Lungo i tre assi si ottiene:

$$\begin{cases} \rho X(dx\,dy\,dz) - \dfrac{\partial p}{\partial x}(dx\,dy\,dz) = dm\, a_x \\ \rho Y(dx\,dy\,dz) - \dfrac{\partial p}{\partial y}(dx\,dy\,dz) = dm\, a_y \\ \rho Z(dx\,dy\,dz) - \dfrac{\partial p}{\partial z}(dx\,dy\,dz) = dm\, a_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho \dfrac{Du}{Dt} \\ \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho \dfrac{Dv}{Dt} \\ \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho \dfrac{Dw}{Dt} \end{cases}$$

che in forma vettoriale può essere scritta come:

$$\rho(\vec{R} - \vec{a}) = \text{grad}\, p \qquad \text{EQUAZIONE DI EULERO}$$

che considera solo SFORZI NORMALI.

• TEOREMA DI BERNOULLI

Ipotesi del teorema:

- fluido perfetto, cioè assenza di sforzi tangenziali;
- fluido pesante, cioè soggetto alla sola forza di massa che deriva dal campo gravitazionale;
- fluido incomprimibile, cioè ρ = costante;
- moto permanente.

L'equazione di Eulero afferma che $\rho(\vec{R}-\vec{a}) = \text{grad}\, p$ dove $\vec{R} = -g\, \text{grad}\, z$. Quindi
$\rho\vec{R} - \rho\vec{a} = \text{grad}\, p \Rightarrow -\text{grad}(\gamma z) - \text{grad}\, p = \rho\vec{a} \Rightarrow \text{grad}(\gamma z + p) = -\rho\vec{a}$
da cui si ottiene $\text{grad}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{\vec{a}}{g}$ che ci dice che LA VARIAZIONE DEL CARICO PIEZOMETRICO È UGUALE AL RAPPORTO CAMBIATO DI SEGNO TRA L'ACCELERAZIONE DEL FLUIDO E L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ.

Il teorema di Bernoulli è valido lungo una traiettoria, quindi consideriamo le componenti dell'accelerazione:

- tangenziale $a_s = a_t = \dfrac{dv}{dt}$;
- normale $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ con r = raggio di curvatura;
- binormale $a_b = 0$.

Si ottiene quindi dalla $\text{grad}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{\vec{a}}{g}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{1}{g}\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{1}{g}\vec{a}_s \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{v^2}{gr} \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

Sviluppando la derivata euleriana $\vec{a}_s = \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial u_s}{\partial t} + u_s\dfrac{\partial u_s}{\partial s} + u_n\dfrac{\partial u_n}{\partial n} + u_b\dfrac{\partial u_b}{\partial b}$

e ponendo $u_b = u_n = 0$ si ottiene

$$\vec{a}_s = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u_s^2}{2}\right)$$

Quindi sostituendo nel sistema precedente e inglobando le derivate si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u_s^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial u_s}{\partial t}$$

dove $\dfrac{u_s^2}{2g}$ è un'energia cinetica specifica per unità di peso

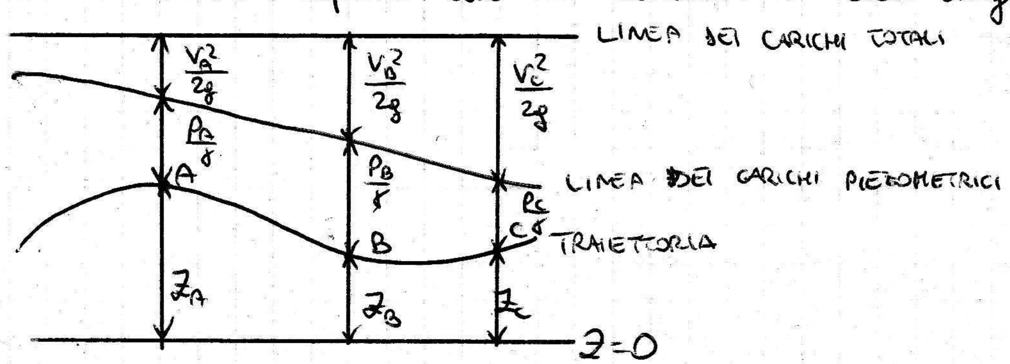
Ponendo $u_s = V$ = velocità del fluido lungo una traiettoria:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}+\dfrac{V^2}{2g}\right) = -\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{V^2}{gr} \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\left(z+\dfrac{p}{\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione, ricordando le ipotesi del teorema, si ricava:

