrt{\Delta H} \sum \sqrt{\frac{D_i^{5.33}}{\beta_i l_i}}$$

Nota: \$Q_{TOT} \rightarrow Q_i, \Delta H\$

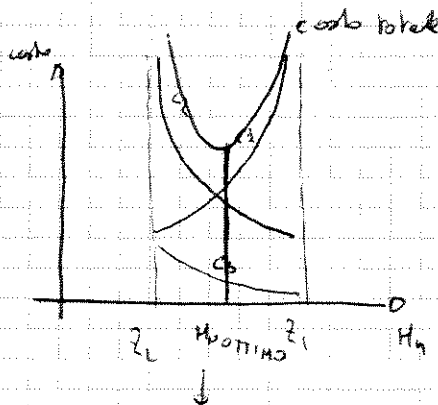
$$Q_T = \sum Q_i$$

$$\frac{\beta_1 Q_1^2}{D_1^{5.33}} l_1 = \frac{\beta_2 Q_2^2}{D_2^{5.33}} l_2$$

Problemi di dimensionamento

Problemi dei 3 esercizi precedente, ma note \$Q\$ portata vogliamo trovare: diametri, e \$H_n\$

$$\begin{cases} z_1 - H_N = \beta_2 \frac{Q_1^2}{D_{S,33}} L_1 \\ H_N - z_1 = \beta_2 \frac{Q_1^2}{D_{S,33}} L_2 \\ H_N - z_3 = \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_{S,33}} L_3 \end{cases}$$



risoluzione di H_N -

La funzione di minimo costo

$$P_c = r C_{im} \quad C_{im} = \text{costo impianto}$$

$$C_{imp} = w_0 + w_1 D^E \quad E = 1,5 + 2$$

q. fissa / quote variabile

$$\sum \frac{r_i \beta_i w_i E_i}{\beta_i Q_i^2 n_i} D_i^{E_{im}} = \sum \frac{z_i \beta_i w_i E_i}{\beta_i Q_i^2 n_i} D_i^{E_{im}}$$

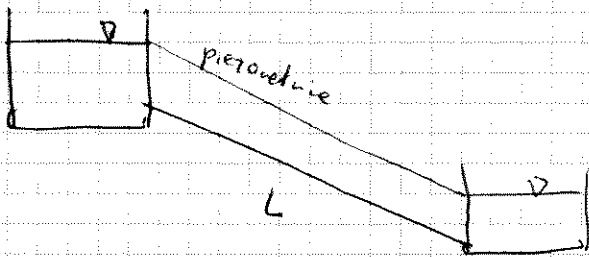
↑ ↑
invarianti usanti

Nel caso delle 3 condotte

$$\frac{D_1^{E_{im}}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{E_{im}}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{E_{im}}}{Q_3^2}$$

E_{im} viene appross a 7.

31/10/11



la linea ha lunghezza L e sezione \varnothing E .
Si ha da

$$z_1 - z_2 = \beta'_n \frac{Q^2}{D_n^{5,33}} L$$

$$D_n = \left(\frac{\beta'_n Q^2 L}{z_1 - z_2} \right)^{\frac{1}{5,33}}$$

Dobbiamo scegliere i diametri presentati in commercio che non sempre sono uguali a D_n . Di solito si prende il diametro maggiore e quello inferiore. Supponiamo $D_1 < D_n < D_2$

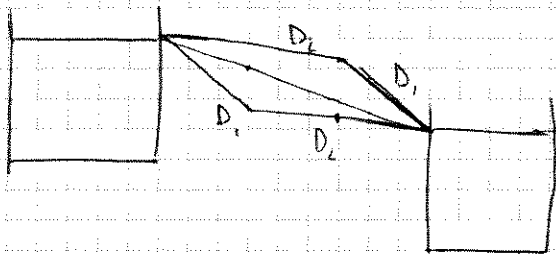
Il diametro $D_1 \Rightarrow S_1 = \frac{Q^2}{D_1^{5,33}} \beta'_n > J$

Il diametro $D_2 \Rightarrow S_2 = \frac{Q^2}{D_2^{5,33}} \beta'_n < J$

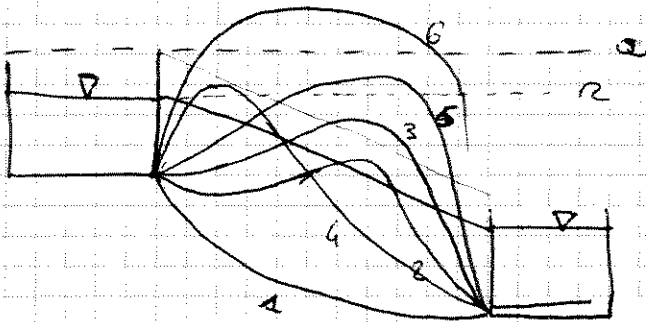
$$\begin{cases} S_1 L_1 + S_2 L_2 = J L = z_1 - z_2 \text{ Condizioni da rispettare} \\ L_1 + L_2 = L \end{cases}$$

Al posto Dobbiamo scegliere se mettere pure e tutto a diametro

inferiore a quella e l'angolo superiore. Dal punto di vista energetico non cambia nulla.



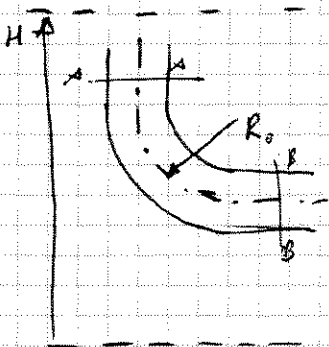
Si tende a scegliere la configurazione con la piezometrica più alta possibile ^{per evitare depressioni}. Se non si verificano condizioni di depressione si preferisce mettere D1 punto di D2.



Analizziamo le condotte:

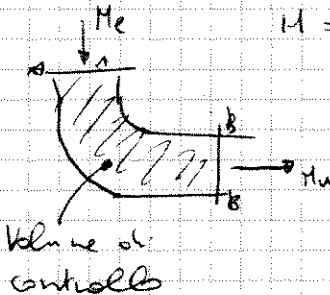
- 1) + semplice non si sa problem' di immissione automatica
- 2) si immette in automatico, la situazione di depressione, no moto completa
- 3) Non ha problem' di immissione, si avrà moto e completa ^{perché supera} _{per le condotte}
- 4) il punto max è sopra e si richiede un immissione ^{non} e poi si avrà moto e completa
- 5) come la 4, ma con moto e completa
- 6) Senza una pompa non può essere moto

Esercizio: condotte forzate

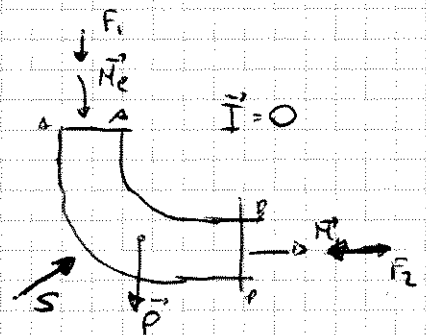


Supponiamo fluido perfetto.

$H = \text{costante}$



$\vec{F}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{S}$



$\vec{P}_t + \vec{F}_c = \vec{M}_e - \vec{M}_n - \vec{I} = 0$

$\Omega_c = C_c \Omega$ in questo caso $C_c = 0,6$

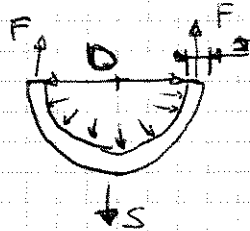
$$\Omega = \Omega_c \mu_c = \sqrt{2gH} \cdot c_c \frac{\pi d^2}{4}$$

$$-\Omega \frac{dH}{dt} = \sqrt{2gH} C_c \frac{\pi d^2}{4}$$

$$H = H_0 \quad \text{in } t = 0$$

$$H = 0 \quad \text{in } t = T$$

Formule di Moriotte



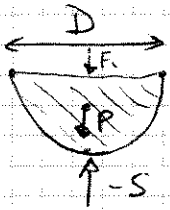
La somma delle pressioni fornisce una spinta sulla parete.

$$S = \int_{\Omega} p \cdot \vec{n} \, d\Omega$$

La spinta deve essere contrastata da due forze F distribuite sulle cunette L della condotta.

$$S = 2\sigma \Delta L = 2F \quad \sigma: \text{ sforzo normale di tensione.}$$

Facciamo riferimento all'eq. globale dello statico



$$\downarrow: \vec{F}_1 + \vec{P} + \vec{S} = 0 \Rightarrow S = -F_1 - P$$

(potenza P trascurabile)

$$S = -F_1$$

$$|S| = |F_1| = p D L = 2\sigma \Delta L \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{pD}{2\Delta}} \text{ Formula di Moriotte}$$

$$\boxed{R_{\min} = \frac{pD}{2\sigma_{\max}}}$$

spessore minimo della condotta per poter sopportare la tensione massima.

MOTO VARIO

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{u^2}{2g}$$

fluido in moto vario

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J \quad \text{se moto permanente}$$

Se il fluido è reale in moto vario:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial H}{\partial t} - J$$

$$\frac{\partial(p\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(pQ)}{\partial s} = 0$$

eq. di continuità

Equazioni semplificate di Allievi

Le equazioni danno origine ad onde elastiche o oscillazioni di marea. Le onde elastiche hanno alta velocità di propag., Sono legate ad onde di pressione e si generano in seguito a variazioni della portata.

Il colpo d'arresto è un'onda elastica.

Le oscillazioni di marea sono caratterizzate da bassa velocità di propag. dell'ordine della velocità media delle correnti, oscillazioni in blocco della colonna d'acqua, sono legate a variazioni del livello nei serbatoi. Se variano il livello c'è variazione di pressione.

Le oscillazioni di marea perdono dopo che il colpo d'arresto si è estinto.

Noi ci occupiamo solo del colpo d'arresto.

Ipotesi di Allievi: - trascuriamo gli attriti

- la velocità di propag. $|c| \gg |u|$

- si trascurano le variazioni di densità dell'acqua con la quota.

$$F(s, t) \quad F(s, t + dt) \quad F(s, t + dt)$$

$$dF = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} ds + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial s} = |c|$$

$$c = - \frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial s} \quad \text{il fatto che } |c| \gg |u| \text{ implica che}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \gg u \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \cdot}{\partial t} \gg u \frac{\partial \cdot}{\partial s}}$$

$$H = h + \frac{u^2}{2g} \quad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = -\rho - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow$$

$= 0 \times 10^6 \text{ ipesi}$

$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \times \text{quello che si è sottosteso}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}} \quad \text{1ª equazione semplificata di Allievi}$$

Consideriamo $\frac{\partial(pR)}{\partial t} + \frac{\partial(pQ)}{\partial s} = 0$ sviluppiamo ed otteniamo

$$\rho \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial R}{\partial s} + Q \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho R \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad Q = R u$$

trascurabile rispetto a $\rho \frac{\partial R}{\partial t} \gg \rho u \frac{\partial R}{\partial s}$ trascurabile rispetto a $\rho R \frac{\partial u}{\partial s}$

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Omega \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad *$$

Analizziamo il termine $\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Ricordiamo che $\frac{dw}{w} = -\frac{1}{E} dp$
 inoltre $\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{\rho}$ da cui si ottiene che

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{E} dp$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{E} \frac{dp}{dt}}$$

Poiché $h = z + \frac{p}{\gamma}$ allora $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dt}$ (considerando $\gamma = \rho g$ costante)

quindi $\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma \Omega \rho}{E} \frac{dh}{dt}$

Analizzando la condotta per la legge di Young si ha che

$$d\sigma = E \frac{dD}{D}$$

$$R = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow dR = \frac{2\pi D dD}{4} = \frac{\pi D}{2} dD$$

$$d\sigma = E \frac{2dR}{\pi D^2}$$

Per la legge di Hooke $\sigma = \frac{pD}{2s} \Rightarrow ds = \frac{D dp}{2s}$ unendo le due equazioni precedenti:

$$dR = \frac{\pi D^2}{2E} \frac{D dp}{2s} = \frac{\Omega D dp}{sE}$$

$$\rho \frac{dR}{dt} = \frac{\rho \Omega D}{sE} \frac{dp}{dt} = \frac{\gamma \rho \Omega D}{sE} \frac{dh}{dt}$$

Da cui sostituendo in * otteniamo

$$\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho D}{sE} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s}$$

Ponendo $a = \frac{\sqrt{E}}{\rho} \sqrt{1 + \frac{ED}{sE}}$ otteniamo

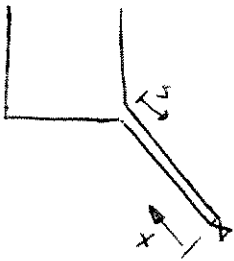
$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s}}$$

Il'equazione semplificata di Allievi.

In precedenza abbiamo visto che: $c = \frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial s} = - \frac{\partial h / \partial t}{\partial h / \partial s} = - \frac{-\frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial s}}{-\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}} =$

$$= -a^2 \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial t} / \frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow c^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{c = \pm a}$$

Utilizzando la notazione seguente le equazioni diventano



$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Derivando la 1^a equazione rispetto a x e la seconda rispetto a t otteniamo e ne facciamo la differenza otteniamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

facendo le cose opposte otteniamo

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Queste sono le equazioni di D'Alembert (equazioni delle corde vibranti)

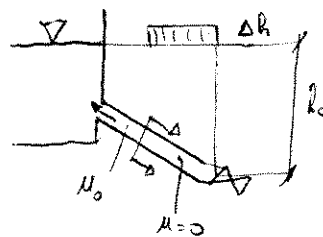
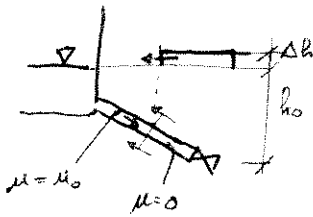
Le condizioni al contorno sono imposte ⁱⁿ ~~alla~~ $x=0$ (all'ottomotore) con

$u(x=0) = \text{costante} \Rightarrow$ riflessione positiva dell'onda

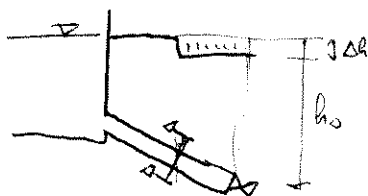
Mentre per $x=l$ (imbocca della condotta) $h = \text{cost.} = h_0 \Rightarrow$ riflessione ^{negativa} dell'onda.

Esempio: $0 < t < \frac{l}{a}$

$\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$

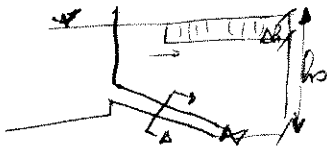


$\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$



fare attenzione perché se $|\Delta h| > 0$ c'è possibilità che le linee dei cammini si intersecano e la condotta e si può avere depressione.

$$\frac{3\ell}{a} < t < \frac{4\ell}{a}$$



Chiamiamo con $\theta = \frac{2\ell}{a}$ il tempo di fase cioè il tempo necessario ad un'onda di percorrere il tragitto otturatore - imbocco e tornare indietro.

Soluzioni delle equazioni di D'Alembert

dalle $y_1 = t - \frac{x}{a}$ e $y_2 = t + \frac{x}{a}$. Sostituendo nella II equazione di D'Alembert otteniamo

$$\frac{\partial h}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 \Rightarrow h - h_0 = F(y_1) + f(y_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)}$$

onde progressive

onde regressive

Si ha che $t_1 + \frac{x_1}{a} = t_2 + \frac{x_2}{a} \Rightarrow x_2 - x_1 = a(t_2 - t_1)$ per l'onda progr.
 $\Delta x = a \Delta t$

Invece per l'onda regressive si ha che $\Delta x = -a \Delta t$

Nota: per $t < \theta$ in $x=0$ ~~si~~ si vede solo l'onda progressiva.

La soluzione della 1^a equazione si trova da $\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x} = v$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = g \left[\frac{\partial F}{\partial y_1} \left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{1}{a}\right) \right] =$$

$$= -\frac{g}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{u - u_0 = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right]}$$

Analizziamo il tempo di chiusura dell'otturatore (τ). Se

- $\tau < \theta$ chiusura brusca

- $\tau > \theta$ chiusura lenta.

Se $\chi < \theta$ noi all'ottimatore per un tempo θ vedremo l'onda progressiva.

avè:

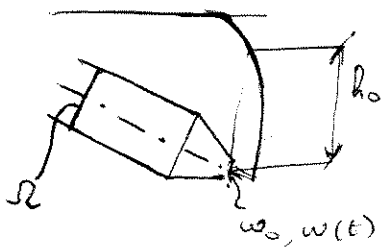
$$\left. \begin{aligned} h-h_0 &= F(t) \\ u-u_0 &= -\frac{g}{c} F(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow h-h_0 = \frac{c}{g} (u_0 - u)$$

Se $u=0$ noi ha il caso peggiore e $\Delta h = \frac{c}{g} u_0 = \Delta p = \frac{\rho a u_0}{1}$

formula di San Kwocky

$$\Delta p \approx 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10 = 10^7 \text{ Pa} = 100 \text{ bar}$$

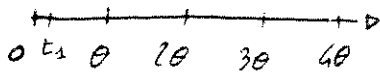
Se $\chi > \theta$



$$\left. \begin{aligned} Q_s &= u_0 \Omega = c_0 \omega_0 \sqrt{2gh_0} \\ Q &= u \Omega = c_0 \omega \sqrt{2gh} \end{aligned} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u}{u_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}} = \eta z$$

$$\text{in } x=l \quad h-h_0 = 0 \Rightarrow h-h_0 = F\left(t-\frac{l}{c}\right) + f\left(t-\frac{l}{c}\right) = 0 \Rightarrow F(T) = -f\left(T+\frac{2l}{c}\right) = -f(T+\theta)$$



$$t_i = t_1 + \theta, t_1 + 2\theta, t_1 + 3\theta, \dots$$

avè all'ottimatore $F(t_i) = -f(t_{i+1})$

In $t=t_1 < \theta$ in $x=0$ vedremo solo l'onda progressiva

$$\left. \begin{aligned} h_1 - h_0 &= F(t_1) = F_1 \\ u_1 - u_0 &= -\frac{g}{c} F(t_1) = -\frac{g}{c} F_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_1 - h_0 = \frac{c}{g} (u_0 - u_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{In } t=t_2 \quad h_2 - h_0 &= F_2 + f_2 = F_2 - F_1 = F_2 - (h_1 - h_0) \Rightarrow F_2 = h_2 + h_1 - 2h_0 \\ u_2 - u_0 &= -\frac{g}{c} (F_2 - f_1) = -\frac{g}{c} (F_2 + F_1) = -\frac{g}{c} (F_2 + h_1 - h_0) = -\frac{g}{c} F_2 + u_1 - u_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 + h_1 - 2h_0 = \frac{c}{g} (u_1 - u_2)$$

generalizzando: $h_{i+1} + h_i - 2h_0 = \frac{c}{g} (u_i - u_{i+1})$

$$\frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} - 2 = \frac{c}{g} \frac{u_0}{h_0} \left(\frac{u_i}{u_0} - \frac{u_{i+1}}{u_0} \right)$$

$$\boxed{z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2AE (u_i z_i - u_{i+1} z_{i+1})}, \quad AE = \frac{c u_0}{2g h_0}$$

Equazioni concatenate di Allievi

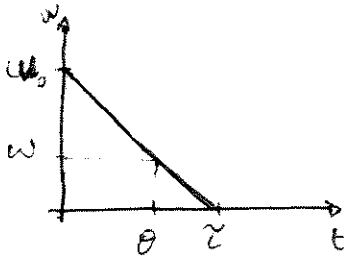
Note per $t > \tau$ allora $\eta = 0$ cioè

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{h_{i+1} + h_i}{2} = h_0}$$

cioè ho una oscillazione con media h_0

Formule di Allievi-Michoud



Ipotesi: massimo sovraccarico per $t = \theta$

$$\frac{w_0 - w}{w_0} = \frac{\theta}{\tau} \Rightarrow 1 - \frac{w}{w_0} = \frac{\theta}{\tau}$$

$$h_{\max} - h_0 = \frac{\rho}{\gamma} (w_0 - w) = \frac{\rho}{\gamma} w_0 \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) = \frac{\rho w_0}{\gamma} \left(1 - \frac{\theta}{\tau}\right)$$

$$\Delta h_{\max} = h_{\max} - h_0 \leftarrow \frac{\rho w_0}{\gamma} \left(1 - \frac{\theta}{\tau}\right) = \frac{\rho w_0}{\gamma} \frac{\theta}{\tau} = \boxed{\frac{\rho_0 \cdot 2\ell}{\gamma \tau}}$$

$$\Delta p_{\max} = \gamma \Delta h_{\max} = 2 \frac{\rho \mu_0 \ell}{\tau} \approx \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^2}{10} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Formule di Allievi-Michoud

ordine 1 bar

Il motivo per cui esistono i pozzi-pietrometri è dovuto al fatto che diminuiscono le lunghezze delle condotte e di conseguenza è possibile interrompere la condotta in poco tempo con basse sovrappressioni.

Se voglio calcolare $\Delta h(x, t)$ devo ricavare $F(x, t)$ e $f(x, t)$. Ricordiamo che

$$h_1 - h_0 = F_1 = F(0, t_1) \quad h_2 - h_0 = F_2 - F_1 = 0 \quad F(0, t_2) = f(0, t_1) + h_2 - h_0$$

$$\text{inoltre } f(0, t) = -F(0, t - \theta)$$

$$\text{Noti questi valori: } F(x, t) = F\left(0, t - \frac{x}{a}\right)$$

$$f(x, t) = f\left(0, t + \frac{x}{a}\right)$$

Esercizio (fotoscopa)