Integrando su tutta la superficie ottengo la SPINTA:

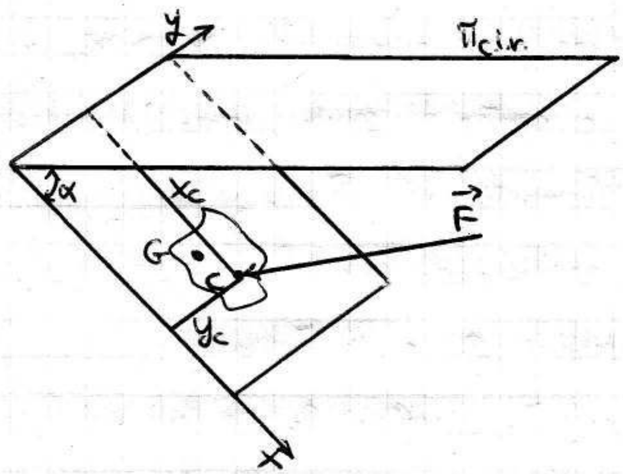
$$\vec{F} = \gamma \sin\alpha \, \vec{n} \int_\Omega x \, d\Omega = \vec{n} \gamma \sin\alpha \, x_G \cdot \Omega = \vec{n} \gamma h_G \Omega$$

dove $M_y = \int_\Omega x \, d\Omega$ è il MOMENTO STATICO DELLA SUPERFICIE RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA

e γh_G è la PRESSIONE NEL BARICENTRO DELLA SUPERFICIE (h_G = AFFONDAMENTO DEL BARICENTRO)

La SPINTA SU DI UNA SUPERFICIE PIANA è quindi una forza diretta normalmente alla superficie stessa con modulo pari al prodotto della pressione nel suo baricentro per l'area della sua superficie.

La spinta è applicata nel CENTRO DI SPINTA, di coordinate x_c e y_c.



$$F = |\vec{F}| = \gamma h_G \Omega = \gamma \sin\alpha \, x_G \Omega$$

Il momento di $\vec{F}$ rispetto all'asse y vale $M_{F,y} = F \cdot x_c = \gamma \sin\alpha \, x_G \Omega \cdot x_c$ e il momento di $d\vec{F}$ rispetto all'asse y vale $(dM)_y = \gamma \sin\alpha \, x \, d\Omega \cdot x = \gamma \sin\alpha \, x^2 d\Omega$.

Integrando su Ω si ottiene $M_y = \gamma \sin\alpha \int_\Omega x^2 d\Omega = \gamma \sin\alpha \, I_y$ dove I_y è il MOMENTO DI INERZIA DELLA SEZIONE Ω RISPETTO ALL'ASSE y.

Uguagliando le due espressioni si trova

$$\cancel{\gamma \sin\alpha} \, x_G \Omega x_c = \cancel{\gamma \sin\alpha} \, I_y$$

da cui $x_c = \dfrac{I_y}{x_G \cdot \Omega} = \dfrac{I_y}{S_y}$

dove S_y è il MOMENTO STATICO DELLA SUPERFICIE RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA.

Il momento di $\vec{F}$ rispetto all'asse x vale $M_{F,x} = F \cdot y_c = \gamma \sin\alpha \, x_G \Omega \cdot y_c$ e il momento di $d\vec{F}$ rispetto all'asse x vale $(dM)_x = \gamma \sin\alpha \, x \, d\Omega \, y$. Integrando su Ω si ottiene $M_x = \gamma \sin\alpha \int_\Omega xy \, d\Omega = \gamma \sin\alpha \, I_{xy}$ dove I_{xy} è il MOMENTO CENTRIFUGO DELLA SUPERFICIE Ω RISPETTO A x E y. Uguagliando le due espressioni si trova

$$\cancel{\gamma \sin\alpha}\, x_G \, \Omega \, y_C = \cancel{\gamma \sin\alpha}\, I_{xy}$$

da cui $y_C = \dfrac{I_{xy}}{x_G \Omega} = \dfrac{I_{xy}}{S_y}$.