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g} = H = \text{costante}$$

che è il TEOREMA DI BERNOULLI. Esso afferma che NEL MOTO PERMANENTE DI UN FLUIDO PERFETTO PESANTE INCOMPRIMIBILE IL CARICO TOTALE SI MANTIENE COSTANTE LUNGO OGNI TRAIETTORIA. Esprime cioè la conservazione dell'energia.



z = energia di posizione

$\dfrac{p}{\gamma}$ = energia di pressione

$\dfrac{V^2}{2g}$ = energia cinetica

Si dicono:

z = quota geodetica o geometrica

$\frac{p}{\gamma}$ = altezza piezometrica

$\frac{v^2}{2g}$ = altezza cinetica

H = carico totale

$h = z + \frac{p}{\gamma}$ = carico piezometrico

Se il moto considerato NON FOSSE PERMANENTE, allora si dovrebbe scrivere

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}$$

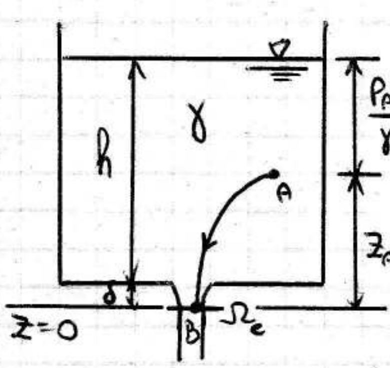
cioè la legge di variazione del carico totale.

• LUCI

Si definisce luce un foro aperto nella parete o sul fondo di un recipiente. Si definisce luce a battente una luce costruita in modo da trovarsi sempre al di sotto del pelo libero, si chiama luce a stramazzo una luce il cui bordo superiore non è lambito dal fluido.

• LUCE DI FONDO

La SEZIONE CONTRATTA è la prima sezione trasversale della corrente dove tutte le traiettorie risultano parallele fra loro. È caratterizzata da un'area minore di quella della luce ed è tipicamente posta ad una distanza di circa $\delta = \frac{1}{2} d$ dal piano della luce stessa, dove d è il diametro della luce.



$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = \cancel{z_B} + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}} + \frac{v_B^2}{2g} = \text{costante}$$

$v_A = 0$ (particella ferma)

$p_B = 0$ (a contatto con l'atmosfera)

$z_B = 0$ (pongo l'asse $z=0$ all'altezza di B)

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow \delta + h = \frac{v_B^2}{2g}$$

trascurando $\delta \ll h$ si ha:

$$v_B = \sqrt{2gh}$$ FORMULA DI TORRICELLI

che è la VELOCITÀ DI EFFLUSSO.

La portata effluente è $Q = v_B \cdot \Omega_c$.

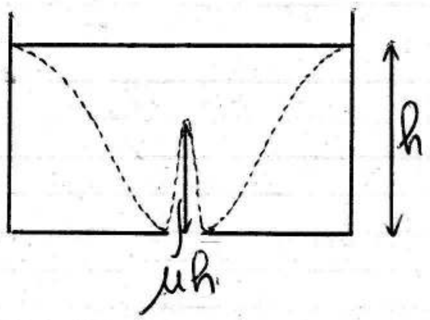
Introducendo un coefficiente di velocità C_v che tiene conto del fatto che la velocità di efflusso calcolata è maggiore di quella effettiva, $C_v = 0{,}98 = \frac{v_{eff}}{v_B}$, e un coefficiente di contrazione C_c che tiene conto che $\Omega_c < \Omega_{luce} = \frac{\pi d^2}{4}$, $C_c = 0{,}61 = \frac{\Omega_c}{\Omega_{luce}}$

allora

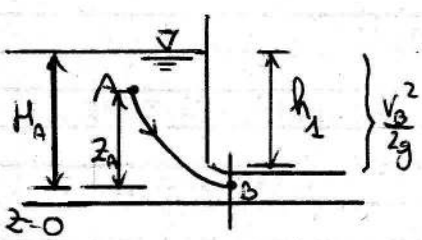
$$Q = C_v \cdot v_B \cdot \Omega_c = C_v \cdot v_B \cdot C_c \Omega_l = \Omega_l C_c C_v \sqrt{2gh} = \Omega_l \mu \sqrt{2gh}$$

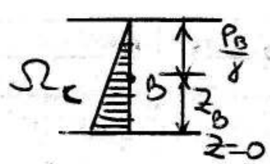
dove $\mu = C_c \cdot C_v \cong 0{,}6$.

