IDRAULICA: MECCANICA DEI FLUIDI

• I FLUIDI

Un fluido è un corpo materiale che può subire delle grandi variazioni di forma sotto l'azione di forze di minima entità. Un fluido in quiete non si oppone con alcuna resistenza ai cambiamenti di forma. Resistenze apprezzabili si riscontrano nei fluidi soltanto nel caso di deformazioni rapide.

• TIPI DI FLUIDI

→ LIQUIDI (POCO COMPRIMIBILI): oppongono grande resistenza alle variazioni di volume e, posti in un recipiente, ne occupano la parte inferiore presentando una superficie LIBERA a contatto con l'atmosfera sovrastante.

→ GAS (FACILMENTE COMPRIMIBILI): necessitano di forze di modesta entità per variare il volume, in circostanze normali; occupano tutto il volume a disposizione.

• FLUIDI - SISTEMI CONTINUI

Un fluido è composto da particelle poste ad una distanza reciproca grande rispetto alle loro dimensioni. Pertanto un fluido è un sistema per sua natura DISCONTINUO.

Se si considera una PARTICELLA DI FLUIDO come una PORZIONE del fluido in esame che abbia dimensioni opportunamente scelte in relazione al processo in studio e alla quale si possano associare, durante un intervallo di tempo Δt ed intorno ad un istante di tempo t, determinate grandezze fisiche (densità, velocità, pressione, ...) allora è possibile ammettere che il fluido sia un sistema rigorosamente continuo eccezion fatta per specifici punti, linee o superfici che occorre analizzare caso per caso. Su questa assunzione si basa la MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI di Eulero.

• GRANDEZZE ED UNITÀ DI MISURA

→ GEOMETRICHE

lunghezza L $[m]$

superficie Ω $[m^2]$

volume V $[m^3]$

→ CINEMATICHE

tempo	T	$[s]$
velocità	$\vec{u}$	$[m/s]$
portata in volume	Q	$[m^3/s]$
accelerazione	$\vec{A}$	$[m/s^2]$

$\vec{g} \cong 9{,}8\ m/s^2$ accelerazione di gravità

relazione portata – velocità:

$$dQ = \vec{u}\, d\Omega \Rightarrow Q = \int_\Omega \vec{u}\, d\Omega \qquad \text{portata}$$

$$\vec{u}_m = \frac{Q}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \vec{u}\, d\Omega \qquad \text{velocità media}$$

→ DINAMICHE

massa	M	$[kg]$	
forza	$\vec{F}$	$[N]$	$1N = 1kg \cdot 1\frac{m}{s^2}$
pressione	p	$[Pa]$	$1Pa = 1\frac{N}{m^2}$
densità o massa specifica	ρ	$[kg/m^3]$	
peso specifico	γ	$[N/m^3]$	
modulo di elasticità o di comprimibilità	ε	$[N/m^2]$	
viscosità o attrito interno (vedi dopo)			

relazioni fra unità di misura

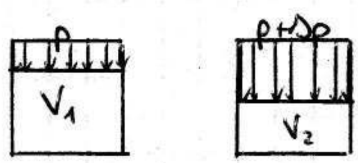
$10^5\ Pa - 1bar = 0{,}987\ atm$

$1atm = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa = 1{,}013\ bar$

$$p = \frac{\vec{F}}{\Omega}$$

$\gamma = \rho \cdot g$ per acqua a 4°C: $\rho = 1000\ \frac{kg}{m^3} \Rightarrow \gamma = 9800\ \frac{N}{m^3}$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$



$\Delta V = V_1 - V_2$

• VISCOSITÀ

Quando un fluido è in moto tra le particelle si esplicano delle tensioni tangenziali che si oppongono allo scorrimento delle particelle stesse le une sulle altre. Queste tensioni sono determinate dalla VISCOSITÀ o ATTRITO INTERNO del fluido, che è definito dal COEFFICIENTE

DI ATTRITO INTERNO o COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ μ.

Supponiamo di trascinare una tavoletta piana di area S_2 sulla superficie libera di un fluido inizialmente in quiete. L'azione tangenziale "di trascinamento" di lamine piane e parallele di fluido dovuta al moto della tavoletta è proporzionale all'area σ, alla differenza di velocità $\Delta\vec{u}$ tra tavoletta e "lamina" di fluido ed è inversamente proporzionale alla distanza Δy tra la tavoletta e la "lamina" di fluido considerata.

$$F = \mu\sigma \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta y}$$

e passando ai limiti si ottiene la LEGGE REOLOGICA DI NEWTON

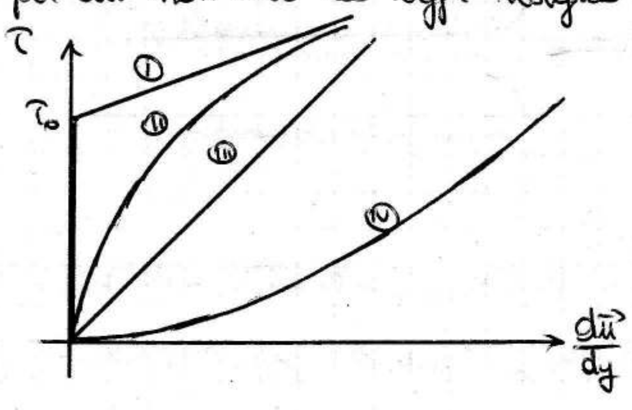
$$\tau = \frac{F}{\sigma} = \mu \frac{d\vec{u}}{dy}$$

in cui μ = COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ DINAMICA o DI ATTRITO INTERNO di un fluido $[N \cdot s/m^2]$

Si definisce VISCOSITÀ CINEMATICA $\nu = \frac{\mu}{\sigma}$ $[m^2/s]$

• FLUIDI NEWTONIANI E FLUIDI NON NEWTONIANI

Si definiscono fluidi NEWTONIANI quei fluidi per cui vale la legge reologica di Newton $\tau = \mu \frac{d\vec{u}}{dy}$ (curva reologica lineare passante per l'origine). Sono detti NON NEWTONIANI quei fluidi per cui non vale la legge reologica di Newton.



① ALLA BINGHAM

② PSEUDOPLASTICI

③ NEWTONIANI

④ DILATANTI

→ FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM

La velocità di deformazione è nulla finché la sollecitazione è minore di τ_0. Al di sopra di tale valore limite il fluido si comporta come se fosse newtoniano. L'equazione reologica ha la seguente forma: $\tau - \tau_0 = \mu_p \frac{d\vec{u}}{dy}$ dove μ_p = COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ PLASTICA. Un esempio di fluido plastico alla Bingham è il dentifricio.

→ FLUIDI PSEUDOPLASTICI

La viscosità apparente diminuisce all'aumentare del gradiente di velocità $\frac{d\vec{u}}{dy}$ e tende a valori costanti. La curva reologica ha equazione del tipo $\tau = k\left(\frac{d\vec{u}}{dy}\right)^n$ con $n<1$ e K = MISURA DELLA VISCOSITÀ E CONSISTENZA DEL FLUIDO. Un esempio di fluido pseudoplastico sono i derivati della cellulosa.

→ FLUIDI DILATANTI

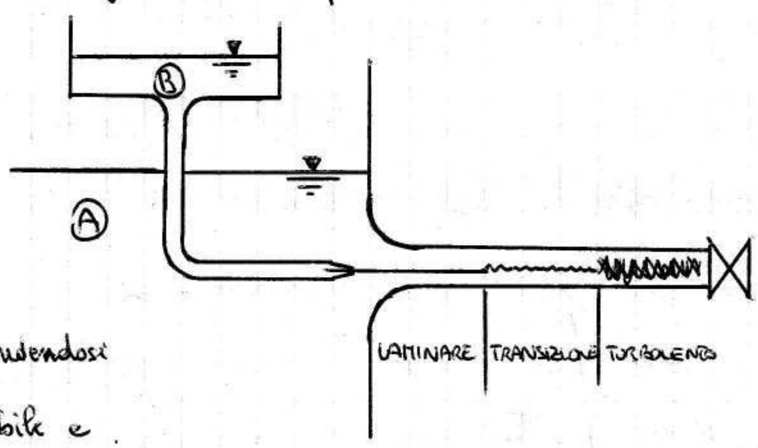
La viscosità apparente aumenta all'aumentare della velocità di deformazione. La curva reologica ha equazione del tipo $\tau = k\left(\frac{d\vec{u}}{dy}\right)^n$ con $n>1$. Un esempio di fluido dilatante sono le sospensioni di materiali solidi ad alta concentrazione.

→ ALTRI FLUIDI NON NEWTONIANI

Il loro comportamento dipende dal tempo. Si dicono TIXOTROPICI quei fluidi in cui lo sforzo tangenziale diminuisce nel tempo fino a tendere ad un valore limite per il quale si comportano come fluidi newtoniani. Si dicono REOPECTICI quei fluidi in cui lo sforzo tangenziale aumenta nel tempo fino a far assumere al fluido un aspetto ed un comportamento di un solido.

• REGIMI DI MOVIMENTO

Esperienza di Reynolds



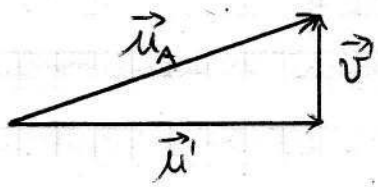
Per portate molto piccole (moto lento) il liquido iniettato B genera un filetto colorato che, estendendosi per tutta la tubazione, rimane stabile e nettamente distinto dal liquido A in movimento all'interno del tubo. Il moto avviene per FILETTI RETTILINEI E PARALLELI e i vettori velocità delle singole particelle sono tutti orientati lungo l'asse del tubo. È il MOTO LAMINARE ed è estremamente stabile.

Aumentando la portata defluente (moto più veloce) si osserva un andamento OSCILLANTE del filetto colorato. È il MOTO DI TRANSIZIONE ed è più instabile di quello laminare. I vettori velocità non sono più tutti paralleli tra di loro.

Ad un ulteriore aumento della portata defluente (moto veloce) si osserva la DIFFUSIONE del filetto colorato nel liquido (A) circostante. È il MOTO TURBOLENTO. Nascono fluttuazioni di velocità all'interno della massa fluida. Questo regime di movimento è caratterizzato da due moti sovrapposti:

→ MOTO DI TRASPORTO a velocità $\vec{u}_T$ costante

→ MOTO DI AGITAZIONE caratterizzato da due componenti di agitazione turbolenta $\vec{u}'$ e $\vec{v}'$ lungo la direzione assiale e lungo la direzione radiale. Il moto di agitazione dà



luogo a tensioni tangenziali che si oppongono al movimento della massa fluida che si definiscono TENSIONI DI REYNOLDS

$$\tau_{TURB} = k \cdot \overline{u'v'}$$

dove k = coefficiente di proporzionalità e $\overline{u'v'}$ = media del prodotto delle due componenti.

• STATICA DEI FLUIDI

La fluidostatica studia i fluidi IN QUIETE. Un fluido è in quiete quando le singole particelle che lo compongono non subiscono alcuno spostamento relativo. Questa condizione si verifica sia in condizioni di EQUILIBRIO ASSOLUTO sia in condizioni di EQUILIBRIO RELATIVO.

• SFORZI NEI FLUIDI

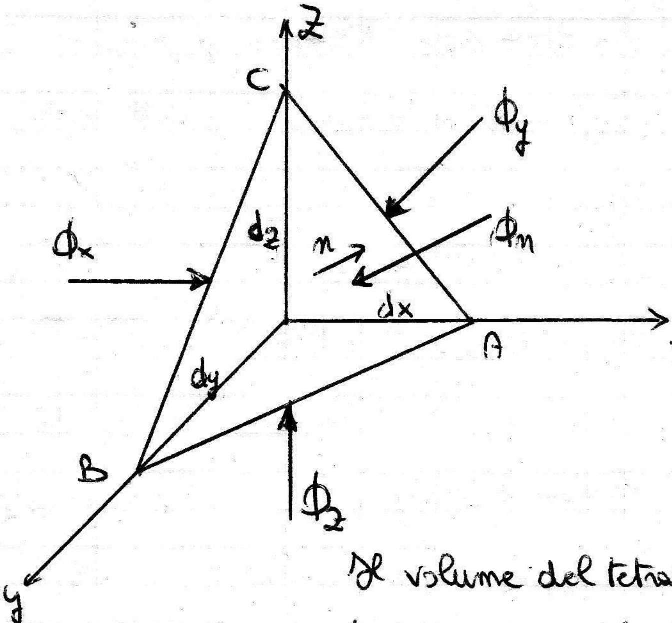
Si definiscono FORZE DI MASSA tutte le forze esterne che si esercitano a distanza su tutte le particelle del sistema, ad esempio il peso della massa fluida.

Si definiscono FORZE DI SUPERFICIE quelle forze che vengono esercitate su una qualsiasi parte del sistema continuo attraverso la sua superficie di contorno.

Consideriamo un elemento di superficie dA su cui agisce la forza unitaria dI, data dalla sommatoria delle forze. Si definisce SFORZO UNITARIO $\phi = \frac{dI}{dA}$. Questo sforzo è funzione della giacitura dell'elemento dA pertanto lo indichiamo con ϕ_n dove n è il versore normale a dA. La forza agente su dA è pertanto: $dI = \phi_n \, dA$ ed è chiamata SPINTA ELEMENTARE. La SPINTA TOTALE su tutto il sistema è quindi

$$I = \int_A \phi_n \, dA.$$

Considerando il TETRAEDRO elementare DI CAUCHY



A = area di $(A\hat{B}C)$

Le spinte agenti sul tetraedro sono:

- $-\vec{\Phi}_x A \cos \hat{nx}$
- $-\vec{\Phi}_y A \cos \hat{ny}$
- $-\vec{\Phi}_z A \cos \hat{nz}$
- $\vec{\Phi}_n A$

Il volume del tetraedro è un infinitesimo di ordine superiore, quindi trascuriamo le forze di volume. Sono altresì un infinitesimo del terzo ordine le forze di massa e la FORZA DI INERZIA. L'equilibrio del tetraedro è quindi riducibile a: $\vec{\Phi}_n A + (-\vec{\Phi}_x A \cos \hat{nx}) + (-\vec{\Phi}_y A \cos \hat{ny}) + (-\vec{\Phi}_z A \cos \hat{nz}) = 0$ che è equivalente a: $\vec{\Phi}_n A - A(\vec{\Phi}_x \cos \hat{nx} + \vec{\Phi}_y \cos \hat{ny} + \vec{\Phi}_z \cos \hat{nz}) = 0$.

Si ricava il TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{nx} + \vec{\Phi}_y \cos \hat{ny} + \vec{\Phi}_z \cos \hat{nz}$$

che afferma che

LO SFORZO AGENTE IN UN PUNTO SU UN ELEMENTO DI GENERICA GIACITURA È UNA FUNZIONE LINEARE E OMOGENEA DEGLI SFORZI AGENTI, NEL PUNTO STESSO, SU TRE QUALSIASI GIACITURE FRA DI LORO ORTOGONALI.

La caratteristica di un fluido in quiete è l'assenza di spostamenti relativi e quindi lo sforzo Φ_n non ammette componenti tangenziali, ma solo componenti normali. Solo in questo caso, infatti, è garantita l'assenza di deformazioni della massa fluida. Lo sforzo ha modulo unico, costante per tutte le direzioni, che viene chiamato PRESSIONE p. Il valore della pressione, quindi, dipende soltanto dal punto considerato della massa fluida: il sistema è ISOTROPO. Per i fluidi in quiete quindi $p = \Phi_n = \Phi_x = \Phi_y = \Phi_z$ e lo sforzo è pari a $\vec{\Phi}_n = p \cdot \vec{n}$.

- EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI – LEGGE DI STEVINO

Consideriamo un parallelepipedo elementare all'interno di una massa fluida in quiete avente densità ρ e pressione p. Su di esso agiscono le seguenti forze:

→ forze di massa $\rho \vec{R}\, dx\,dy\,dz$ con $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

→ forze di superficie

asse x: $p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$

asse y: $p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz$

asse z: $p\,dx\,dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx\,dy$

L'equilibrio del parallelepipedo impone:

asse x: $\rho X dx\,dy\,dz + \left[p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz\right] = 0$

asse y: $\rho Y dx\,dy\,dz + \left[p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz\right] = 0$

asse z: $\rho Z dx\,dy\,dz + \left[p\,dx\,dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dx\,dy\right] = 0$

da cui si ottiene:

$$\rho X dx = \frac{\partial p}{\partial x}dx \;,\quad \rho Y dy = \frac{\partial p}{\partial y}dy \;,\quad \rho Z dz = \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

e sommando membro a membro si ottiene:

$$\underbrace{\rho\left(X dx + Y dy + Z dz\right)}_{\text{differenziale esatto se il fluido è INCOMPRIMIBILE (cioè se } \rho = \text{costante)}} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz}_{\text{differenziale esatto della pressione}} = dp$$

L'equilibrio di un fluido incomprimibile è possibile se e solo se le forze di massa ammettono un potenziale U per cui valga $X = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$; $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$; $dU = X dx + Y dy + Z dz$.

Sostituendo nell'ultima equazione si ricava:

$$d\left(U - \frac{p}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \left(U - \frac{p}{\rho}\right) = \text{costante}$$

Nel campo gravitazionale si ha $U = -gz$. Quindi:

$$-gz - \frac{p}{\rho} = \text{costante}$$

e ancora

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante} = h$$

VALIDA SOLO SE IL LIQUIDO È IN QUIETE!

che è la LEGGE DI STEVINO o EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA DEI FLUIDI dove

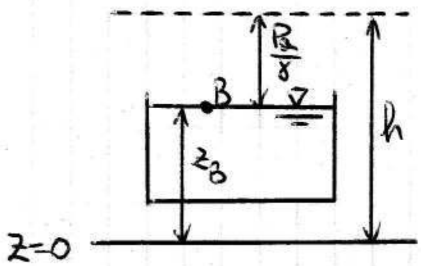
z = quota geometrica di una particella fluida

$\frac{p}{\gamma}$ = altezza piezometrica

h = carico piezometrico o quota piezometrica.

• STATICA DEI FLUIDI PESANTI ED INCOMPRIMIBILI

Consideriamo il seguente sistema:



la posizione del piano $z=0$ è arbitraria; il punto B si trova sulla SUPERFICIE LIBERA, dove la pressione vale $P_a = 101234$ Pa. Se il liquido considerato è acqua si ha $\frac{P_a}{\gamma} = 10{,}33$ m. Il piano che si trova a $z_B + \frac{P_a}{\gamma} = h$ dal piano $z=0$ si chiama PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTI.

Se per convenzione assumiamo nulla la pressione atmosferica, possiamo riferirci sempre ad essa e quindi parlare di PRESSIONI RELATIVE. Definendo quindi pressione relativa il termine $P-P_a$ e carico piezometrico relativo il termine $h-\frac{P_a}{\gamma}$ si ricava l'equazione

$$z + \frac{P-P_a}{\gamma} = h - \frac{P_a}{\gamma} \Rightarrow z + \frac{P_r}{\gamma} = h_r .$$

Il piano posto ad h_r rispetto al piano $z=0$ è il PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVI. Nel caso trattato è la superficie libera.

Tutti i punti che appartengono al piano dei carichi idrostatici assoluti hanno pressione nulla, quindi il $\Pi_{c.i.a}$ è un piano sul quale la pressione assoluta di un liquido è nulla.

Tutti i punti che appartengono al piano dei carichi idrostatici relativi hanno pressione relativa nulla, quindi il $\Pi_{c.i.r.}$ è un piano sul quale la pressione di un liquido è pari a quella atmosferica.

Tutti i piani paralleli al $\Pi_{c.i.r.}$ sono piani ISOBARI.

La pressione in un punto vale il prodotto del peso specifico γ del fluido per l'affondamento del punto considerato sotto il $\Pi_{c.i.r.}$.

• MISURA DELLE PRESSIONI

L'individuazione della quota piezometrica della massa fluida in esame, e quindi la determinazione dell'andamento delle pressioni, è possibile adoperando uno dei seguenti sistemi:

→ piezometri

→ manometri metallici e a liquido

→ manometro differenziale

• PIEZOMETRI

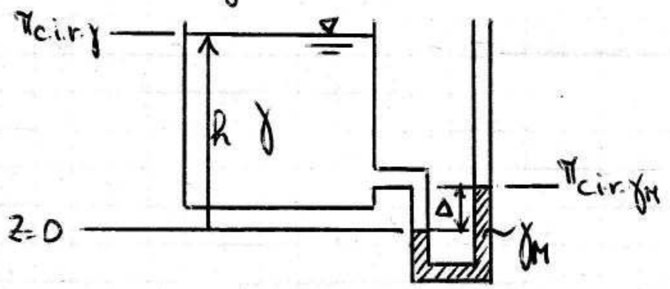
Determinano in maniera "visiva" la quota del $\Pi_{c.i.r.}$.

Occorre fare attenzione al diametro del piezometro (non troppo piccolo per evitare fenomeni di capillarità) e all'eventuale presenza di bolle (che falsano la lettura della quota del $\Pi_{c.i.r.}$).

• MANOMETRO METALLICO E A LIQUIDO

È costituito da un tubo appiattito avvolto a spirale collegato ad un indice. Fornisce il valore della pressione ALLA QUOTA DEL SUO BARICENTRO in $\frac{Kgf}{cm^2}$. Per ottenere i pascal devo moltiplicare la lettura per $9{,}81 \cdot 10^4$.

Il manometro a liquido è costituito da un tubo a U contenente nella parte inferiore del MERCURIO, $\gamma_M \cong 133\,000 \frac{N}{m^3}$. Detto Δ il dislivello tra i due menischi del mercurio, si ha la seguente relazione



$$h = \Delta \frac{\gamma_M}{\gamma}$$

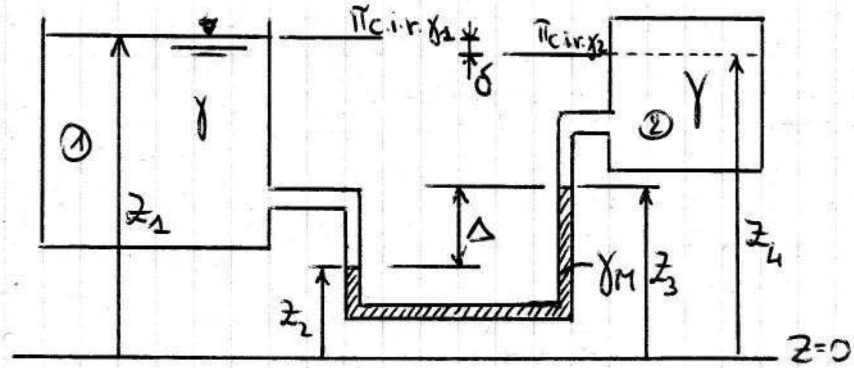
In caso di serbatoio chiuso in depressione, il liquido γ riempie tutto il volume se il "tetto" del serbatoio è ad una altezza inferiore di $\frac{p_a}{\gamma}$, dove p_a è la pressione atmosferica, dal $\Pi_{c.i.r.\gamma}$. Altrimenti il serbatoio risulta semipieno (non è fisicamente possibile avere pressioni assolute negative).

In caso di depressione il menisco libero del mercurio si posiziona più in basso del menisco a contatto con il liquido γ.

• MANOMETRO DIFFERENZIALE

Permette di valutare la differenza di quota di due $\Pi_{c.i.r.}$ di due liquidi. Chiamiamo δ questa differenza di quota.

Se il liquido manometrico ha un peso specifico $\gamma_M > \gamma$:



$$\delta = \Delta\left(\frac{\gamma_M - \gamma}{\gamma}\right)$$

(mercurio: $\gamma_M \cong 133280 \frac{N}{m^3}$)

$$\gamma(z_1 - z_2) = \gamma(z_4 - z_3) + \gamma_M(z_3 - z_2) \quad ; \quad \Delta = z_3 - z_2$$

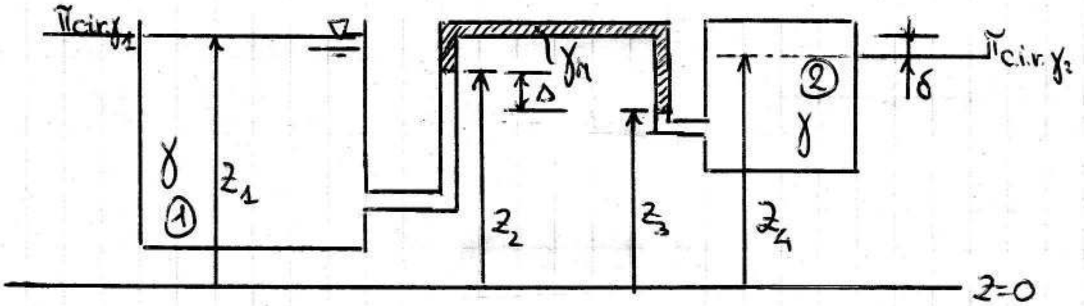
$$\gamma z_1 - \gamma z_2 - \gamma z_4 + \gamma z_3 = \gamma_M \Delta$$

$$\gamma(z_1 - z_2) + \gamma(z_3 - z_2) = \gamma_M \Delta$$

$$\gamma\delta + \gamma\Delta = \gamma_M \Delta$$

$$\gamma\delta = \gamma_M \Delta - \gamma\Delta = \Delta(\gamma_M - \gamma)$$

Se il liquido manometrico ha un peso specifico $\gamma_M < \gamma$:



$$\delta = \Delta\left(\frac{\gamma - \gamma_M}{\gamma}\right)$$

$$\gamma(z_4 - z_3) = \gamma(z_1 - z_2) + \gamma_M \Delta$$

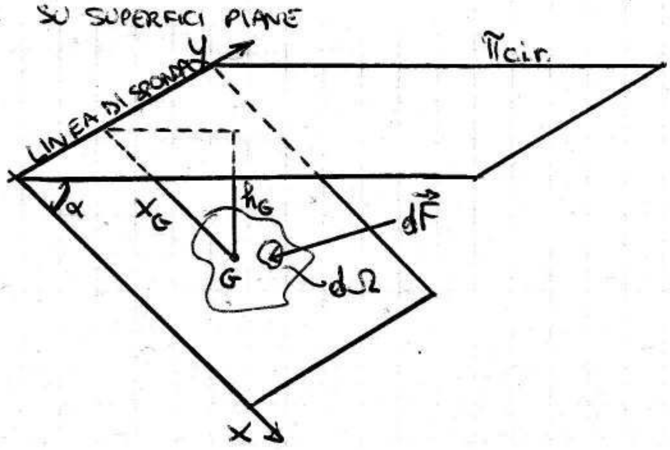
$$\gamma z_4 - \gamma z_3 - \gamma z_1 + \gamma z_2 = \gamma_M \Delta$$

$$\gamma(z_4 - z_1) + \gamma(z_2 - z_3) = \gamma_M \Delta$$

$$\gamma\Delta - \gamma_M \Delta = \gamma\delta$$

$$\Delta(\gamma - \gamma_M) = \gamma\delta$$

• SPINTE SU SUPERFICI PIANE



$$d\vec{F} = p\, d\Omega\, \vec{n} = \gamma h\, d\Omega\, \vec{n} =$$
$$= \gamma\, x \sin\alpha\, d\Omega\, \vec{n}$$

è la SPINTA ELEMENTARE agente su $d\Omega$ esercitata dal liquido γ