Se la figura Ω presentasse un asse di simmetria secondo una linea di massima pendenza, allora si verifica che $y_G = y_C$. Se introduciamo il TEOREMA DI HUYGENS si deduce che $I_y = I_{y,0} + \Omega x_G^2$, dove $I_{y,0}$ è il MOMENTO DI INERZIA DELLA SUPERFICIE RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO PARALLELO ALLA LINEA DI SPONDA, e si ricava che $x_C > x_G$ in qualunque situazione. L'unico caso in cui baricentro e centro di spinta sono coincidenti è quello di una superficie Ω disposta <u>parallelamente</u> al $\Pi_{c.i.r.}$.

Dalle formule di determinazione del centro di spinta si nota che è INDIPENDENTE dall'angolo α di incidenza tra la giacitura della superficie Ω e il $\Pi_{c.i.r.}$.

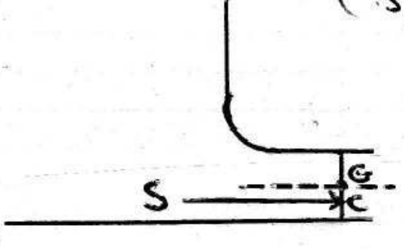
Se la superficie considerata ha il baricentro sul $\Pi_{c.i.r.}$ allora la spinta su di essa è nulla, il centro di spinta tende ad ∞ e si genera una coppia che fa ruotare la superficie attorno all'asse baricentrico.

· Considerando una superficie rettangolare con due lati paralleli alla linea di sponda si ha che la spinta è applicata nel BARICENTRO DEL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI cioè a una x_c pari a $\frac{2}{3}$ dell'altezza totale: $x_c = \frac{2}{3} b$

• VALVOLA A FARFALLA

La spinta sulla valvola è $S = \gamma h_G \Omega$. Il momento della spinta rispetto all'asse della valvola è:

$$(M_S)_G = S \cdot \overline{GC} = \gamma \cancel{h_G \Omega} \frac{I_{y,0}}{\cancel{h_G \Omega}} = \gamma \cdot I_{y,0}$$

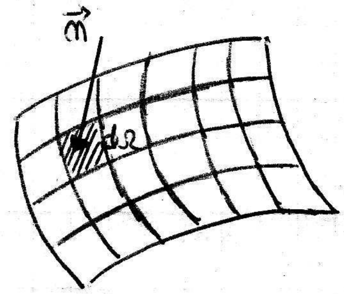


così la spinta S genera una coppia INDIPENDENTE DALL'AFFONDAMENTO h_G DEL BARICENTRO!

• SPINTE SU SUPERFICI CURVE

La spinta agente su ogni elemento $d\Omega$ della superficie curva è data da

$$d\vec{F} = p\, d\Omega\, \vec{n} = \gamma h\, d\Omega\, \vec{n}$$



e la spinta totale è

$$\vec{F} = \int_\Omega p\, d\Omega\, \vec{n}.$$

Risolviamo il problema in un altro modo. Determiniamo l'equazione globale di equilibrio. L'equazione indefinita della statica dei fluidi può essere espressa come $\rho\vec{R} = \text{grad}\, p$. Questa relazione è valida per ogni elemento infinitesimo di liquido, pertanto possiamo scrivere $\rho\vec{R}\, dV = \text{grad}\, p\, dV$. Nel campo della gravità $\vec{R} = \vec{g}$ e quindi, essendo ρdV la massa del volumetto infinitesimo, $\vec{g} \cdot \rho \cdot dV$ è il peso del volumetto infinitesimo. Il peso totale di tutto il liquido è $\vec{G} = \int_V \vec{g} \rho\, dV$.

Per il TEOREMA DEL GRADIENTE

$$\vec{G} = \int_V \vec{g}\rho\, dV = -\int_\Omega p\vec{n}\, d\Omega$$

ove $\vec{n}$ è il versore normale ENTRANTE nella superficie. In definitiva vale:

$$\vec{G} + \int_\Omega p\vec{n}\, d\Omega = 0$$

cioè sul volume considerato si fanno equilibrio le forze di massa $\vec{G}$ e tutte le forze superficiali $\vec{F_c}$ agenti sul contorno che delimita il volumetto stesso.

L'EQUAZIONE GLOBALE DI EQUILIBRIO FLUIDOSTATICO recita

$$\vec{G} + \vec{F_c} = 0.$$

Applicando questa equazione è possibile determinare la spinta agente su di una superficie curva. In generale $\vec{F_c}$ è la risultante di una forza verticale, una forza orizzontale e degli eventuali momenti (coppie) applicati.

• METODO DELLE COMPONENTI

È utile quando le geometrie sono complesse.

La spinta elementare $d\vec{S} = p\vec{n}\, dA$ può essere scomposta in componenti lungo i 3 assi coordinati cartesiani nel seguente modo:

$$dS_x = p\, dA_x$$
$$dS_y = p\, dA_y$$
$$dS_z = p\, dA_z$$

dove dA_x, dA_y, dA_z sono le proiezioni dell'elemento di superficie dA.

In totale si ricava

$$S_x = \int_{A_x} p\, dA_x = \gamma h_x A_x$$
$$S_y = \int_{A_y} p\, dA_y = \gamma h_y A_y$$
$$S_z = \int_{A_z} p\, dA_z = \gamma h_z A_z = \gamma \cdot \text{Volume}$$ = peso della colonna di liquido sovrastante la superficie curva A

dove S_x e S_y sono le componenti orizzontali della spinta totale, applicate nei rispettivi centri di spinta, in generale non complanari;

h_x e h_y sono gli affondamenti dei baricentri delle superfici piane A_x e A_y al di sotto del $\pi_{cir.}$;

S_z è la componente verticale di spinta ed è pari al peso del volume di liquido che sovrasta la superficie curva (colonna d'acqua).

Le tre componenti di forze possono essere ricondotte a due forze nel seguente modo:

$$\begin{cases} S_{ORIZ} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \\ S_{VERT} = S_z \end{cases}$$ in modulo.

• FLUIDI DI PICCOLO PESO SPECIFICO

Per questi fluidi, dato il loro piccolo peso specifico, la pressione $(p = \gamma h)$ è assunta COSTANTE ed INDIPENDENTE DALLA QUOTA.

La spinta su di una superficie piana è pari al prodotto della pressione per l'area della superficie ed è applicata nel baricentro della superficie.

La spinta su di una superficie curva è pari alla composizione delle tre spinte, due orizzontali e una verticale, sulle tre proiezioni della superficie lungo le tre direzioni degli assi cartesiani coordinati. Ciascuna spinta ha modulo pari al prodotto della pressione per l'area della proiezione (piana) ed è applicata nel baricentro della proiezione.

• FORMULA DI MARIOTTE

Sezioniamo un tubo con un piano diametrale. Definiamo s lo spessore del tubo e dL il tratto considerato. Le due sezioni del tubo si trasmettono due forze dT, attraverso le aree $\Omega = s \cdot dL$, pari alla spinta del liquido sul semicilindro:

$$S = pD\,dL = 2dT$$

dove D è il diametro (interno) del tubo.

Allora $dT = \frac{1}{2} pD\,dL$ sono le forze di TRAZIONE normali alle superfici Ω.

Se lo spessore s è piccolo rispetto al diametro D

$$s < \frac{D}{50}$$

si può ammettere che la sollecitazione dT sia uniformemente ripartita sulla superficie, per cui è possibile definire la tensione

$$\sigma = \frac{dT}{s\,dL}$$

e sostituendo l'espressione di dT si ricava la formula di Mariotte:

$$s = \frac{pD}{2\sigma}$$

che è la base per il dimensionamento delle condotte.

• CINEMATICA DEI FLUIDI

Si dice metodo LAGRANGIANO quel metodo di studio del moto che analizza direttamente le vicende nel tempo delle singole particelle, cioè studia le traiettorie.

Si dice metodo EULERIANO quel metodo di studio del moto che analizza direttamente l'andamento del campo di velocità nello spazio, cioè studia le linee di corrente.

Il metodo euleriano analizza il campo di velocità ad un determinato istante di tempo t.

• ELEMENTI CARATTERISTICI DEL MOTO

→ TRAIETTORIE

forniscono un quadro delle posizioni successivamente assunte nel tempo da singole particelle.

$$\begin{cases} dx = u(x,y,z;t)\,dt \\ dy = v(x,y,z,t)\,dt \\ dz = w(x,y,z;t)\,dt \end{cases}$$

condizioni iniziali: a t_0: (x_0, y_0, z_0)

→ LINEE DI CORRENTE O DI FLUSSO

individuano la velocità nei differenti punti del campo di moto in un determinato istante.

È la curva tangente, in ciascuno dei suoi punti, al vettore velocità in quel punto.

$$\frac{dx}{u(x,y,z;t_0)} = \frac{dy}{v(x,y,z;t_0)} = \frac{dz}{w(x,y,z;t_0)}$$

→ LINEE DI EMISSIONE O DI FUMO

definiscono la posizione che in un determinato istante occupano le particelle precedentemente passate per un prefissato punto del campo di moto.

Quando il moto risulta INDIPENDENTE DAL TEMPO, le tre linee definite coincidono.

• TUBO DI FLUSSO

Consideriamo una linea chiusa che non sia una linea di corrente. Il complesso di tutte le linee di corrente che passano per tutti i punti della linea chiusa formano una superficie tubolare che gode della proprietà di NON ESSERE ATTRAVERSATA da fluido nell'istante considerato. Questa superficie si chiama TUBO DI FLUSSO.

Sezionando un tubo di flusso e considerando una porzione infinitesima di tale sezione è possibile definire la PORTATA ELEMENTARE

$$dQ = v_n \cdot d\Omega = (\vec{v} \times \vec{n})\, d\Omega$$

dove $\vec{v}$ = vettore velocità e $\vec{n}$ = versore normale a $d\Omega$.

Quindi la portata elementare è il VOLUME DI FLUIDO CHE ATTRAVERSA NELL'UNITÀ DI TEMPO LA SUPERFICIE INFINITESIMA $d\Omega$.

Integrando su tutta la sezione si ricava la PORTATA

$$Q = \int_\Omega (\vec{v} \times \vec{n})\, d\Omega .$$

Se la sezione è normale alle linee di flusso (SEZIONE TRASVERSALE) allora

$$Q = \int_\Omega v\, d\Omega . \qquad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Si definisce allora VELOCITÀ MEDIA il termine $V = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega v\, d\Omega$.

- TIPI DI MOVIMENTO

→ MOTO PERMANENTE

Le grandezze cinematiche non dipendono dal tempo. È un moto caratterizzato da velocità costante nel tempo, ma non nello spazio, cioè la linea di corrente coincide con la traiettoria

→ MOTO VARIO

Le grandezze cinematiche dipendono da tempo e spazio. Il campo delle velocità risulta continuamente variabile nel tempo.

→ MOTO UNIFORME

La velocità è indipendente dal tempo ed è invariabile da punto a punto. Può tuttavia variare su una generica sezione trasversale, ma il modo in cui varia è costante lungo tutta la lunghezza della condotta.

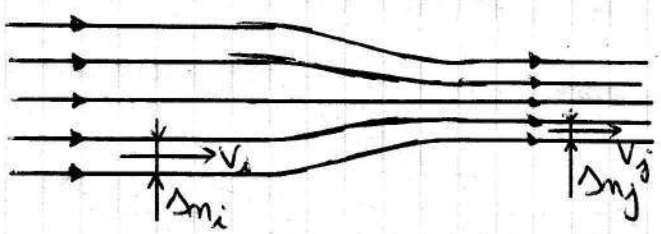
- RAPPRESENTAZIONE DEI MOTI PERMANENTI DEI FLUIDI INCOMPRIMIBILI

Un moto permanente di un fluido incomprimibile è caratterizzato dall'essere un moto a portata costante: $Q = V_1\Omega_1 = V_2\Omega_2 = \dots = V_n\Omega_n = \text{costante}$.

Definendo una portata per unità di larghezza $q = \frac{Q}{l}$ $\left[\frac{m^2}{s}\right]$, in un canale di flusso vale $\Delta q = V\Delta n$ dove Δn è la larghezza del canale di flusso. Pertanto vale:

$\Delta q = V_1\Delta n_1 = V_2\Delta n_2 = \dots = V_n\Delta n_n = \text{costante}$.

Ad una diminuzione di Δn corrisponde quindi un aumento di velocità nella direzione del moto e viceversa.



• DERIVAZIONE EULERIANA

Definiamo il vettore velocità $\vec{v} = v(x, y, z; t)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{termine locale}} + \underbrace{\left(u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)}_{\text{termini convettivi}} = \vec{a}$$

ACCELERAZIONE DI UNA PARTICELLA

ACCELERAZIONE CONVETTIVA

ACCELERAZIONE LOCALE

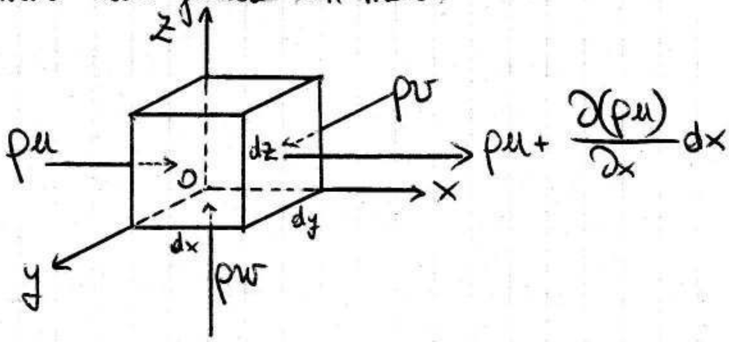
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \vec{u}$$

Nel moto permanente risulta nullo il termine locale:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

• EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

L'equazione di continuità è un legame fra i caratteri cinematici del moto e la densità del fluido in moto.



Considero un cubetto infinitesimo di lati dx, dy, dz. Definisco ρ la densità nell'origine O e u, v, w le componenti della velocità.

La massa entrante è data dal prodotto di portata, densità e tempo, cioè dal prodotto di densità e volume:

$$\rho u \, dy dz \, dt$$

La massa uscente è

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right) dy dz\, dt$$

La differenza fra la massa entrante e quella uscente fornisce:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz\, dt$$ ECCESSO DI MASSA o massa uscente dal volumetto in dt

Per il principio di conservazione della massa l'eccesso di massa deve eguagliare la variazione di densità $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz\, dt$ nell'intervallo di tempo dt.

Allora

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \cancel{dx dy dz dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \cancel{dx dy dz dt}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ EQUAZIONE INDEFINITA DI CONTINUITÀ

che può essere riscritta come

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ.

Nel caso di fluido incomprimibile (ρ = costante) l'equazione di continuità si riduce a $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

• EQUAZIONE DI CONTINUITÀ APPLICATA ALLE CORRENTI

Sezioniamo una corrente con due sezioni trasversali poste alla distanza infinitesima ds. La massa entrante nella sezione iniziale è $\rho Q\, dt$. La massa uscente dalla sezione finale è $\left(\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds\right) dt$. L'eccesso di massa è pari a:

$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds\, dt$. Questo eccesso è pari anche a $-\frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} ds\, dt$ per l'equazione di conservazione della massa.

Da cui si ricava $$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER CORRENTI

Nel caso di fluido incomprimibile l'equazione di continuità applicata alle correnti diventa:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 .$$

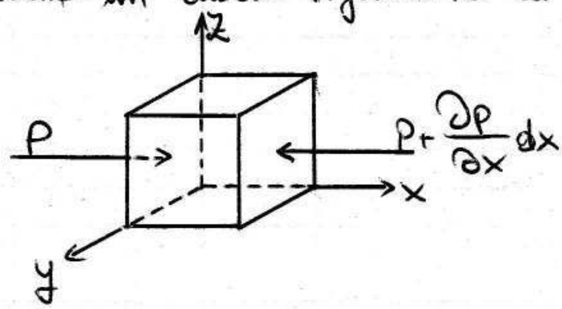
Nel moto permanente: $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{ds} = 0$ la portata è COSTANTE.

• DINAMICA DEI FLUIDI PERFETTI

Si assumono nulli gli sforzi viscosi, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ e $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$.

• EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOVIMENTO O EQUAZIONE DI EULERO

Consideriamo un cubetto infinitesimo di lati dx, dy, dz:



supponiamo che su di esso agiscano
- forze di massa,
- forze di superficie,
- forze di inerzia.

L'equazione cardinale della dinamica afferma $\vec{F} = m\vec{a}$ che nel caso in questione risulta $\vec{F} = dm \cdot \vec{a}$ dove $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$.

- forze di massa

$\vec{R} \cdot dm$ dove $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$. Nel campo gravitazionale $\vec{R} = \vec{g}$

- forze di superficie

lungo l'asse x si ha:

$$\vec{F_s} = S = p\, dy\, dz$$

$$\overleftarrow{F_s} = S = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\, dz$$

$-\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$ è la forza risultante sull'asse x.

Analogamente sugli altri assi.

- forze di inerzia

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ dove $a_x = \frac{Du}{Dt}$; $a_y = \frac{Dv}{Dt}$; $a_z = \frac{Dw}{Dt}$