Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \text{rot}\, E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} & \longrightarrow \quad \text{div}\, B = 0 \\ \text{rot}\, H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t} & \longrightarrow \quad \text{div}\left(J + \dfrac{\partial D}{\partial t}\right) = 0 \\ \text{div}\, J = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} & \longrightarrow \quad \text{div}\, D = \rho \end{cases}$$

- CAMPO ELETTROSTATICO

$$\begin{cases} \text{rot}\, \vec{E} = 0 \\ \text{div}\, \vec{D} = \rho \end{cases} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

isolanti

- Campo di corrente statico:

$$\begin{cases} \text{rot}\, \vec{E} = 0 \\ \text{div}\, \vec{J}' = 0 \end{cases} \qquad \vec{J}' = \vec{J} + \vec{J}_s$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

conduttori

- Campo magnetostatico

$$\begin{cases} \text{rot}\, \vec{H} = \vec{J} \\ \text{div}\, \vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

- Campi quasi stazionari:

$$\begin{cases} \text{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\, \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$$

quasi stazionario poiché non si considerano le correnti di spostamento. ~~del~~

- campo qualsiasi (non trattato)

CAMPO ELETTROSTATICO

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\text{grad}\,V$

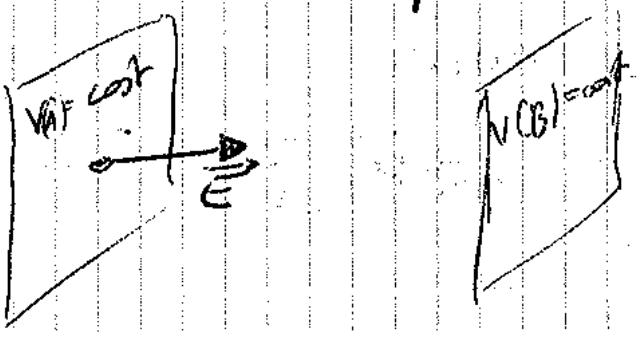
$$\oint_{\ell} \vec{E}\,d\vec{\ell} = 0$$

lavoro del campo elettrico.

$$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{\ell} = \int_A^B -\text{grad}\,V \cdot d\vec{\ell} = -\int_{V(A)}^{V(B)} dV = V(A) - V(B)$$

Campo elettrico è forza che agisce su unità di carica.
Il lavoro del campo elettrico è il lavoro che compie il campo elettrico a spostare la carica da un punto iniziale ad uno finale

Supponiamo esista superficie in cui $V(A) = \text{cost}$ e superficie con $V(B) = \text{cost}$



Se $V_A > V_B$
Allora
$\vec{E} : A \to B$

La differenza di potenziale è definita in modo univoco, il potenziale è definito a meno di una costante. (8)

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho$$ Se $\varepsilon = \text{cost}$ il materiale è omogeneo

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} + \underbrace{\operatorname{grad} \varepsilon}_{=0} \vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

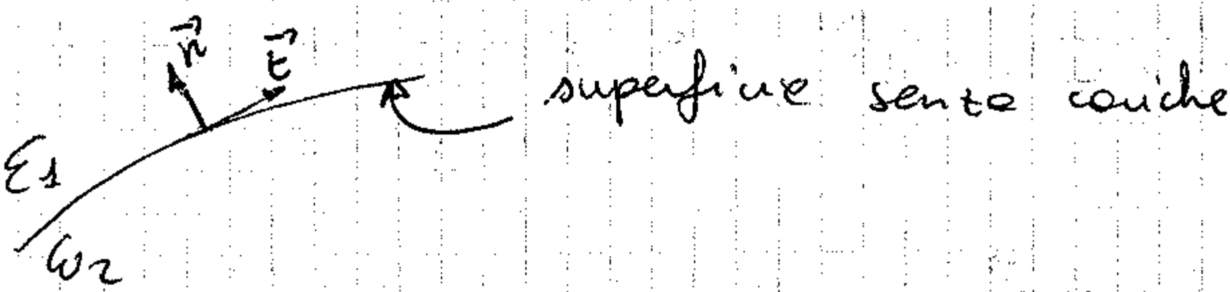
$$V(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{volume}} \frac{\nabla^2 V}{r} \, d\tau$$ x Teorema di Green

$V \to 0$ all'infinito $\qquad \frac{\partial V}{\partial r} \to 0$ all'infinito

$$V = +\frac{1}{4\pi} \int_{\substack{\text{volume in} \\ \text{cui } \rho \neq 0}} \frac{\rho}{\varepsilon r} \, d\tau$$ Se materiali ovunque

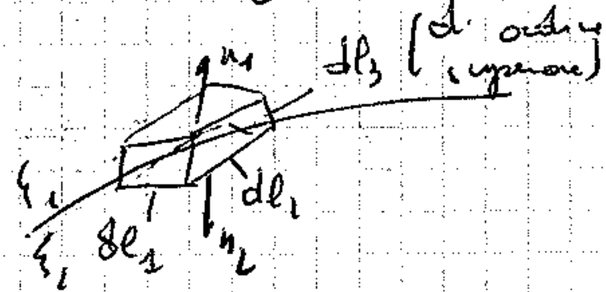
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho}{r} \, d\tau$$

In un problema di campo elettrostatico è interessante studiare il caso di un materiale non omogeneo.



Possiamo immaginare che una certa ~~superficie~~ regione di spazio senza cariche in cui

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}$$



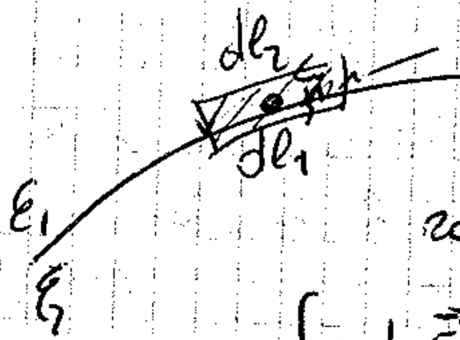
$$\int_{Vol} \operatorname{div} \vec{D} \, d\tau = \oint_{\partial Vol} \vec{D} \cdot \vec{dS} \Rightarrow D_{n_2} dS_2 - D_{n_1} \delta S_1 +$$

$+$ infinitesimi di ordine superiore $= 0$

Però $dS_2 = dS_1 = dS$

quindi si ha $D_{n_1} = D_{n_2}$

$$\varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}$$



infinitesimi di ordine sup.

$$\text{rot}\,\vec{E}=0$$

$$\int_S \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$\vec{E}_1\cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2\cdot d\vec{l}_2$ + infinitesimi di ordine sup $= 0$

$$E_{t_1}\,dl_1 - E_{t_2}\,dl_2 = 0$$

$$E_{t_1}\,dl_1 = E_{t_2}\,dl_2 \quad \text{se } dl_1 = dl_2$$

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$

Cioè componente tg del campo elettrico si conserva!

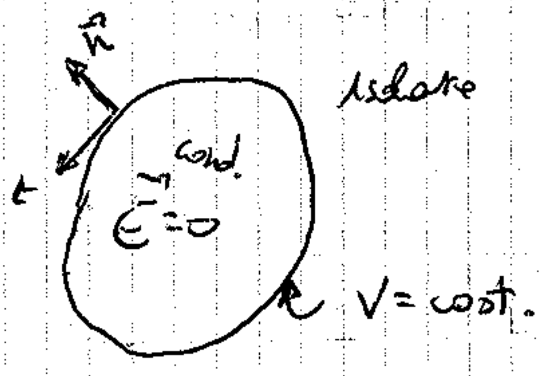
— o — o — o —

~~Campo di corrente statico~~

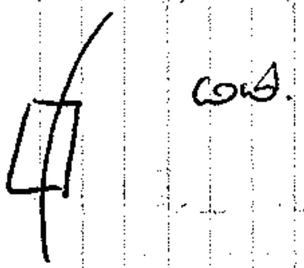
Conduttori $\quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 10^{-18}\,s$

isolanti $\quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 10^{6}\,s$

Con materiali isolanti campo statico
con materiali conduttori le cariche si muovono e non si ha più campo statico. Unico caso: $\vec{E} = 0$



Cariche ci possono essere, ma solo sul bordo.
Il campo elettrico può solo essere ortogonale alla superficie (se avesse componente tg ci sarebbe moto di cariche).
La superficie di un materiale conduttore è equipotenziale.

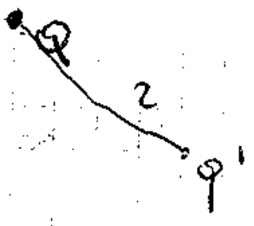
15. 

$$\text{div}\, \vec{D} = \rho$$

$$\int_V \text{div}\, \vec{D}\, d\tau = \int_V \rho\, d\tau = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{dS} =$$

Si ha che le in condizioni statiche
⇒ Un nessuno vieta di avere cariche all'interno del conduttore, ma dopo $10^{-18}\,s$ sono tutte distribuite sul bordo.
Quindi un conduttore è sempre equipotenziale in condizioni stazionarie.

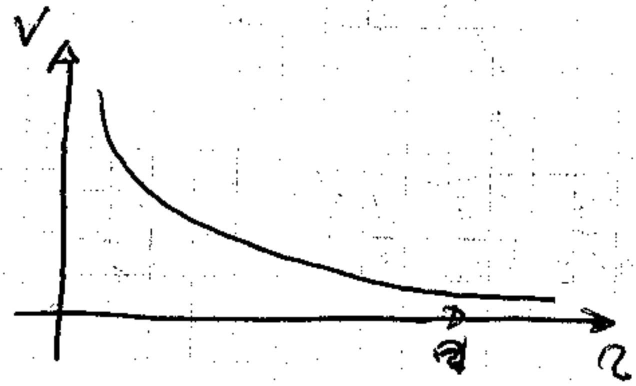
$$\vec{F} = \frac{q q'}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$$



$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho}{r}\, d\tau = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + cost$$

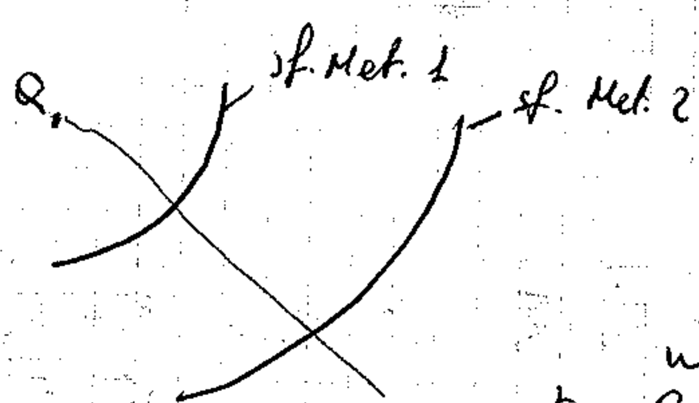
$$\vec{E} = -grad\, V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$$



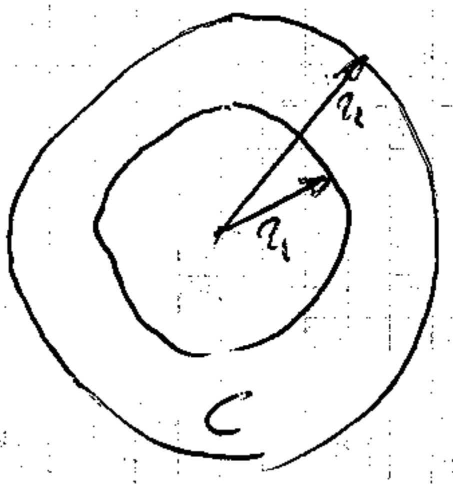
impongo che $\lim_{r\to\infty} V = cost$

la soluzione di un problema di campo è unica.

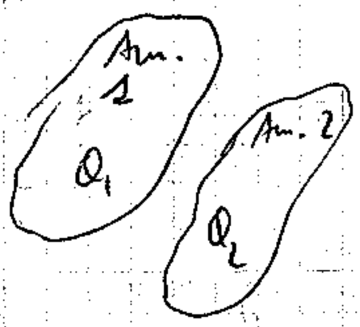
Campo di un volume isolante tra due sfere metalliche:



Il campo tra le due sfere metalliche è uguale al campo tra le due sup. equipotenziali non metalliche.



$$C = \frac{\int \vec{D}\,\vec{ds}}{\int \vec{E}\,\vec{dl}} \qquad [\text{Farad}]$$

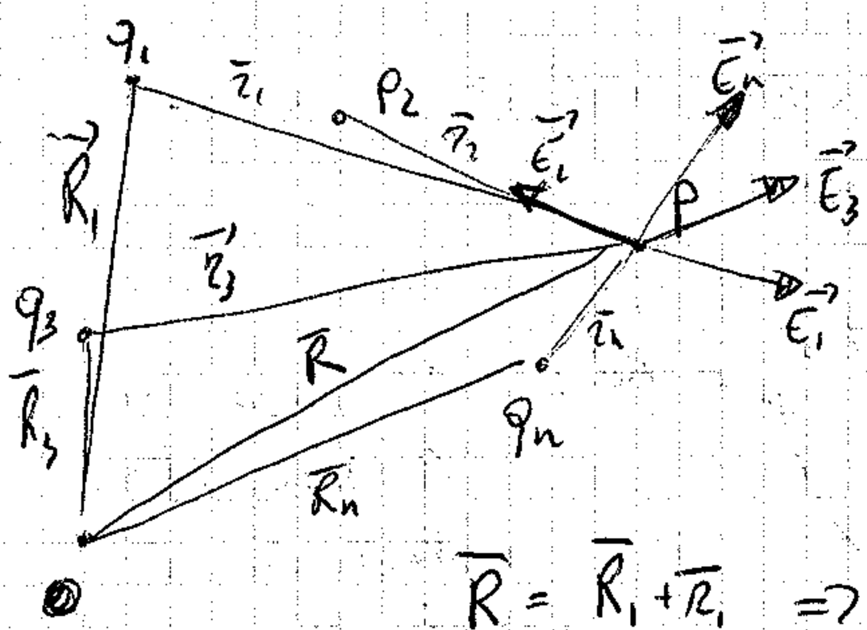


$$Q_1 + Q_2 = 0$$

In questo caso $\int \vec{D}\,\vec{ds} = q$

$$C = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon a_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

consideriamo il caso di n cariche supponendo ε costante.



$$\vec{E} = \sum_{K=1}^{n} \vec{E}_K$$

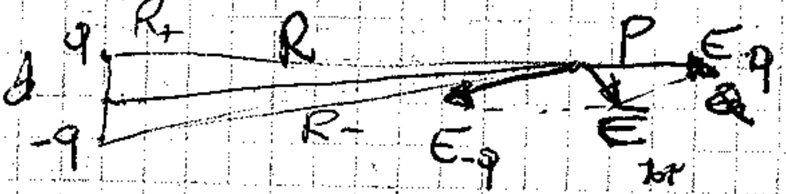
$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{r}_1 \Rightarrow r_1 = \bar{R} - \bar{R}_1$$

$$r_n = \bar{R} - \bar{R}_n$$

Quindi $\vec{E} = \sum_{K=1}^{n} \frac{q_K (R - R_K)}{4\pi\varepsilon\,(R - R_K)^3}$

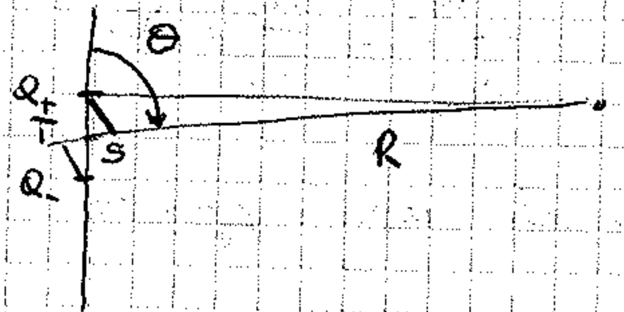
$$V_P = \sum_{K=1}^{n} \frac{q_K}{4\pi \varepsilon r_K}$$

Dipolo elettrico



$$V(P) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

Immaginiamo un sistema di rif. alentrico



$R_+ \simeq R - \frac{d}{2}\cos\theta = \overline{S}$

$R_- \simeq R + \frac{d}{2}\cos\theta = \overline{TP}$

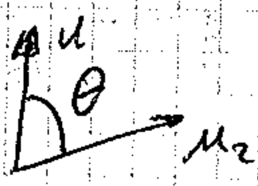
$$V(P) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon}\left(\frac{1}{R - \frac{d}{2}\cos\theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2}\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon}\left(\frac{\cancel{R} + \frac{d}{2}\cos\theta - \cancel{R} + \frac{d}{2}\cos\theta}{R^2 - \cancel{\frac{d^2}{4}\cos^2\theta}}\right) =$$

trascurabile

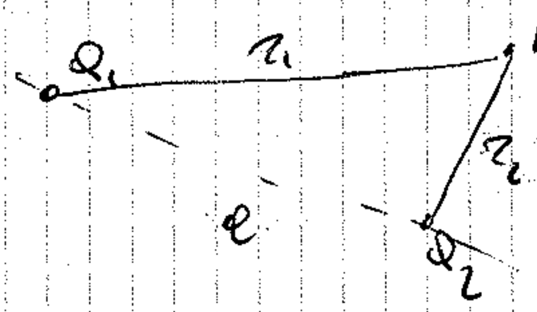
$$\simeq \frac{Q}{4\pi \varepsilon}\left(\frac{d\cos\theta}{R^2}\right) = \frac{\vec{m}\cdot\vec{\mu_2}}{4\pi \varepsilon R^2}$$

con $\vec{m} = q\,d\,\vec{u}$



il potenziale di dipolo decresce con il quadrato delle distanza.

Torniamo al caso di due cariche

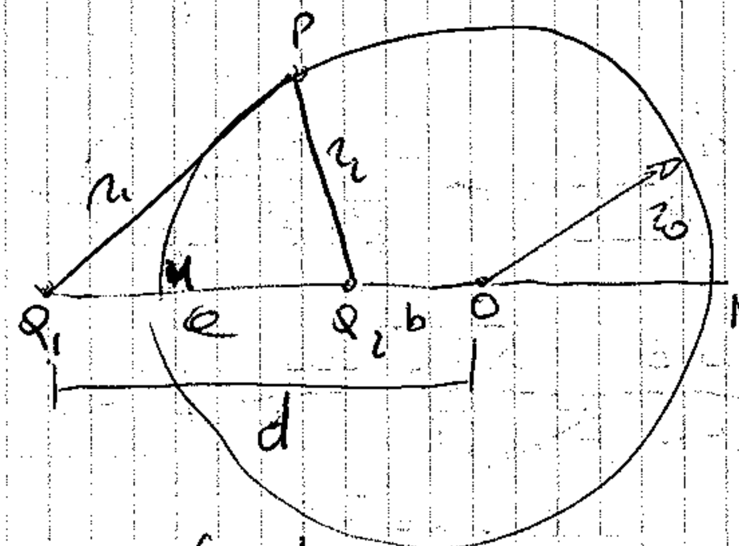


$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right)$$

$$\exists\ Q_1, Q_2 : V = 0 \ ?$$

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0 \qquad -\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2} = k$$

le cariche devono essere di segno opposto



in M: $\dfrac{e+b-r_0}{r_0-b} = k$

in N: $\dfrac{e+b+r_0}{r_0+b} = k$

$$\begin{cases} e+b-r_0 = kr_0 - kb \\ e+b+r_0 = kr_0 + kb \end{cases}$$

$$\cancel{2}(e+b) = \cancel{2}kr_0$$

$$kr_0 = e+b = d \Rightarrow \frac{d}{r_0} = k$$

$$\cancel{2}/r_0 = \cancel{2}Kb \Rightarrow \frac{r_0}{b} = K$$

$$\frac{d}{b} = K^2$$

$$a+b = Kr_0$$

$$a + \frac{r_0}{K} = Kr_0 \Rightarrow r_0\left(\frac{K^2-1}{K}\right) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{aK}{K^2-1} \qquad b = \frac{r_0}{K} = \frac{a}{K^2-1}$$

$$d = \frac{aK^2}{K^2-1} = a+b$$

Se mi interessa una sfera non ha potenziale zero inserisco una carica al centro della sfera.

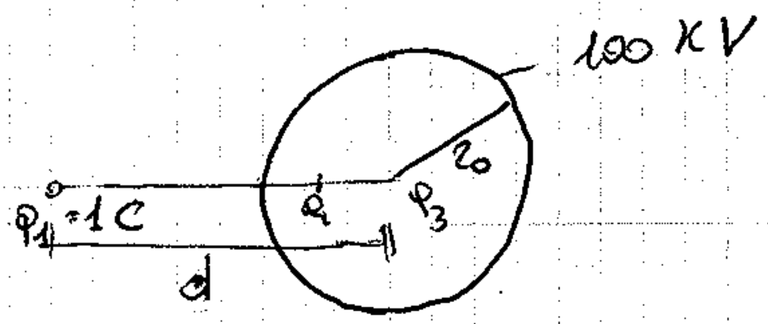
$$\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} = V_{sfera}.$$

Con 3 cariche puntiformi sono in grado di studiare il problema di campo elettrico.

Carica q_1 carica vera.

q_3 assegna potenziale alla sfera

q_2 genera la sfera di potenziale 0



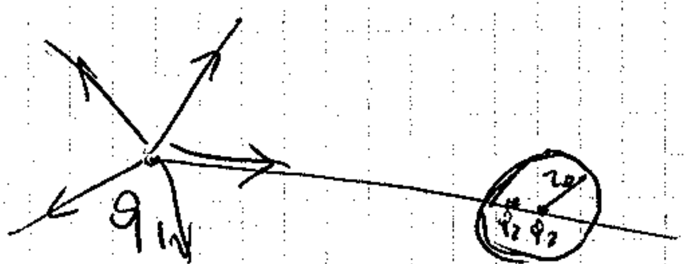
Pongo:

$$Q_S = Q_2 + Q_3 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow Q_3 = -Q_2, \text{ ma}$$

$$Q_2 = -\frac{Q_1 r_0}{d} \Rightarrow Q_3 = \frac{Q_1 R_0}{d}$$

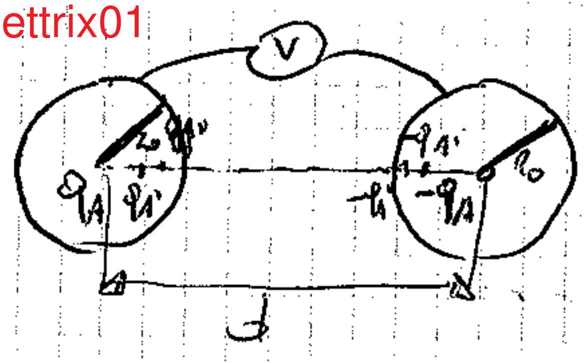
$$V_S = \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon d}$$

Vuol dire che se inserisco una sfera ad una distanza (centro-carica) pari a d dalla carica allora la sfera assume il potenziale che aveva prima il centro della sfera.



$E_{\text{con sfera}} \cong 3\, E_{\text{senza sfera}}$.

Un impunità di un conduttore può causare l'aumento del campo elettrico fino a 3 volte e può essere la causa della rovina del dielettrico.



$V_s = V_{AB} = \left(\frac{1}{2}V_s\right) - \left(-\frac{1}{2}V_s\right)$

$$\frac{q_A}{4\pi\varepsilon r_0} = \frac{1}{2}V_s \Rightarrow Q_A = 2\pi\varepsilon r_0 V_s$$

$$Q_A = 2\pi\varepsilon V_s r_0$$

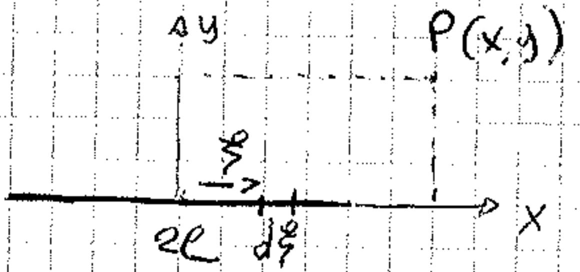
$$Q_A' = -\frac{q_A r_0}{d} \;;\quad b = \frac{d}{k^2} = \frac{r_0^2}{d} \;;\quad d' = d - b$$

$$Q_A'' = \frac{q_A' r_0}{d'} \;;\quad b' = \frac{r_0^2}{d'} \;;\quad d'' = d' - b'$$

$$C = \frac{Q}{V_s} = \frac{Q_A + Q_A' + Q_A'' + \dots}{V_s}$$

~~C è quello da segmento~~

Sia dato un segmento lungo 2ℓ

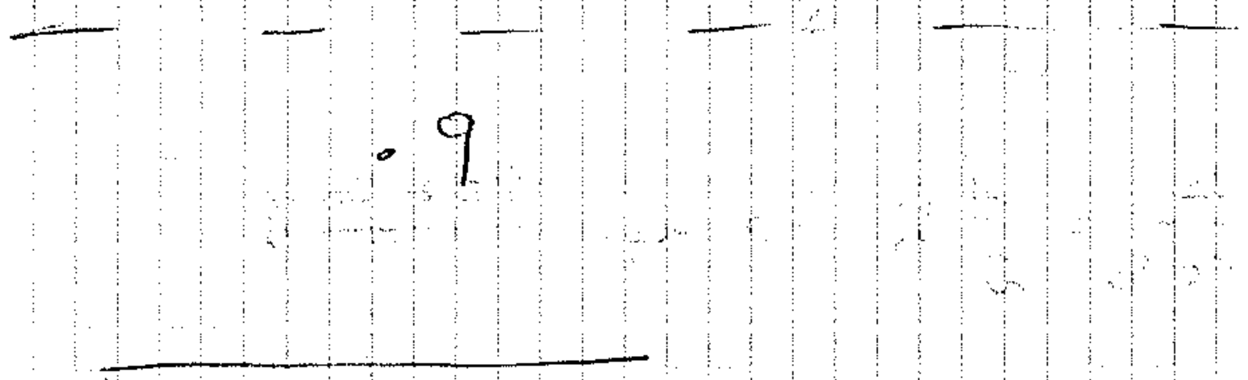


$$\frac{Q}{2\ell} = q$$

$$dq = q\,d\xi \qquad dV = \frac{q\,d\xi}{4\pi\varepsilon r} = \frac{q\,d\xi}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}$$

$$V(x,y) = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{q\,d\xi}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\ln\left[\frac{(x+\ell)+\sqrt{(x+\ell)^2+y^2}}{x-\ell+\sqrt{(x-\ell)^2-y^2}}\right]$$

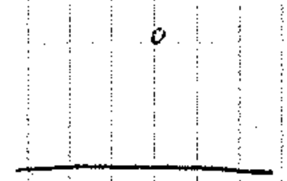
i punti allo stesso potenziale si trovano su un ellissoide.

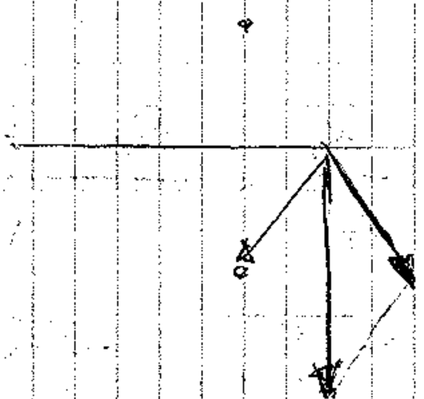


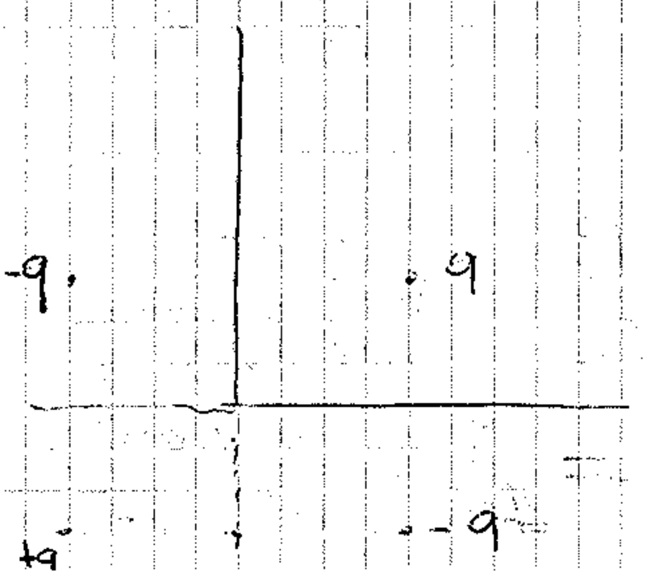
Le equipotenziali parallele → campo $\vec{E}$ ortogonali

· −q

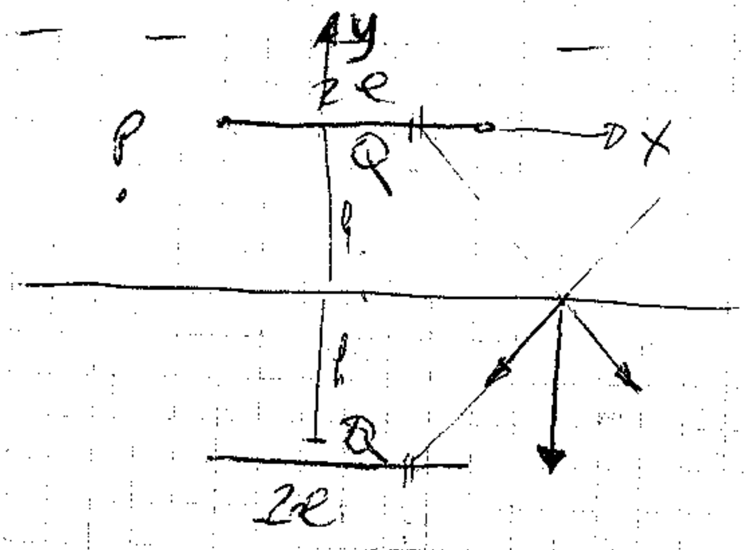
Problema misto | Problema successivo







Dal punto di vista dei campi elettrostatici il terreno è un materiale conduttore.



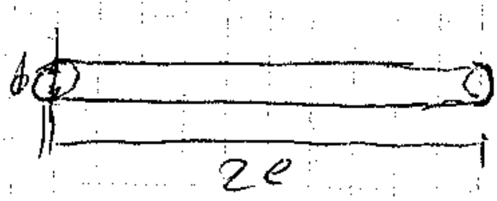
piano equip.

(14)

$$V_p(P) = V'_{Q_{reale}} + V''_{Q_{immagine}}$$

$$V' = \frac{Q}{8\pi\varepsilon l} \ln\left[\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+y^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\right]$$

$$V'' = \frac{-Q}{8\pi\varepsilon l} \ln\left[\frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+(2h-y)^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+(2h-y)^2}}\right]$$



approssimo il cilindro ad un ellissoide vicino al segmento unico (posto lungo l'asse del cilindro).

Se $l \gg d$ $\quad \left(l^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$$= l\left[1 + \frac{d^2}{4l^2}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq$$

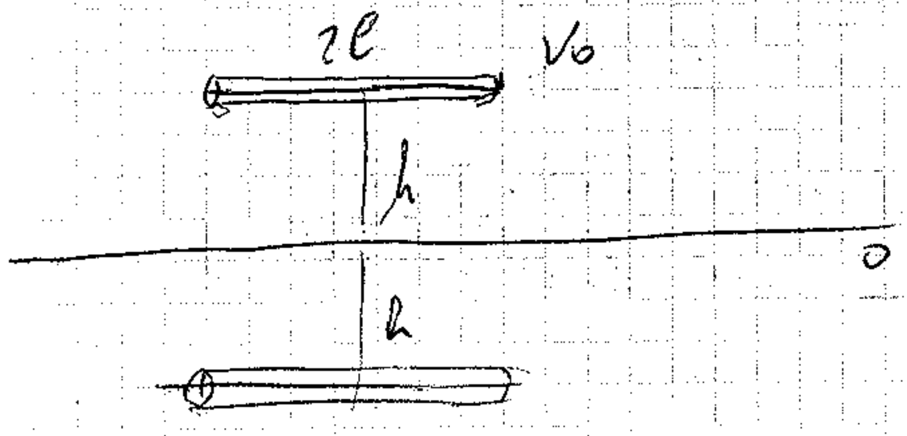
$$\left[1+\underbrace{\frac{d^2}{4l^2}}_{w}\right]^{\frac{1}{2}} = (1+w)^{\frac{1}{2}} \cong f(w)\Big|_{w=0} + f'(w)\Big|_{w=0} w =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} w = 1 + \frac{d^2}{8l^2}$$

Quindi

$$V\left(x=0, y=\frac{d}{2}\right) \cong \frac{Q}{8\pi\varepsilon l} \ln\left[\frac{l + l\left(1+\frac{d^2}{8l^2}\right)}{-l + l\left(1+\frac{d^2}{8l^2}\right)}\right] =$$

$$\frac{Q}{8\pi\varepsilon l} \ln\frac{16l^2}{d^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon l} \ln\frac{4l}{d}$$



$$C = \frac{Q}{V_0 - 0}$$

$$V_0 = V_0' + V_0''$$

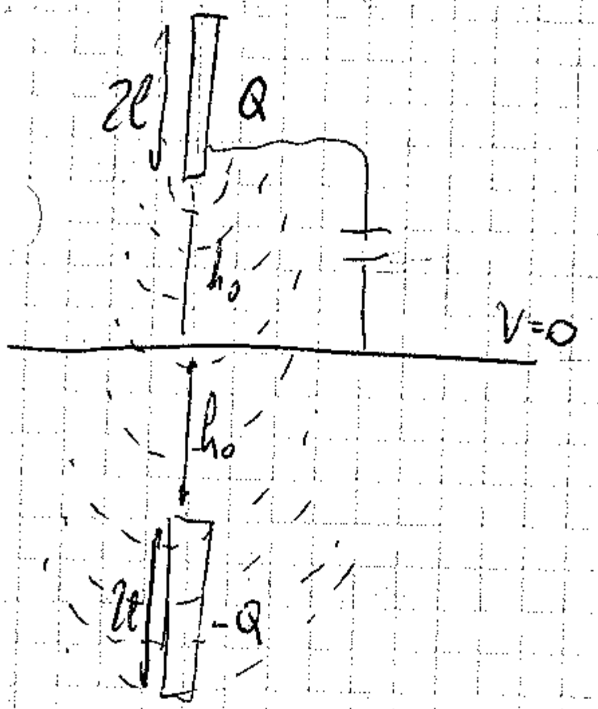
$$V_0' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon l} \ln\frac{4l}{d}$$

$$V_0'' = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon l} \ln\frac{l+\sqrt{l^2+4h^2}}{-l+\sqrt{l^2+4h^2}}$$

(15)

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon l} \ln \frac{4l}{d} \sqrt{\frac{-l + \sqrt{l^2+4h^2}}{l+\sqrt{l^2+4h^2}}}$$

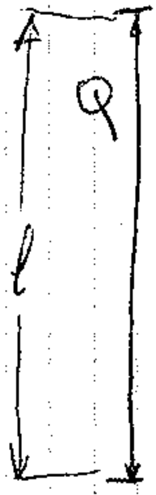
$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\varepsilon l}{\ln[\ldots]}$$



$V_0'\left(x=0,\ y=\frac{d}{2}\right)$

$V_0''\left(x=2h_0+2l,\ y=0\right)$

Caso della retta $q = \frac{Q}{l}$

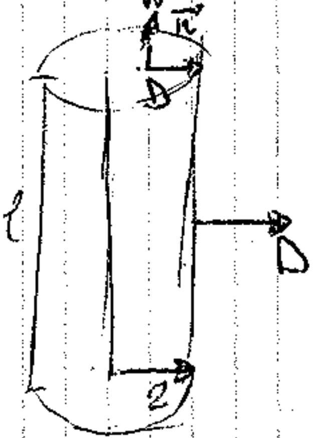


Al centro del segmento non si sentono gli effetti di bordo se il segmento è sufficientemente lungo.
Ci aspettiamo delle superfici equipotenziali che sono elissoidi molto allungati se l è abbastanza lungo.

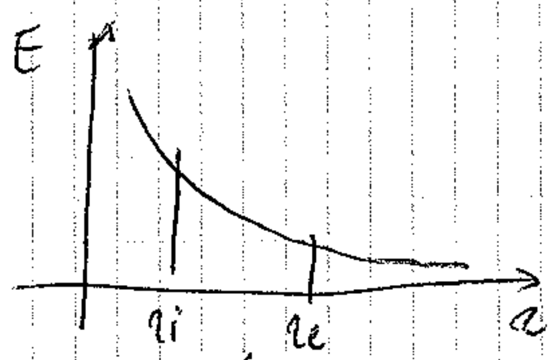
$$\vec{D} = D_r \vec{u}_r \Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{\underbrace{2\pi r l}}$$

superficie laterale del cilindro di raggio r



$$E = \frac{D_r}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l} = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}$$



$$\vec{E} = -\text{grad}\, V \qquad E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E_r\, dr$$

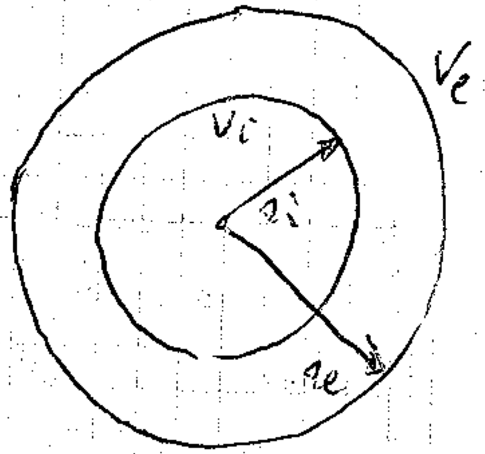
$$\boxed{V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r + \text{cost}}$$

Se $V = \text{cost} \Rightarrow \ln r = \text{cost} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r = \text{costante}}$

superfici equipotenziali

Vista dall'alto



$$V_i = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r_1 + \text{cost}$$

$$V_e = -\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln r_2 + \text{cost}$$

Se $r_e > r_i \Rightarrow V_i - V_e > 0$

$$V_i - V_e = +\frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

$$\frac{C}{\ell} = \frac{Q/\ell}{V_i - V_e} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

E_{max} nel condensatore cilindrico

$$E_{max} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\,\ell\,r_i} = \frac{C\,(V_i - V_e)}{2\pi\varepsilon\,\ell\,r_i} =$$

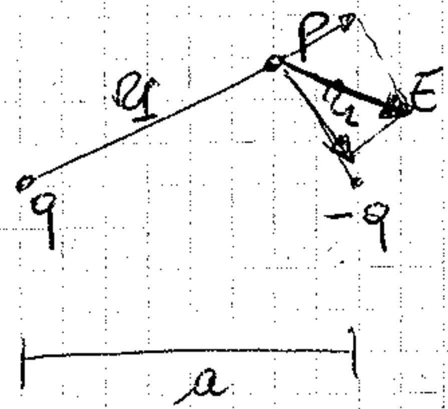
$$= \frac{V_i - V_e}{2\pi\varepsilon\ell}\;\frac{2\pi\varepsilon}{r_i\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} = \frac{V_i - V_e}{\ell\, r_e}\;\frac{\overset{w}{r_e/r_i}}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

$$= \frac{V_i - V_e}{\ell\; r_e}\;\frac{w}{\ln w}$$

Se vogliamo minimizzare il campo massimo

$$\frac{dE_{max}}{dW} = 0 \qquad \frac{r_e}{r_i} = e$$

Materiali ferroelettrici $\varepsilon_r \simeq 10^2 \div 10^3$ sono i materiali con ε_r maggiore in genere ε_r non è molto elevato..



cariche rettilinee (sezione perpendicolare)

Mi interessa calcolare il potenziale.

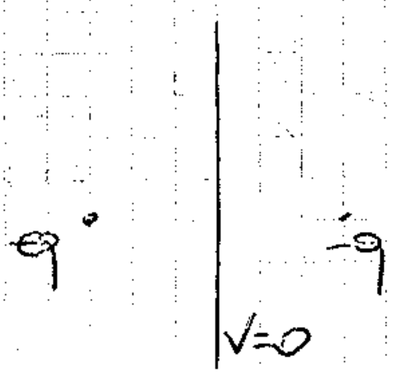
Le cariche devono essere uguali ma di segno opposto

$$V(P) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r_1 + cost + \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln r_2 + cost =$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + cost$$

il luogo dei punti equidistanti da q_+ e $-q$

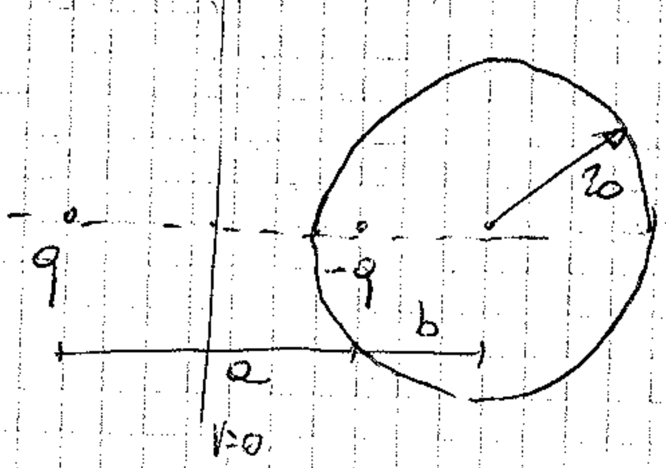
ho $V(P) = cost$ e pongo $V_{cost} = 0$



Se $V = cost = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$

cioè $\frac{r_2}{r_1} = cost$

le superfici equipotenziali sono il luogo dei punti in cui $\frac{r_2}{r_1} = K$



$$b = a\,\frac{1}{K^2-1}$$

$$r_0 = a\,\frac{K}{K^2-1}$$

$$d = a+b = \frac{a K^2}{K^2-1}$$

$$\frac{r_0}{b} = K \qquad \frac{d}{r_0} = K$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln K$$

Qualsiasi cilindro a destra del piano a potenziale 0 avrà potenziale < 0, mentre tutti i punti a sinistra avranno potenziale positivo.

le superfici equipotenziali nello spazio sono dei cilindri.

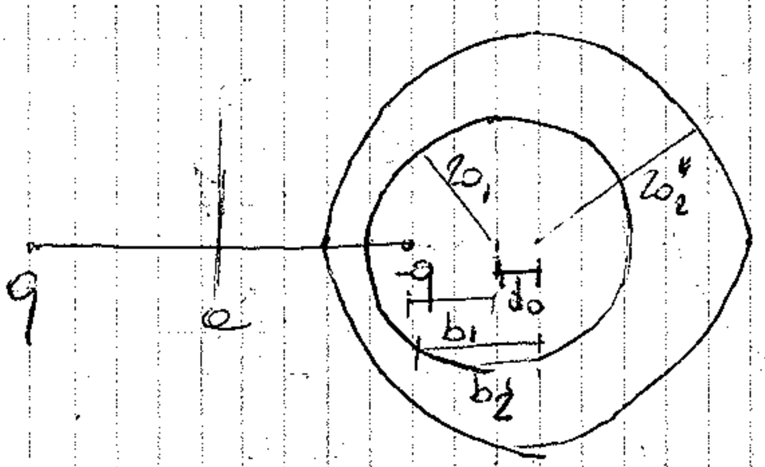
<u>Casi possibili</u>: – campo tra 2 cilindri

Cilindri uno interno all'altro

Conosciamo d_0

b_1, b_2

r_{o1}, r_{o2}, d_0



$$d_0 = b_2 - b_1 = e + b_2 - e + b_1 = d_2 - d_1$$

$$= \frac{r_{o2}}{K_2} - \frac{r_{o1}}{K_1} = K_2 r_{o2} - K_1 r_{o1}$$

$$\begin{cases} d_0 = \dfrac{r_{o2}}{K_2} - \dfrac{r_{o1}}{K_1} \\ d_0 = K_2 r_{o2} - r_{o1} K_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{K_2 = \dfrac{d_0 + K_1 r_{o1}}{r_{o2}}} \\ \cancel{d_0 = \dfrac{d_0 + K_1 r_{o1}}{r_{o2}} r_{o2} - r_o K_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_2 = \dfrac{d_0 + K_1 r_{o1}}{r_{o2}} \\ d_0 = \dfrac{r_{o2}^2}{d_0 + K_1 r_{o1}} - r_{o1}/K_1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$K_1 d_0^2 + K_1^2 r_{o1} d_0 = r_{o2}^2 K_1 - r_{o1} K_1 d_0 + (K_1 r_{o1})^2 \rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1^2 r_{o1} d_0 + K_1 (d_0^2 - r_{o2}^2) + r_{o1} d_0 + r_{o1}^2$$

$-r_{o1}$

$K_1 = ---$

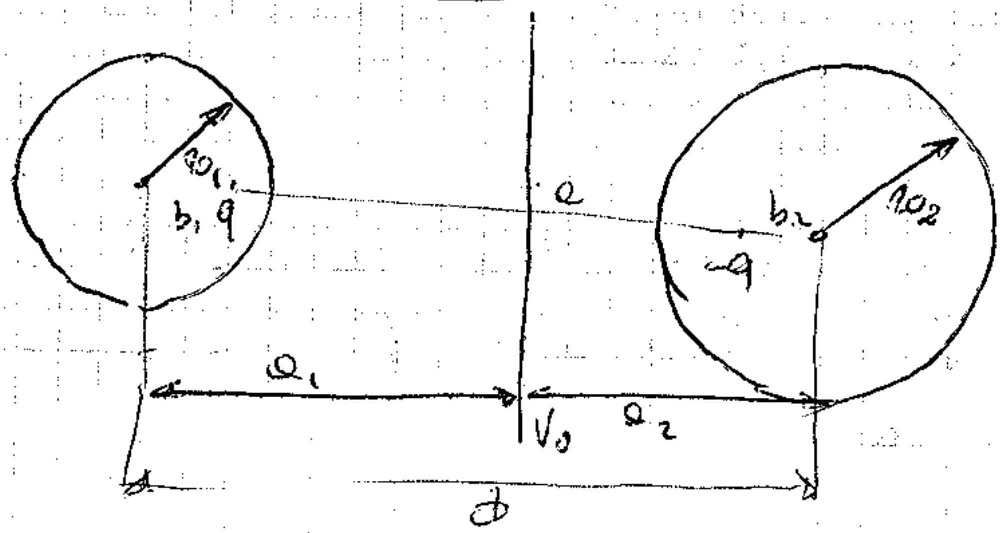
ovvio 2 soluzioni. Se io moltiplico tra loro le 2 soluzioni ottengo come risultato +1. Cioè le due soluzioni sono l'una l'inverso dell'altra.

$$K_1 = \frac{(r_{o2}^2 - r_{o1}^2 - d_o^2) \pm \sqrt{(\,) - 4 r_{o1}^2 d_o^2}}{2 r_{o1} d_o}$$

$$K_2 = \frac{(r_{o2}^2 - r_{o1}^2 + d_o^2) \pm \sqrt{(\,) - 4 r_{o2}^2 d_o^2}}{2 r_{o2} d_o}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{K_1}{K_2}}$$

- Cilindri uno esterno all'altro



$$d = a_1 + a_2 = e + b_1 + b_2$$

$$a_1 = \frac{d_1 + b_1}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{d_2 + b_2}{2}$$

$$a_1 = (r_{o2}^2 - r_{o1}^2 + d_o^2) / 2d_o$$

vedi prec.

$$a_2 = (r_{o2}^2 - r_{o1}^2 - d_o^2) / 2d_o$$

$$K_1 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - r_{o1}^2}}{r_{o1}}$$

$$K_2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - r_{o2}^2}}{r_{o2}}$$

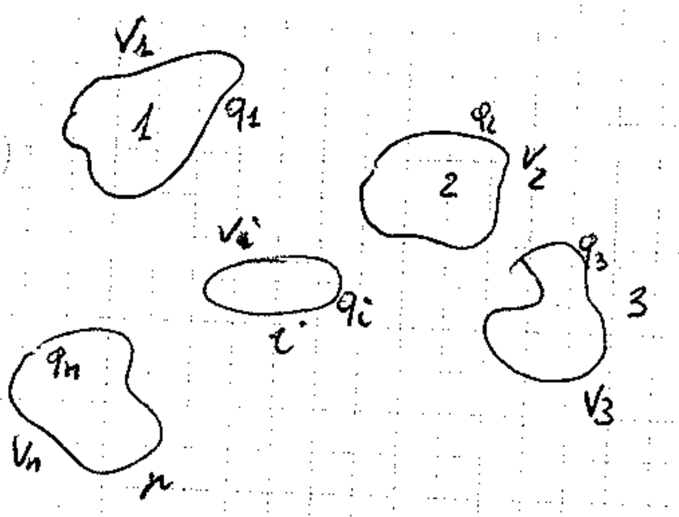
$$a_1 = \frac{d^2 - r_{o2}^2 + r_{o1}^2}{2d} \qquad a_2 = \frac{d^2 + r_{o2}^2 - r_{o1}^2}{2d}$$

$$K_1 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - r_{o1}^2}}{r_{o1}}$$

$$K_2 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - r_{o2}^2}}{r_{o2}}$$

Se $d \gg r_o$ allora b è trascurabile rispetto ad a e si può far coincidere d con a

15/4/'10



Possiamo scrivere il potenziale in questo modo:

$$\begin{cases} V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n + \text{cost} \\ V_2 = a_{21} q_1 + \dots + a_{2n} q_n + \text{cost} \\ \vdots \\ V_n = a_{n1} q_1 + \dots + a_{nn} q_n + \text{cost} \end{cases}$$

Prendiamo un conduttore come riferimento e calcoliamo la diff. di potenziale

$$V_1 - V_n = V_1' = \overbrace{(a_{11} - a_{n1})}^{a_{11}'} q_1 + \dots + \overbrace{(a_{1n} - a_{nn})}^{a_{1n}'} q_n$$

$$V_2 - V_n = V_2' = (a_{21} - a_{n1}) q_1 + \dots + (a_{2n} - a_{nn}) q_n$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1} - V_n = V_{n-1}' = (a_{n-1} - a_{n1}) q_1 + \dots + (a_{n-1,n} - a_{nn}) q_n$$

Non tutte le cariche sono indipendenti, perché se consideriamo il sistema isolato si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 0$$

Quindi possiamo definire:

$$q_n = -q_1 - q_2 - \dots - q_{n-1}$$

Quindi il sistema sarà

$$\begin{cases} V_1' = a_{11}' q_1 + a_{12}' q_2 + \dots + a_{1n}' (-q_1 - q_2 - \dots - q_{n-1}) = \\ \quad = \underbrace{(a_{11}' - a_{1n}')}_{b_{11}} q_1 + \dots + \underbrace{(a_{1(n-1)}' - a_{1n}')}_{b_{1,n-1}} q_{n-1} \\ \vdots \\ V_{n-1}' = (a_{n-1}' - a_{n-1,n}') q_1 + \dots + (a_{n-1,n-1}' - a_{n-1,n}') q_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1' = b_{11} q_1 + \dots + b_{1,n-1} q_{n-1} \\ \vdots \\ V_n' = b_{n-1,1} q_1 + \dots + b_{n-1,n-1} q_{n-1} \end{cases}$$

Può essere scritto in forma matriciale

$$[V'] = [b][q]$$

$$[q] = [b]^{-1} [V'] = [t][V']$$

matrice di capacità

Possiamo perciò scrivere

$$\begin{cases} q_1 = C_{11} V_1' + C_{12} (V_1' - V_2') + \dots + C_{1,n-1} (V_1' - V_{n-1}') \\ q_2 = C_{21} (V_2' - V_1') + C_{11} V_2' + \dots + C_{2,n-1} (V_2' - V_{n-1}') \\ \vdots \\ q_{n-1} = C_{n-1,1} (V_{n-1}' - V_1') + \dots + C_{n-1,n-1} V_{n-1}' \end{cases}$$

Se raccogliamo V_1' otteniamo:

$$\begin{cases} q_1 = \overbrace{(C_{11}+C_{12}+\dots+C_{1n-1})}^{t_{11}} V_1' \underbrace{-C_{12}}_{t_{12}} V_2' \underbrace{-C_{13}}_{t_{13}} V_3' - \dots \underbrace{-C_{1n-1}}_{t_{1n-1}} V_{n-1}' \\ q_2 = -C_{21} V_1' + (C_{21}+C_{22}+\dots+C_{2,n-1}) - \dots - C_{2,n-1} V_{n-1}' \\ \vdots \end{cases}$$

abbiamo ricavato la matrice di capacità $[t]$

la matrice $[t]$ è simmetrica.

$$t_{11} = C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1n-1}$$

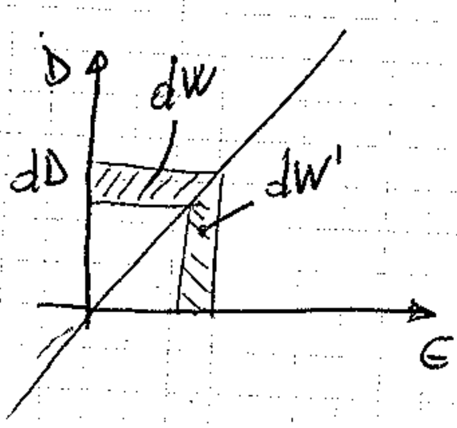
$$t_{12} = -C_{12} \qquad t_{1,n-1} = -C_{1,n-1}$$

$$t_{21} = -C_{21} = -C_{12} \qquad t_{22} = C_{21} + C_{22} + C_{23} + \dots + C_{2,n-1}$$

$$\begin{cases} q_1 = t_{11} V_1' + t_{12} V_2' + \dots + t_{n-1} V_{n-1}' \\ \vdots \\ q_n = t_{n1} V_1' + \dots + t_{n-1,n-1} V_{n-1}' \end{cases}$$

Considerazioni energetiche

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



$$dW = \vec{E}\, d\vec{D} = E\, dD$$

$$dW' = \vec{D}\, d\vec{E} = D\, dE$$

$$\mathcal{E} = \int_{\text{Volume}} (dW)\, d\tau \qquad \mathcal{E}' = \int_{\text{Volume}} dW'\, d\tau$$

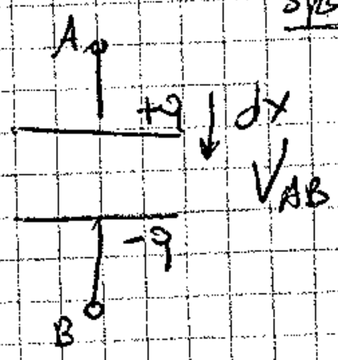
energia

coenergia

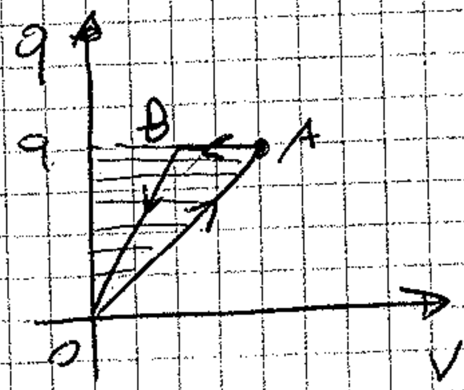
di conseguenza

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Spostamento di armatura in cost.



$V dq$



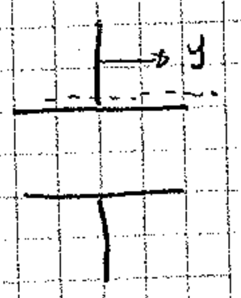
Tratto $\overline{AO}$ netto ingresso una parte di energia spostando le armature (Passando da AB) faccio energia meccanica (area triangolo $O\hat{A}B$)

Ritornando in O rilascio la parte restante dell'energia

$$F_x dx = -d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = -\frac{1}{2} Q^2 d \frac{1}{C}$$

$$F_x = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx}\frac{1}{C} \qquad C = \frac{\epsilon S}{x}$$

Slittamento di armature

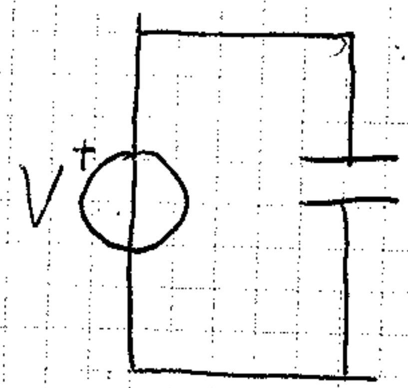


$$f_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{D = cost}$$

$$VI\,dt = V\,dq = P\,dt = d\mathcal{E}$$

$$d\mathcal{E} = V\,dq = d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right)$$

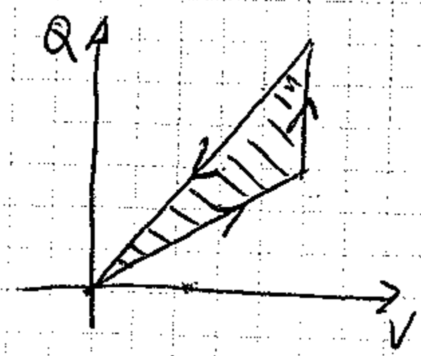
$$Q = CV$$



$$Q = CV$$

sposto le armature
(le armano)

$$V\,dQ = F_x\,dx + d\left(\frac{1}{2}CV^2\right)$$



$$F_x = +\left.\frac{d\mathcal{E}'}{dx}\right|_{V=\text{cost}}$$