Il diagramma delle pressioni è



• PARATOIA A BATTENTE





$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$h_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} \quad ; \quad C_c \cdot d = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

$$h_A = C_c \cdot d + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$v_B = \sqrt{(H - C_c \cdot d)\, 2g}$$

$$Q = C_c \cdot C_v \cdot \Omega_l \sqrt{2g(H - C_c \cdot d)} = \mu \Omega_l \sqrt{2g(H - C_c \cdot d)}$$

• LUCI IN PARETE VERTICALE

→ fessura

Assumiamo valida per tutta la sezione di uscita un valore medio di velocità pari a $V_m = \sqrt{2g h_m}$ dove h_m è il carico piezometrico nel baricentro della luce.

$Q = C_c \cdot \Omega_L \sqrt{2g h_m}$ con $C_c \cong 0{,}61$.

→ luce di grande dimensione

Non vale l'assunzione fatta per la fessura. La velocità torricelliana è definibile per ogni elemento $d\Omega_L$ della luce per cui vale $(d\Omega_L = b \cdot dh)$

$d Q = C_c \cdot b \cdot dh \sqrt{2gh}$ e quindi $Q = \int_{h_1}^{h_2} C_c \cdot b \cdot \sqrt{2gh}\, dh$.

Si ottiene $Q = \frac{2}{3} C_c \cdot b \sqrt{2g} \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right)$ con $C_c \cong 0{,}61$.

Se si tiene conto anche della velocità di arrivo:

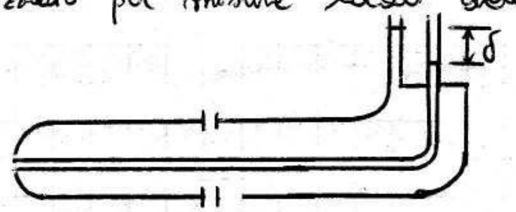
$$V = \sqrt{2g\left(h + \frac{V_0^2}{2g}\right)} \Rightarrow Q = \frac{2}{3} C_c\, b \sqrt{2g} \left[\left(h_2 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h_1 + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

• LUCE IN PARETE VERTICALE CON VENA SOMMERSA

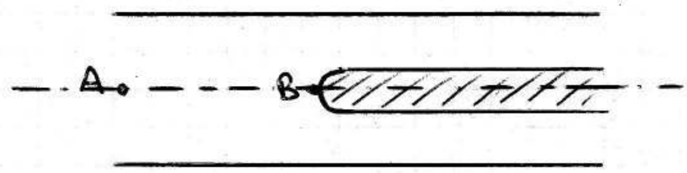
Esiste sempre la sezione contratta. La pressione segue la distribuzione idrostatica. Vale sempre la formula della velocità teorica torricelliana: $V_B = \sqrt{2gh}$.

• TUBO DI PITOT

È un dispositivo utilizzato per misure locali della velocità di un fluido:



Lo schema di riferimento è il seguente:



B = punto di ristagno ⇒ $V_B = 0$

A: non influenzato dal corpo

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \cancel{\frac{V_B^2}{2g}} \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = h_B - h_A = \delta \Rightarrow V_A = \sqrt{2g\delta}.$$

• ESTENSIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI AD UNA CORRENTE

Si definisce **CORRENTE** una massa di fluido caratterizzata dal fatto che tutte le traiettorie hanno pressoché la stessa direzione. Nel moto permanente la corrente coincide con i tubi di flusso. Nel moto vario, invece, questa uguaglianza non è verificata.

Consideriamo una sezione Ω_s interessata dalla corrente. È necessario definire una velocità media valida per tutta la sezione, in quanto le velocità hanno distribuzione non uniforme all'interno di una sezione di una corrente fluida. Se ipotizziamo che i filetti fluidi siano tutti RETTILINEI e PARALLELI possiamo estendere il teorema di Bernoulli anche alle correnti:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{u_m^2}{2g}$$

dove α = COEFFICIENTE DI CORIOLIS (ragguaglio della potenza cinetica) e $u_m = \dfrac{Q}{\Omega_s}$.

Consideriamo una sezione trasversale ad una corrente, ortogonale in ogni punto al vettore velocità. La portata elementare è $dQ = u\, d\Omega$ e quindi la portata complessiva risulta $Q = \int_\Omega u\, d\Omega$.

Si definisce POTENZA DI UNA CORRENTE l'energia che la corrente fa passare attraverso una generica sezione nell'unità di tempo. La potenza elementare di un filetto fluido di corrente è $dW = \gamma\, dQ\, H$ dove γdQ è il peso del liquido che attraversa la sezione nell'unità di tempo e H è l'energia meccanica del fluido per unità di peso.

La potenza complessiva è $W = \gamma \int_\Omega u H\, d\Omega = \gamma \int_\Omega u \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) d\Omega$ e si può affermare che NEL MOTO PERMANENTE DI UNA CORRENTE DI UN FLUIDO PERFETTO INCOMPRIMIBILE LA POTENZA SI MANTIENE COSTANTE ASSUMENDO LO STESSO VALORE IN TUTTE LE SUCCESSIVE SEZIONI TRASVERSALI.

Dall'integrale si ricava:

$$W = \gamma \int_\Omega u \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\Omega + \gamma \int_\Omega \frac{u^3}{2g}\, d\Omega$$

dove $\gamma \int_\Omega u \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\Omega = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q$ è un termine di potenza legato all'energia potenziale ricavato sull'ipotesi di filetti rettilinei e paralleli con $z + \frac{p}{\gamma}$ = costante

$\gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega = W_c$ è la POTENZA CINETICA della corrente.

Introducendo la velocità media: $W_c = \gamma \frac{u_m^3}{2g} \Omega \int_{\Omega} \frac{u^3}{u_m^3 \Omega} d\Omega = \gamma \frac{u_m^3}{2g} \Omega \cdot \alpha = \gamma \alpha \frac{u_m^2}{2g} Q$

dove α è il coefficiente di Coriolis.

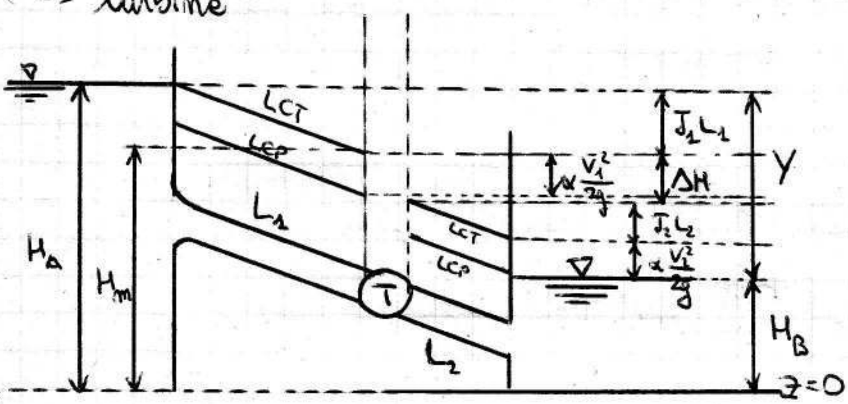
Riassumendo $W = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q + \gamma \alpha \frac{u_m^2}{2g} Q = \gamma H Q$

e $\alpha = \dfrac{\gamma \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega}{\gamma \frac{u_m^3}{2g} \Omega}$.

Nel moto laminare $\alpha = 2$; nel moto turbolento $\alpha \cong 1$ $(1{,}03 \div 1{,}04)$.

- SCAMBI DI ENERGIA TRA CORRENTE E MACCHINA

→ turbine



$Y = H_A - H_B$ SALTO NOMINALE O DISPONIBILE

J_1, J_2 = CADENTE PIEZOMETRICA

$\Delta H = H_m - \left(H_B + \alpha \frac{V_2^2}{2g} + J_2 L_2\right)$ = SALTO UTILE

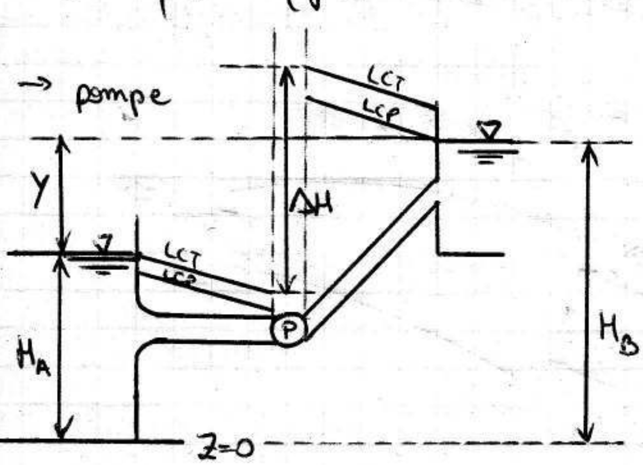
$H_m = H_A - J_1 L_1$ CARICO EFFETTIVO DI MONTE

$P_t = \gamma Q \Delta H$ POTENZA CEDUTA dalla corrente alla macchina T.

$P_d = \gamma Q Y$ POTENZA NOMINALE o POTENZA DISPONIBILE dell'impianto

$P_e = \eta P_t = \eta \gamma Q \Delta H$ POTENZA EFFETTIVA prodotta dalla macchina $(\eta = 0{,}9)$

→ pompe



IMPIANTO DI SOLLEVAMENTO

$Y = H_B - H_A$ dislivello da superare

ΔH: salto che la pompa deve effettivamente vincere (dimensionamento)

P_e = potenza ricevuta dal motore

P_t = potenza totale ceduta alla corrente $= \gamma Q \Delta H$

$(\eta = 0{,}75 \div 0{,}85)$

$$\eta = \frac{\gamma Q \Delta H}{P_e}$$

Si ricava $P = \eta \gamma Q \Delta H$ PREVALENZA della pompa

La cadente piezometrica è una perdita per unità di lunghezza.

• EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

L'equazione di Eulero $\rho(\vec{R} - \vec{a}) = \text{grad}\, p$ è una equazione locale. Integrandola in un volume finito si ottiene una equazione globale:

$$\int_V \rho \vec{R}\, dV - \int_V \rho \vec{a}\, dV = \int_V \text{grad}\, p\, dV$$

dove $\vec{P} = \int_V \rho \vec{R}\, dV$ e $\vec{F_c} = \int_V \text{grad}\, p\, dV$. Quindi

$$\vec{P} + \vec{F_c} - \rho \int_V \vec{a}\, dV = 0$$

Che, sviluppando l'accelerazione nei termini locale e convettivi, porta a dire:

$$-\int_V \rho \vec{a}\, dV = \rho \int_\Omega \vec{u} \cdot u_n\, d\Omega - \rho \int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\, dV$$

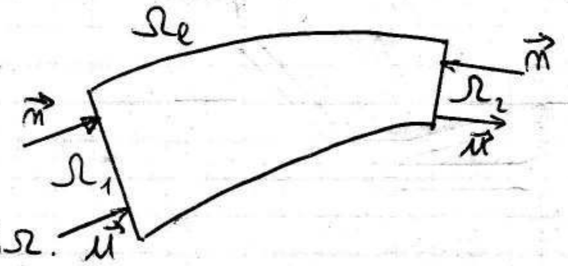
applicando il LEMMA DI GAUSS, dove $u_n = u \cos \hat{nx} + v \cos \hat{ny} + w \cos \hat{nz}$.

Posso scrivere che la portata elementare che fluisce attraverso l'area infinitesima $d\Omega$ è

$$dQ = u_n\, d\Omega.$$

Definisco $M = \int_\Omega \rho \vec{u}\, u_n\, d\Omega$ la QUANTITÀ DI MOTO di tutta la massa fluida che attraversa nell'unità di tempo la superficie Ω di contorno del volume V.

Dato che il vettore velocità è sempre parallelo alla superficie laterale Ω_e, non dà contributo. Allora



$$M = \int_\Omega \rho \vec{u}\, u_n\, d\Omega = \rho \int_{\Omega_1} \vec{u}\, u_n\, d\Omega + \rho \int_{\Omega_2} \vec{u}\, u_n\, d\Omega.$$

Definiamo

$$M_1 = \rho \int_{\Omega_1} \vec{u}\, u_n\, d\Omega > 0 \quad \text{e} \quad M_2 = \rho \int_{\Omega_2} \vec{u}\, u_n\, d\Omega < 0$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = \beta \rho Q u_m \quad \text{dove } \beta \cong 1, \; \beta = \frac{\rho \int_\Omega u^2 d\Omega}{\rho Q u_m}$$

con $\rho \int_\Omega u^2 d\Omega$ l'effettiva quantità di moto e $\rho Q u_m$ una quantità di moto di una corrente di eguale portata, ma con ρ e u costanti in ogni punto e pari ai rispettivi valori medi.

Infine, definiamo $\vec{I} = -\rho \int_V \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV$.

Si ottiene l'EQUAZIONE GLOBALE DI EQUILIBRIO DINAMICO:

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M} + \vec{I} = \vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \vec{I} = 0$$

Per qualunque volume V di fluido in movimento, è nulla la risultante delle forze di massa $\vec{P}$, delle spinte $\vec{F_c}$ esercitata dall'esterno sulla superficie di contorno, delle inerzie locali $\vec{I}$, della quantità di moto $\vec{M}_1$ posseduta dalla massa entrante nel volume nell'unità di tempo e della quantità di moto $\vec{M}_2$ (cambiata di segno) posseduta dalla massa uscente.

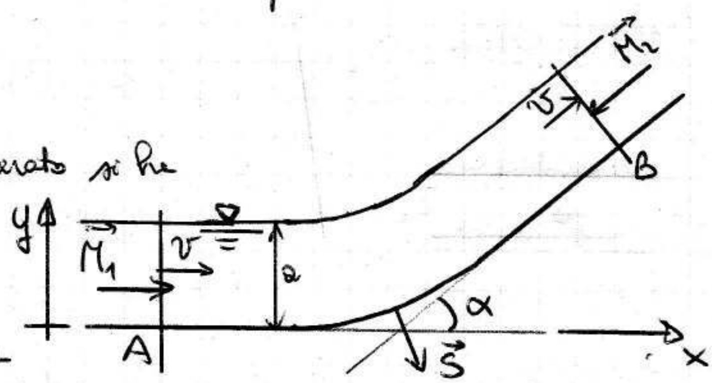
In moto permanente $I = 0$.

• SPINTE DINAMICHE

→ spinta di un getto su una piastra

Applichiamo l'equazione globale di equilibrio dinamico in moto permanente:

$$\vec{P} + \vec{F_c} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0$$



Trascurando il peso del volume fluido considerato si ha

$$-\vec{F_c} = \vec{S} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2$$

Dato che non esistono dissipazioni di energia

$$|\vec{M}_1| = |\vec{M}_2| = \rho q v$$

dove $q = a \cdot v$ è la portata unitaria del getto.

Scompongo lungo le direzioni x e y:

$$\vec{M}_{1x} = \vec{M}_1 = \rho q v$$

$$\begin{cases} M_{2x} = M_2 \cos\alpha = \rho q v \cos\alpha \\ M_{2y} = M_2 \sin\alpha = \rho q v \sin\alpha \end{cases}$$

L'equilibrio lungo i due assi porta a dire:

$$x): \quad |\vec{M}_1 - \vec{M}_{2x}| = \rho q v (1-\cos\alpha)$$

$$y): \quad |\vec{M}_{2y}| = \rho q v \sin\alpha$$

Poichè $S^2 = M_x^2 + M_y^2$ (teorema di Pitagora) si ricava

$$S^2 = \rho^2 q^2 v^2 \left[(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\right]$$

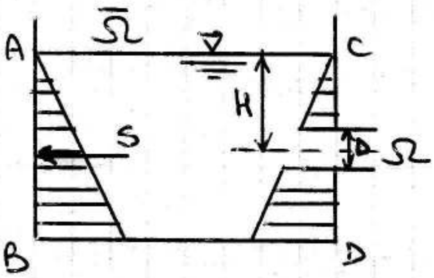
e infine

$$S = \rho q v \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = \rho q v \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

e ha direzione inclinata di $\beta = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$.

Il massimo della spinta si ha per $\alpha = 180°$: $S_{max} = 2\rho q v$.

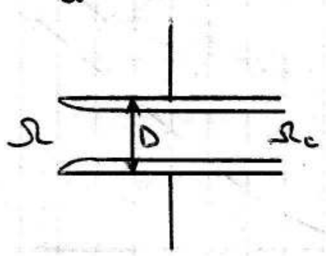
- TUBO ADDIZIONALE INTERNO (TUBO DI BORDA)



$S = \gamma H \Omega$ REAZIONE DI EFFLUSSO

Ipotizziamo $\Omega \ll \bar{\Omega}$; $H \gg D$; fluido perfetto; moto permanente.

→ Efflusso libero



La velocità di efflusso è torricelliana:

$$u = \sqrt{2gH}$$

attraverso la sezione contratta $\Omega_c = C_c \cdot \Omega$.

La portata effluente è $Q = \Omega_c \cdot u = C_c \cdot \Omega \sqrt{2gH}$.

Applico l'equazione globale di equilibrio dinamico per calcolare C_c. Dato che il moto è permanente, $\vec{I} = 0$, e immetto una portata di fluido identica alla portata effluente.

$$\cancel{\vec{P}} + \vec{F_c} + \cancel{\vec{I}} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 = 0$$

Se proietto l'equazione sull'asse orizzontale, $\vec{P} = 0$. Allora possiamo dire: