Equazione di continuità $\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\operatorname{div}\vec{u}$

$\rho\left(F - \underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\vec{A}}\right) = \operatorname{div}(T)$ Cauchy

Tensore degli sforzi è simmetrico

FLUIDI IDEALI: $T = pI = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

Equazione di Eulero $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \cancel{\operatorname{div}(p)}$ grad(p) ← cond. contorno impermeabili pareti

da cui si ricava che

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{se moto permanente} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

$$H = \underbrace{z + \frac{p}{\gamma}}_{h} + \frac{u^2}{2g} = \text{costante} \qquad \text{Teo Bernoulli}$$

carico totale

h: carico idrostatico (piezometrico)

z: energia potenziale per unità di peso

$\frac{p}{\gamma}$: energia di pressione

$\frac{u^2}{2g}$: energia cinetica per unità di peso

Equazione globale di equilibrio dinamico $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u - \vec{I} = 0$

P forza peso

$\vec{M} = \beta \rho Q u \vec{m}$ $\qquad \beta = \begin{cases} 1 & \text{m. turbol.} \\ \frac{4}{3} & \text{moto lam.} \end{cases}$

Π forze di pressione

$M_e - M_u$: flussi di quantità di moto

I: variazione temporale della quantità di moto

Correnti $\qquad Q = U\Omega = \int \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Omega$

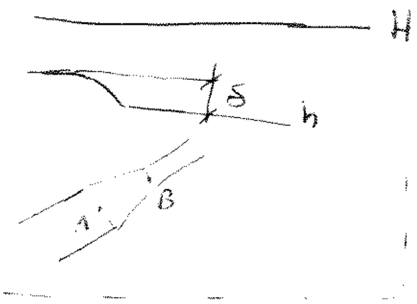
eq. continuità per le correnti $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial s}$
(vale anche per fluidi non ideali)

Se condotte indeformabili o moto permanente allora
$Q = \text{costante}$.

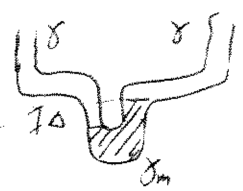
Teo bernoulli per correnti

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{costante}$$

1,02 moti turbolenti — 2 moti laminari



$$\delta = \frac{1}{2g}\left(u_A^2 - u_B^2\right) = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_B^2} - \frac{1}{\Omega_A^2}\right)$$



$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

Fluidi in quiete

$A = 0 \Rightarrow \rho \vec{F} = \text{grad}\, p$ equazione indefinita della statica

$\vec{P} + \vec{\Pi} = 0$ equazione globale della statica

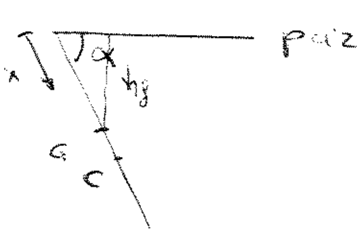
legge di Stevino $\quad z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante}$

pcia: piano carichi idrostatici assoluti è il piano su cui si misura una pressione assoluta pari a 0 ~~bar~~ Pa

pcir: piano dei carichi idrostatici relativi è il piano su cui si misurano pressioni assolute pari a quella atmosferica.

Spinte su pareti piane

$$d\vec{S} = p\,\vec{n}\,d\Omega$$



$$S = \vec{n}\,\underbrace{\sin\alpha \cdot x_G}_{h_G}\,\Omega\,\gamma = h_g\,\gamma\,\Omega\,\vec{n}$$

$$M_y = x_G\,\Omega \qquad I_{y0} = \frac{h^3 b}{12} \text{ per sup rettangolari}$$

$$X_G - X_C = \frac{I_{y_0}}{M_y}$$

Per spinte su superfici curve si usa l'equazione globale della statica.

<u>Fluido reale</u>

$$T_{ij} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ se } i=j \text{ ; } 0 \text{ altrove}}}{p\,\delta_{ij}} - \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Equazione di Navier-Stokes $\quad \rho(\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}\, p^* - \underbrace{\mu\, \nabla^2 \vec{u}}_{\text{termine diffusivo}}$

Condizioni al contorno:

- impermeabilità della parete $(\vec{u}\cdot\vec{n}=0)$
- no slip condition (velocità alla parete nulla) $\vec{u}\cdot\vec{t}=0$

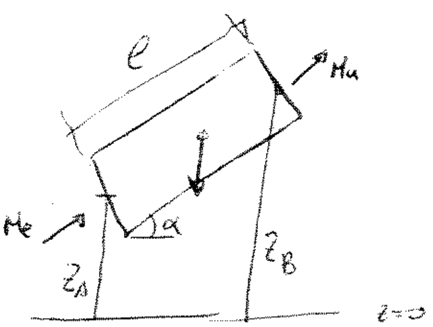
Equazione globale per fluido reale $\quad \vec{P}+\vec{\Pi}+\vec{M}_e-\vec{M}_u-\vec{T}=\vec{I}$

$$T = \mu\int_\Omega \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}\, d\Omega$$

Nei fluidi reali $\frac{\partial H}{\partial s} \neq 0$, ~~me~~ è $-j$ con $j \geq 0$

j: pendenza motrice.

Se Ω = costante e Q = costante allora la linea dei carichi totali è parallela alla linea dei carichi piezometrici.



$$T = -P\sin\alpha + p_A\Omega - p_B\Omega$$

$$\sin\alpha = \frac{z_B - z_A}{L} \qquad P = \gamma L \Omega$$

$$T = -P\,\frac{z_B - z_A}{L} + p_A\Omega - p_B\Omega$$

$$T = \gamma\Omega\,(z_A - z_B) + \Omega\,(p_A - p_B)$$

$$\frac{T}{\gamma\Omega} = \underbrace{\left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right)}_{h_A} - \underbrace{\left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right)}_{h_B} = L\,j$$

$$T = \gamma\Omega L j = \gamma W j$$

$$\tau_0 = \frac{T}{l_{perim.}} = \frac{\gamma \Omega L j}{L_{perim}} = \gamma j R \rightarrow \text{raggio idraulico (area/perimetro)}$$

Moto Turbolento vs moto laminare

Numero di Reynolds $Re = \frac{\rho D u}{\mu} = \frac{D u}{\nu}$

- < 2000 moto laminare
- 2000 < Re < 4000 moto transitorio
- > 4000 moto turbolento

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \nabla p + div(\bar{T}) \qquad \bar{T} = p\,\delta_{ij} - 2\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) + \rho\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$$

sforzi di Reynolds

Di solito gli sforzi di Reynolds sono > di quelli viscosi.

Perdite di carico moto laminare

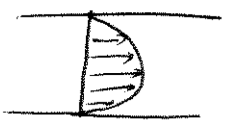
$$T(r) = -\mu \frac{du}{dr}(2\pi r)L \qquad T = \gamma W j = T(r)$$

azione trasmessa

$$\frac{du}{dr} = \frac{\gamma W j}{\mu\, 2\pi r L} \overset{\text{sez. circolari}}{=} -\frac{1}{2}\frac{\gamma r j}{\mu}$$

$$u(r) = \frac{1}{4}\frac{\gamma j}{\mu}(R^2 - r^2)$$

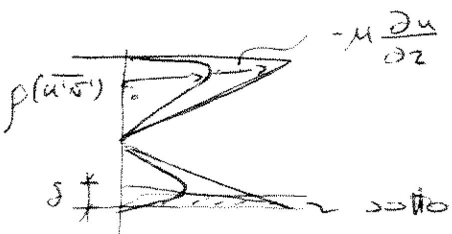
Legge di Poiseuille $Q = \frac{\pi}{128}\frac{\gamma j}{\mu} D^4$



da cui si ottiene $U = \frac{1}{2}\frac{\gamma j}{\mu} R^2$ condotta circolare

se condotto rettangolare $U = \frac{1}{3}\frac{\gamma j}{\mu} R^2$

$$\tau(r) = \frac{T(r)}{l_{perim}} = \gamma \frac{r}{2} j$$



sotto strato viscoso $-\mu\frac{\partial u}{\partial z}$ predomina su $\rho(\overline{u'v'})$

Perdite di carico moto turbolento

ε scabrezza di una condotta (cioè asperità che si oppongono al moto)

ε è scabrezza equivalente rispetto al tubo di N. Kuradse.

Tubo liscio se spessore del sottostrato viscoso $> 2\varepsilon$ $(\delta > 2\varepsilon)$

$u_* = \sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}}$ velocità di attrito

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln(y) + c$$, k costante di Von Karman $\simeq 0,41$

tubo liscio $\dfrac{u}{u_*} = \dfrac{1}{k} \ln\left(\dfrac{y\, u_*}{\nu}\right) + 5,5$

tubo scabro $\dfrac{u}{u_*} = \dfrac{1}{k} \ln\left(\dfrac{y}{\varepsilon}\right) + 8,5$

Definiamo λ (indice di resistenza) tale che $\lambda = \dfrac{D\, j}{u^2 / 2g}$

Formula di Darcy-Weisbach $j = \lambda \dfrac{u^2/2g}{D}$

Nel moto laminare $\cancel{\lambda = \frac{Re}{64}}$ $\lambda = \dfrac{64}{Re}$

Moto turbolento: $N = 11,6$ numero di N. Kuradse

$$N = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\delta\, u_*}{\nu}\right) \Rightarrow \delta = \frac{N \mu}{u_* \rho} = 11,6 \frac{\nu}{u_*}$$

Se $\varepsilon < 5,8 \dfrac{\nu}{u_*}$ tubo liscio

Formula di Colebrook-White $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\dfrac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \dfrac{\varepsilon}{3,71\, D}\right)$

Formula di Chezy $U = \chi \sqrt{R\, j}$ R: raggio idraulico

χ: coeff. di Chezy

$\chi = c\, R^{\frac{1}{6}}$ formula di Gauckler Strickler

c: coefficiente di Strickler.

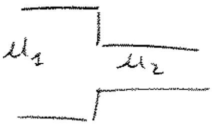
$n = \frac{1}{c}$ coefficiente di Manning.

Formula di Darcy

$$j = \beta \frac{Q^2}{D^{5}} \quad \text{o} \quad j = \beta' \frac{Q^2}{D^{5{,}33}}$$ ← per lunghe condotte

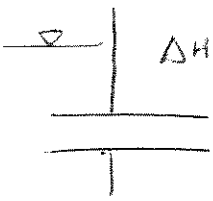
Perdite di carico localizzate

$$\Delta H = n \frac{u^2_{valle}}{2g}$$



$$\Delta H = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0{,}5 \frac{u_v^2}{2g}$$



$$\Delta H = \frac{u_v^2}{2g}$$

se tubazione ben raccordata non ho perdite di carico

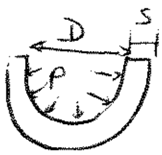
Lunghe condotte

$(L > 4000\,D)$

$$J = \beta \frac{Q^2}{D^n} \quad , n = 5{,}33$$

Formula Mariotte: $\sigma = \frac{pD}{2s}$

$\Downarrow$



$$s_{min} = \frac{pD}{2\sigma_{max}}$$

MOTO VARIO

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{u^2}{2g}$$ fluido ideale in moto vario

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -j$$ se fluido reale

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial H}{\partial t} - j$$ se fluido reale in moto vario

Equazioni semplificate di Allievi

Si dà origine ad onde elastiche e a oscillazioni di massa

onde elastiche - alta velocità di propag.
- si generano in seguito a regolazioni di Q

oscillazioni di massa: - bassa velocità di propagaz.
- oscillazioni in blocco dell'acqua
- legate a variazioni di livello nei serbatoi.

Colpo d'ariete e onde elastiche:

ipotesi: - attriti trascurabili
- velocità di propag. >> U
- si trascurano variazioni di densità con la quota

$$c = \frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial s} \Rightarrow U\frac{\partial F}{\partial s} << \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial t} >> \frac{\partial \cdot}{\partial s}$$

$$H = h + \frac{u^2}{2g} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{j}_{\simeq 0 \times hp}$$

tras..

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}}$$ 1ª eq. semplificata di Allievi

Per arrivare alla seconda eq. di Allievi considero eq. di continuità

$$\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0$$

Si ottiene: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{dp}{dt}$$

$$\rho\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\gamma \rho \Omega D}{sE}\frac{dh}{dt}$$

2ª eq. di Allievi $$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{a^2}{g}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a = \frac{\sqrt{\varepsilon/\rho}}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon D}{sE}}}$$

Inoltre $c = \pm a$

Dalle equazioni di Allievi si possono ottenere le equazioni di D'Alembert

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\end{aligned}\right\} \text{eq di D'Alembert.}$$

Condizioni al contorno vanno poste in $x=0$ (otturatore) e $x=l$ (serbatoio)

$\downarrow$ $u(0)=0$ $\qquad$ $\downarrow$ $h(l)=h_0$

Le equazioni di D'Alembert danno vita ad un'onda progressiva ed una regressiva

$$h-h_0 = F\left(t-\frac{x}{c}\right) + f\left(t+\frac{x}{c}\right)$$ con $t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}$ x onda prog. ($\Delta x = c\,\Delta t$)

mentre $\Delta x = -c\,\Delta t$ onda regressiva.

$$u-u_0 = -\frac{g}{c}\left[F\left(t-\frac{x}{c}\right) + f\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]$$

Se chiusura brusca ($\tau < \frac{2l}{c} = \theta$)

$$\Delta p = \rho c u_0$$ formula di Joukowsky

Se chiusura lenta ($\tau > \theta$)

$$\frac{u}{u_0} = \underbrace{\frac{\omega}{\omega_0}}_{\eta}\underbrace{\sqrt{\frac{h}{h_0}}}_{z}$$

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2A\ell\left(\eta_i z_i - \eta_{i+1} z_{i+1}\right), \quad A\ell = \frac{c\,u_0}{2 g h_0}$$

Per $t > \tau$ $\quad \eta = 0 \Rightarrow \frac{h_{i+2}+h_i}{2} = h_0$ ho oscillazioni con media h_0

Formula di Allievi-Michaud $\quad \Delta h_{max} < \frac{u_0\, 2l}{g\,\tau}$