$\vec{F_c} + \vec{M_1} - \vec{M_2} = 0$

Dato che la portata entrante ha velocità diretta verticalmente, $\vec{M_1} = \vec{M}_{IN} = 0$ in quanto non ha componente lungo l'asse x.

L'unica forza al contorno presente è la reazione di efflusso $S = \gamma H \Omega$.

$\vec{M_2} = \vec{M}_{OUT} = \rho Q u = \rho C_c \Omega \sqrt{2gH} \cdot \sqrt{2gH} = \rho C_c \Omega 2gH$.

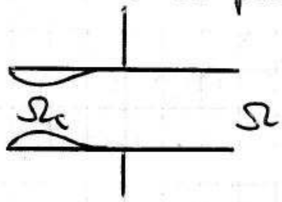
Quindi l'equilibrio risulta: $\vec{F_c} = \vec{M}_{OUT} \Leftrightarrow \vec{S} = \vec{M}_{OUT}$ cioè:

$$\gamma H \Omega = \rho C_c \Omega 2gH$$

da cui $C_c = 0{,}5$.

E la portata effluente è $\frac{1}{2}\Omega\sqrt{2gH}$.

→ Efflusso a bocca piena



In questo caso $C_c = 1$.

Nuovamente considero un moto permanente con immissione dall'alto di una portata pari a quella effluente.

$$\vec{I} = 0 \,, \quad \vec{M_1} = \vec{M}_{IN} = 0$$

L'unica azione sul contorno è la reazione di efflusso: $\vec{F_c} = S = \gamma H \Omega$.

$\vec{M_2} = \vec{M}_{OUT} = \rho Q u = \rho \Omega u^2$

L'equilibrio risulta: $\vec{F_c} = \vec{M}_{OUT} \Leftrightarrow \gamma H \Omega = \rho \Omega u^2$

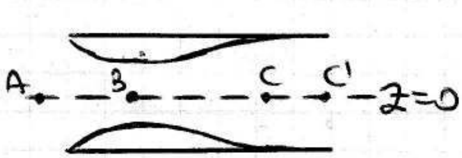
da cui $u^2 = \frac{\gamma H}{\rho} = gH$. Quindi la velocità di efflusso è $u = \sqrt{gH}$.

Il coefficiente correttivo C_v è pari a:

$$u = \sqrt{gH} = C_v \cdot \sqrt{2gH} \Rightarrow C_v = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La portata effluente è: $Q = C_c \cdot C_v \cdot \Omega \cdot \sqrt{2gH} = 0{,}707\,\Omega\sqrt{2gH}$

→ Perdite di carico per l'efflusso a bocca piena



In C': $\begin{cases} p = p_{atm} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow H_c = \frac{u^2}{2g}$

carico totale nella sezione di efflusso in atmosfera,

dove $u^2 = gH$, quindi $H_c = \frac{H}{2}$ con $H = H_A$ carico totale disponibile a monte della sezione contratta.

La perdita di carico tra B e C è

$$\Delta H = H_A - H_C = H - \frac{H}{2} = \frac{H}{2}.$$

Riferiamo tale perdita ad una quota del termine cinetico. Definisco:

$$\Delta H = \xi \frac{u^2}{2g} \Rightarrow \xi = \frac{\Delta H}{\frac{u^2}{2g}}$$

In questo caso: $\Delta H = \frac{H}{2}$ e $u^2 = gH$. Quindi $\xi = \frac{\frac{H}{2}}{\frac{H}{2}} = 1.$

Poiché la portata deve essere costante, per l'equazione di continuità si ha:

$$Q_B = Q_C \Rightarrow u_c \Omega_c = u \cdot \Omega \Rightarrow u_c \cdot C_c \cdot \Omega = u \cdot \Omega$$

poiché $C_c = 0{,}5$ si ottiene $u_c = 2u$ Velocità nella sezione contratta.

Applicando il teorema di Bernoulli tra il pelo libero del serbatoio e la sezione contratta si trova:

$$H = \cancel{z} + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} \qquad \text{ove} \quad u_c = 2u = 2(\sqrt{gH})$$

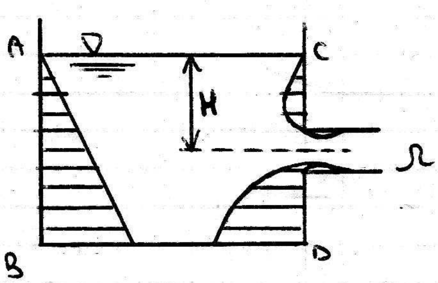
$$H = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{4u^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{2u^2}{g} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{2gH}{g} = \frac{p_B}{\gamma} + 2H$$

Quindi la pressione nella sezione contratta è:

$$\frac{p_B}{\gamma} = H - 2H = -H$$

cioè si ha una depressione pari al carico di monte (al massimo può valere −10,33 m di colonna d'acqua, se il fluido è acqua).

- TUBO ADDIZIONALE ESTERNO



$$Q = 0{,}815\, \Omega \sqrt{2gH} \quad \text{è la portata effluente}$$

con $C_c = 1$ e $C_v = 0{,}815$

Le perdite di carico sono

$$\Delta H = H - \frac{u^2}{2g} = H - \frac{(0{,}815)^2\, 2gH}{2g} = H - 0{,}664\, H$$

In termini di carico totale: $\Delta H = 0{,}34\, H$.

In termini di ALTEZZA CINETICA $\Delta H = \xi \frac{u^2}{2g} = 0{,}34\, H \Rightarrow \xi = \frac{0{,}34\, H}{0{,}664\, H} \cong 0{,}5$

La depressione nella sezione contratta vale, ponendo $C_c = 0,61$.

$$\mu = \mu_c \cdot C_c \Rightarrow \mu_c = \frac{\mu}{C_c} = \sqrt{1,75}\sqrt{2gH}$$

$$H = \cancel{z} + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\mu_c^2}{2g}$$

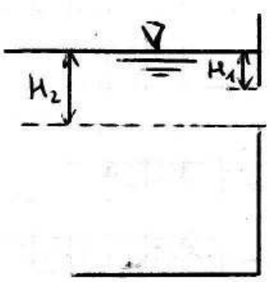
$$\frac{p_c}{\gamma} = H - 1,75\,H = -0,75\,H$$

- LUCI A STRAMAZZO

→ Stramazzo Bazin

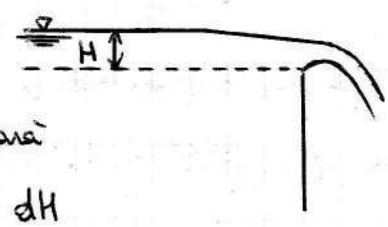
Si definisce H = CARICO DELLO STRAMAZZO il dislivello fra il bordo inferiore della luce e la quota del pelo dell'acqua nel canale di arrivo, misurata ad una distanza tale da poter considerare nulla la chiamata di sbocco. L'equazione dello stramazzo è del tipo $Q = f(H)$.

Assimiliamo lo stramazzo ad una luce a battente, con battente eliminato:



la portata defluente sarà

$$Q = C_c C_v L \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{2gH}\, dH$$



dove L = LUNGHEZZA DELLO STRAMAZZO (trasversale). Si ricava $Q = \frac{2}{3} C_c C_v L \sqrt{2g}\left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2}\right)$.

Ponendo $H_1 = 0$ e considerando un valore sperimentale del COEFFICIENTE DI EFFLUSSO $C_c \cdot C_v = 0,64$ si ottiene:

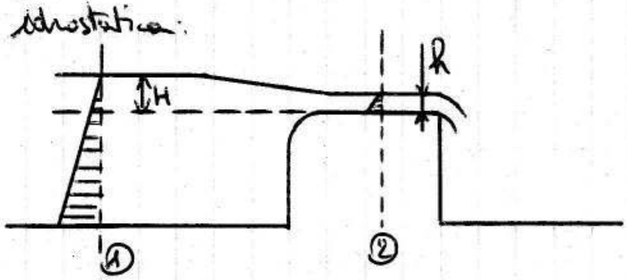
$$Q = 0,42 \cdot L \cdot H \cdot \sqrt{2gH} \qquad \text{con } H = H_2.$$

Durante il suo moto la vena tende a portare via l'aria che si trova sotto di essa, e quindi tende ad avvicinarsi alla parete esterna dello stramazzo (vena depressa) oppure ad aderirvi (vena aderente). Per questo motivo si costruiscono gli aerofori, tubi che hanno il compito di addurre aria alla zona sottostante la vena in modo tale da mantenerla sempre aerata. Se riempio di cemento il volume d'aria sotto la vena ottengo lo STRAMAZZO KREAGER.

→ Stramazzo in parete grossa (Belanger)

Applico il teorema di Bernoulli in una sezione sufficientemente lontana dallo stramazzo, a monte, in cui quindi le pressioni variano con legge idrostatica. Applico nuovamente il

Bernoulli in una sezione posta nel mezzo della soglia, in cui le pressioni variano con legge idrostatica:



$$\begin{cases} H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} \\ H_2 = h + \frac{v_2^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow H_1 = H_2 = H$$

$$H = h + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(H-h)}$$

E la portata vale $Q = L \cdot h \sqrt{2g(H-h)}$

h è definita PROFONDITÀ CRITICA e vale $\frac{2}{3}H$

Si ricava quindi $v_2 = 0{,}577\sqrt{2gH}$ e

$$Q = 0{,}385\, L H \sqrt{2gH}$$

• EQUAZIONI DEL MOTO DI FLUIDI REALI

→ Equazione indefinita di equilibrio del moto di un fluido viscoso (Navier – Stokes)

Consideriamo il fluido viscoso: $\tau \neq 0 = \mu \frac{du}{dz}$, σ funzioni lineari della velocità di deformazione. L'equazione di Eulero viene riscritta nel seguente modo:

$$\rho(\vec{R} - \vec{a}) = \text{grad}\,p - \mu \nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3}\mu\, \text{grad div}\, \vec{v}$$

Se il fluido è incomprimibile μ = costante:

$$\rho(\vec{R} - \vec{a}) = \text{grad}\,p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

che è l'Equazione di Navier-Stokes, dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

→ Equazione globale di equilibrio dinamico di un fluido viscoso

L'equilibrio dinamico di un fluido viscoso è indipendente dalle azioni viscose che si esercitano all'interno del volume considerato, ma è legato unicamente alla risultante degli sforzi tangenziali agenti sulle superficie di contorno $\vec{\vec{T}}$.

Nasce quindi un termine aggiuntivo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$-\mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \, d\Omega$$

lungo la direzione del moto.

L'equazione si scrive nuovamente nella forma $\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{I} + \vec{M_1} - \vec{M_2} = 0$. In questo caso però $\vec{F_c} = \vec{N} + \vec{T}$ cioè è la risultante della somma vettoriale della risultante degli sforzi normali $\vec{N}$ (dovuti alla pressione) e della risultante delle azioni di trascinamento - o di attrito $\vec{T}$ dirette lungo la direzione del moto.

Dal punto di vista energetico: il liquido perfetto ha carico totale $H =$ costante, quindi la linea dei carichi total è orizzontale e, in caso di moto uniforme, anche la linea dei carichi piezometrici è parallela alla linea dei carichi totali e distante da essa di $\frac{u^2}{2g}$. Per il liquido reale, invece, si nota come la linea dei carichi totali risulti inclinata a causa della dissipazione di energia dovuta agli sforzi tangenziali. Quindi vi sono variazioni del carico piezometrico anche in caso di moto uniforme. Si definisce CADENTE PIEZOMETRICA o PENDENZA MOTRICE il termine

$$i = -\frac{dh}{ds}$$

- TRASCINAMENTO E RESISTENZA AL MOTO

Consideriamo un fluido viscoso in moto in un cilindro di raggio r. Se consideriamo l'equilibrio di un cilindretto di questo fluido possiamo dire, se esso è inclinato di α rispetto a x:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{I} + \vec{M_1} - \vec{M_2} = 0$$

dove $P = \gamma \cdot L \cdot \pi r^2$ ($L\pi r^2$ è il volume del cilindretto alto L)

$I = 0$ moto permanente o uniforme

$M_1 - M_2 = 0$ entra una certa portata ad una data velocità ed esce la stessa portata alla medesima velocità

$$\vec{N} = \vec{S_1} - \vec{S_2} = p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2$$

$$\vec{T} = \mu \frac{du}{dr} \cdot 2\pi r L$$

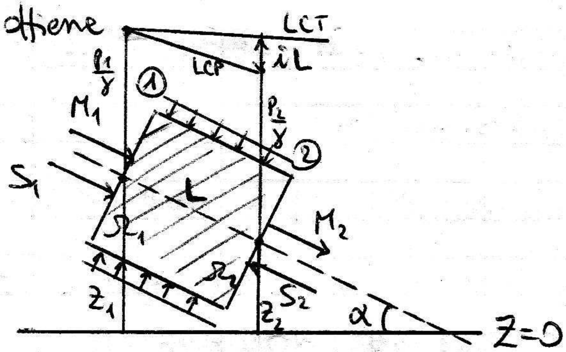
Quindi $\vec{P} + \vec{N} = -\vec{T}$

$$\gamma \pi r^2 L \sin\alpha + p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2 = -\mu \frac{du}{dr} 2\pi r L$$

poiché $L \sin\alpha = z_1 - z_2$ si ha

$$\frac{\gamma \Omega \left(z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right)}{2\pi r L} = -\mu \frac{du}{dr}$$

e sostituendo $h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma}$ e $h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$ si ottiene



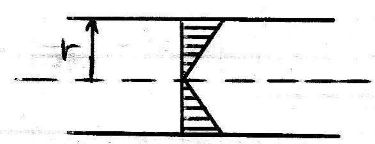
$$\frac{\gamma \Omega}{2\pi r} \frac{h_1 - h_2}{L} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Dato che $i = \frac{h_1 - h_2}{L}$ possiamo dire

$$\frac{r}{2} \gamma i = -\mu \frac{du}{dr}$$

da cui si ricava la legge di variazione lineare della tensione tangenziale in funzione del raggio del condotto circolare:

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} i.$$



Si definisce $R_i = \frac{r}{2}$ il RAGGIO IDRAULICO che è dato dal rapporto tra la sezione di passaggio e il contorno bagnato.

• MOTO LAMINARE

Nel moto laminare $u \neq 0$, $v = w = 0$. È sempre valida la relazione $\tau = \gamma \cdot \frac{r}{2} i$. Le traiettorie delle particelle fluide sono rette parallele alle generatrici del condotto.

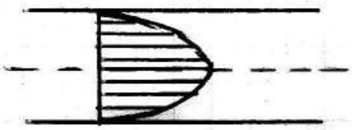
Dallo studio dell'equilibrio di un cilindretto di fluido viscoso in moto permanente laminare si è ricavato $\frac{r}{2} \gamma i = -\mu \frac{du}{dr}$. Separando le variabili e integrando si ha:

$\frac{1}{4} \frac{\gamma i}{\mu} r^2 = -u + C$ dove C è la costante di integrazione. Imponendo la condizione al contorno, cioè che $u = 0$ per $r = R$, raggio del condotto, si ottiene

$$C = -\frac{\gamma i R^2}{4\mu}.$$

La distribuzione di velocità all'interno del cilindretto segue una legge di variazione di tipo parabolico: $u = C\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)$

e si ha $u = 0$ per $r = R$ e $u_{max} = \frac{\gamma i R^2}{4\mu}$ per $r = 0$ cioè sull'asse.



La velocità media è: $u_m = \frac{1}{2} u_{max} = \frac{\gamma i R^2}{8\mu} = \frac{\gamma i D^2}{32\mu}$

da cui la cadente piezometrica di un fluido in moto laminare all'interno di un condotto cilindrico di diametro D è:

$$i = \frac{32\,\mu\, u_m}{\gamma D^2}$$

La portata, in funzione del diametro, risulta:

$$Q = \int_\Omega u\, d\Omega = \frac{\gamma i \pi R^4}{8\mu} = \frac{\pi}{128} \frac{\gamma i}{\mu} D^4$$ FORMULA DI POISEUILLE

La cadente piezometrica e la portata sono legate dalla seguente legge:

$$u_m = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} \Rightarrow i = \frac{32\,\mu\, u_m}{\gamma D^2} = \frac{128\,\mu\, Q}{\gamma \pi D^4}$$

Quindi la cadente piezometrica è inversamente proporzionale al diametro alla quarta. Pertanto le PERDITE DISTRIBUITE i L aumentano al diminuire del diametro.

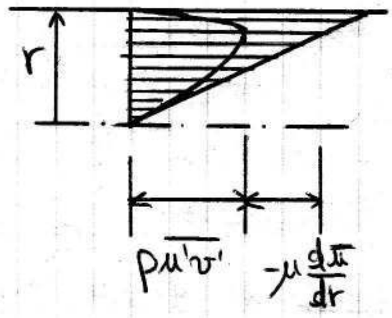
• MOTO UNIFORME TURBOLENTO

Nel moto uniforme turbolento la resistenza $\vec{\tau}$ è data dalla somma di un contributo di tipo viscoso e di un contributo di tipo turbolento, dovuto ai continui scambi di quantità di moto tra le particelle. Lo sforzo tangenziale unitario risulta:

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} i = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'}$$

ed è massimo sulle pareti del condotto, nullo sull'asse. $\overline{u'v'}$ è il prodotto medio delle componenti di sola agitazione della velocità.

Per velocità ridotte il termine turbolento è nullo e il moto è laminare. Per velocità elevate di un fluido in un condotto circolare, il termine turbolento prevale in tutto il volume, ad eccezione dello STRATO LIMITE VISCOSO adiacente alle pareti del condotto, in cui il termine viscoso è sempre dominante.



Quello appena descritto si definisce MOTO TURBOLENTO DI TRANSIZIONE, per cui vale

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} + \rho\overline{u'v'}$$

Si chiama MOTO ASSOLUTAMENTE TURBOLENTO il moto in cui gli sforzi tangenziali di tipo turbolento sono tali da poter trascurare sempre gli sforzi viscosi, quindi vale:

$$\tau = \rho\overline{u'v'}$$

- INDICE DI RESISTENZA λ

È il rapporto adimensionale tra una perdita distribuita di un tratto di tubazione di lunghezza pari al diametro e un termine cinetico generico:

$$\lambda = \frac{i \cdot D}{\frac{u_m^2}{2g}}$$

- ESPRESSIONE DI DARCY-WEISBACH

Si ricava dall'espressione dell'indice di resistenza λ:

$$i = \frac{u_m^2}{2g \cdot D}\lambda .$$

In caso di condotto circolare si sa che $i = \frac{32\mu u_m}{\gamma D^2}$, pertanto:

$$\lambda = \frac{D}{\frac{u_m^2}{2g}}\frac{32\mu u_m}{\gamma D^2} = \frac{64}{\frac{\rho u_m D}{\mu}} .$$

- NUMERO DI REYNOLDS

Si chiama numero di Reynolds il seguente:

$$R_e = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

• INDICI DI RESISTENZA PER GEOMETRIE COMUNI

→ Condotto circolare

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

→ Condotto rettangolare largo

$$\lambda = \frac{96}{Re}$$

• UTILIZZO DEL NUMERO DI REYNOLDS

È il rapporto tra le forze inerziali e le forze viscose ed è un indice del grado di turbolenza a cui è assoggettato il fluido. In particolare, per un condotto circolare, si ha il primo insorgere di turbolenza per $Re = 2000$.

Pertanto se $Re < 2000$ il moto è laminare. Se $Re \geq 2000$ il moto è turbolento.

• RAGGIO IDRAULICO

È definito come il rapporto tra la superficie bagnata e il perimetro bagnato.

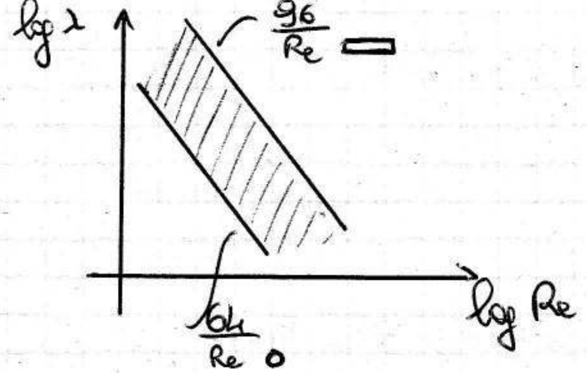
Per una sezione rettangolare larga vale $R_i = \frac{h}{2}$. Per una sezione circolare vale $R_i = \frac{r}{2} = \frac{D}{4}$.

Si definisce DIAMETRO EQUIVALENTE per una sezione rettangolare larga il termine:

$$\frac{D}{4} = \frac{h}{2} \Rightarrow D_e = 2h.$$

La sezione migliore da utilizzare è quindi la sezione circolare, che minimizza il perimetro a parità di area della sezione. Il raggio idraulico permette di indicare quindi la migliore fra le sezioni possibili per far defluire una data portata.

Nel diagramma bilogaritmico $\lambda = f(Re)$ tutte le sezioni che non appartengono alla striscia compresa tra le due rette sono da scartare perché sono caratterizzate da perdite troppo elevate.



• MOTO TURBOLENTO

Il moto turbolento è caratterizzato anche dalla presenza di uno strato di fluido di spessore δ aderente alle pareti che ingloba del tutto o in parte le asperità della condotta. Tale strato si chiama STRATO LIMITE LAMINARE poiché il fluido ivi contenuto si muove di moto laminare. Lo spessore δ di tale strato diminuisce all'aumentare del numero di Reynolds: per Re piccolo lo strato limite ingloba completamente le asperità del tubo e quindi la SCABREZZA non influenza il moto turbolento; per Re grande lo strato limite non riesce ad inglobare completamente le asperità del tubo e allora la scabrezza del tubo influenza il moto turbolento. Nel primo caso si parla di TUBI IDRAULICAMENTE LISCI, nel secondo di TUBI IDRAULICAMENTE SCABRI.

→ Tubi idraulicamente lisci

Considerando un moto turbolento di transizione, cioè per $2000 \le Re \le 10^5$, la cadente piezometrica di un tubo liscio percorso da un fluido è

$$i = \frac{h_A - h_B}{L} = \frac{\delta}{L}$$

dove $h_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma}$ all'imbocco del tubo e $h_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$ al termine del tubo. $\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$ è data da un manometro differenziale con γ_m noto posto tra ingresso e uscita del tubo. Il tubo è percorso da una certa portata Q, misurata con uno stramazzo, avente velocità media $u_m = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}$ e quindi $Re = \frac{\rho u_m D}{\mu}$.

Si può calcolare l'indice $\lambda = \frac{D i}{\frac{u_m^2}{2g}}$.

Si nota che tutti i valori ottenuti sono distribuiti secondo la seguente funzione:

$$\lambda = 0{,}316 \cdot Re^{-0{,}25}$$ INDICE DI RESISTENZA λ PER TUBI LISCI

che è la FORMULA DI BLASIUS.

Da essa si ricava $i = \lambda \frac{v^2}{2gD} = \text{costante} \cdot \frac{v^{1{,}75}}{D^{1{,}25}}$.

Un'altra espressione è la FORMULA DI PRANDTL-VON KARMAN per i tubi lisci: