CAMPI (elettromagnetici) QUASI STAZIONARI

$$\text{rot}\, E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\, \vec{B} = 0$$

$$\text{rot}\, \vec{H} = J + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

correnti di spostamento (in campi quasi stazionari è trascurabile in questa equazione)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{div}\, \vec{D} = \rho$$

Possiamo studiare questo tipo di campo come somma di pot. vettore e scalare.

$$\text{rot}\, E = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\, \vec{A} = -\text{rot}\, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\, \vec{E} + \text{rot}\, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{rot}\underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)} = 0$$

dimensionalmente è un campo elettrico

Possiamo introdurre un potenziale V di $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Quindi
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad}\, V$$

$$\text{rot}\, \vec{H} = \text{rot}\, \frac{\vec{B}}{\mu} = \text{rot}\, \frac{1}{\mu}\,\text{rot}\, \vec{A} - \sigma \vec{E}$$

$$\text{rot}\,\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\vec{A} = \sigma\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\,V\right)$$

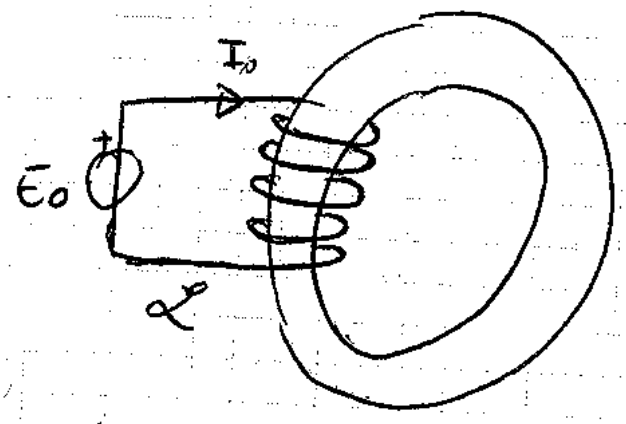
Se μ costante (quindi si può portar fuori dal rotore)

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{A}) = \text{grad}\,\text{div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \sigma\mu\left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\,V\right)$$

Poniamo la $\text{div}\,\vec{A} = 0$ (condizioni di normalizzazione).

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\,V$$

• In corrente continua

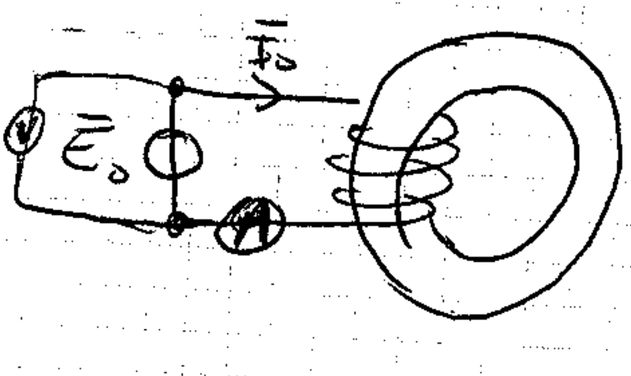


$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}\,d\vec{l} = -\oint_{\mathcal{L}} \text{grad}\,V\,dl$$

$$R I_0 - E_0 = 0$$

In questo caso interessa il conduttore e basta

• In corrente alternata



Mi aspetto una corrente, ma trovo che è quasi nulla

$$\oint_{\ell} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\oint_{\ell} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{\ell} - \oint_{\ell} \text{grad}\, V d\ell$$

$$Ri - e_0(t) = -\frac{d\lambda}{dt} - 0 \quad *$$

ricordiamo che $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$

$$\int_S \vec{B}\, d\vec{s} = \lambda = \int_S \text{rot}\,\vec{A}\, d\vec{s} = \oint_{\ell = \partial S} \vec{A}\, d\ell$$

flusso magnetico

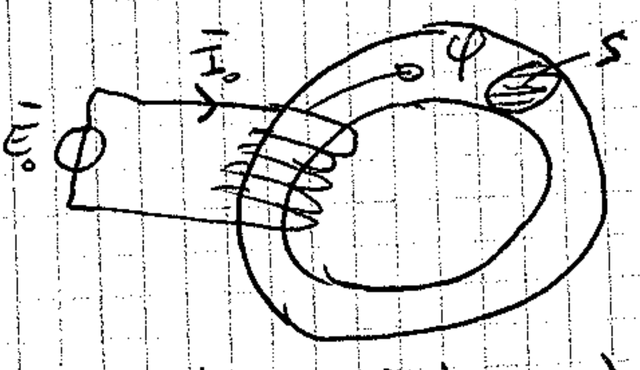
$$\Downarrow$$

$$\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{\ell} = \cancel{\oint} + \frac{d\lambda}{dt}$$

$$* \quad Ri + \frac{d\lambda}{dt} = e_0(t)$$

$$R\bar{I} + j\omega\bar{\lambda} = \bar{E}_0$$

Riprendiamo il circuito magnetico di prima



$$\varphi = \int_S B \cdot ds$$

se consideriamo ogni spira che fa il conduttore si ha $\lambda = N\varphi$

N n° di spire.

$$R\dot{I} + N\frac{d\varphi}{dt} = e_0$$

Inoltre si ha che $\oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\, d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\, d\vec{\sigma}$

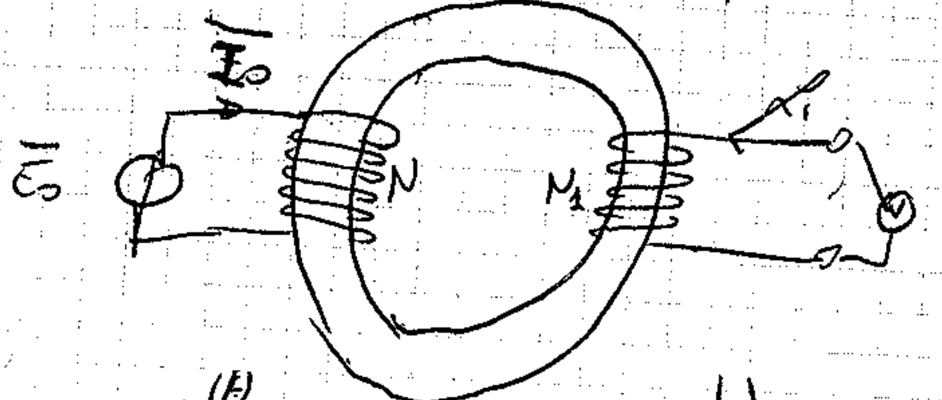
ottengo che $\mathcal{R}\varphi = Ni$

Unendo i risultati:

$$Ri + \underbrace{\frac{N^2}{\mathcal{R}}}_{L} \frac{di}{dt} = e_0$$

In questo caso prevale di molto il comportamento induttivo.

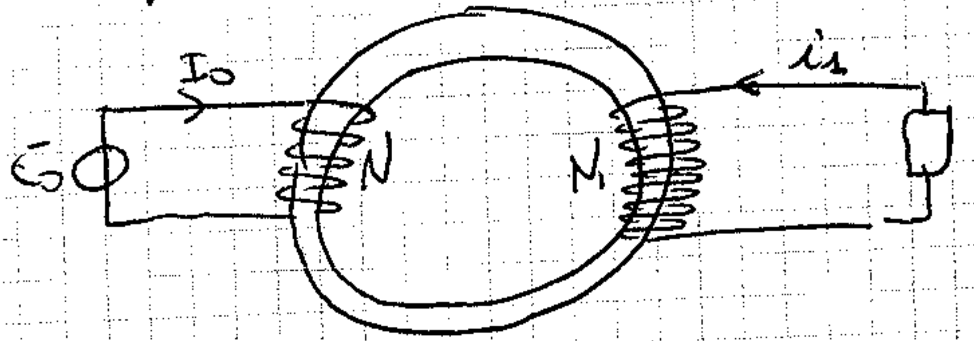
Consideriamo ora questo caso:



$\lambda_1^{(t)} = N_1 \varphi(t)$ $\qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{\frac{d\lambda_1}{dt}}{\frac{d\lambda}{dt}} = \frac{N_1}{N}$$

Complichiamo ulteriormente



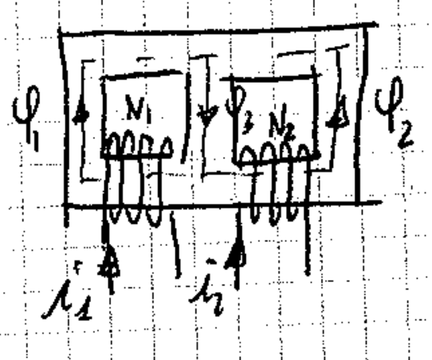
$$\mathcal{R}\varphi = N i_0 + N_1 i_1$$

$$\varphi = \frac{N}{\mathcal{R}} i_0 + \frac{N_1}{\mathcal{R}} i_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= N\varphi = \frac{N^2}{\mathcal{R}} i_0 + \frac{N_1 N}{\mathcal{R}} i_1 \\ \lambda_1 &= N_1 \varphi = \frac{N_1 N}{\mathcal{R}} i_0 + \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} i_1 \end{aligned}}$$

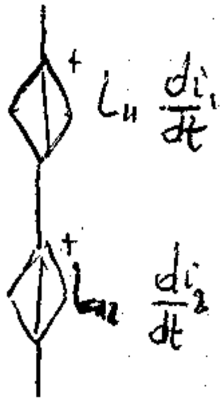
$$\begin{cases} \lambda = L_{00} i_0 + L_{01} i_1 \\ \lambda_1 = L_{10} i_0 + L_{11} i_1 \end{cases} \quad \text{con } L_{01} = L_{10}$$

Caso complicato

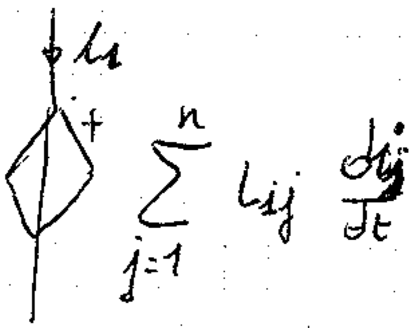


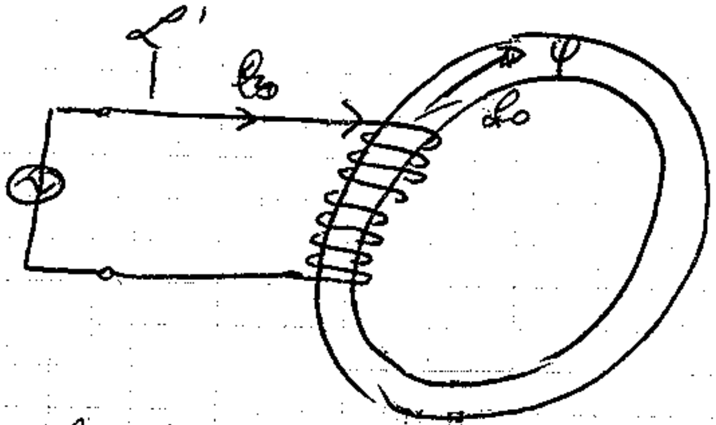
Le mutue induttanze hanno segno

Se ho più mutue posso indicarle così



oppure





Supponiamo $\mathcal{L} \doteq \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}'$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} - \oint \mathrm{grad}\, V d\vec{l}$$

$$= \int_{\mathcal{L}_0} + \int_{\mathcal{L}'}$$

A noi interessa particolarmente il comportamento della linea ($\mathcal{L}'$)

2 casi di <u>linee bifilari</u>:

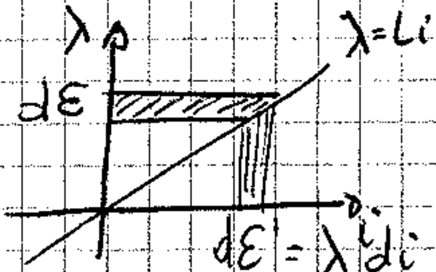
- cavo coassiale

- linea bifilare

Introduzione alle linee (discorso energetico)

$$p = v i \qquad v = \frac{d\lambda}{dt} \Rightarrow p = \frac{d\lambda}{dt} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\,dt = i\,d\lambda$$



Se $\lambda = Li \Rightarrow p\,dt = i\,d(Li) = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} L i^2 + cost$$

Decido che per $i = 0 \Rightarrow E = 0$

Per una trasformazione finita $E = E'$

Se abbiamo N sistemi induttivi

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11} i_1 + \dots + L_{1N} i_N \\ \lambda_2 = \dots \\ \lambda_3 \\ \lambda_n = L_{n1} i_1 + \dots + L_{NN} i_N \end{cases}$$

$$P_k = e_k i_k = \frac{d\lambda_k}{dt} i_k \Rightarrow P_k\,dt = i_k\,d\lambda_k =$$

$$= \left[d \sum_{j=1}^{N} L_{kj} i_j\right] i_k \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{P_k\, dt = \sum_{j=1}^{N} L_{kj}\, i_k\, di_j}$$

$$dt\, P_{tot} = \sum_{r=1}^{N} P_k \qquad\qquad P_{tot}\, dt = d\mathcal{E}$$

$$d\left(\frac{1}{2} L_{11} i_1^2\right)$$

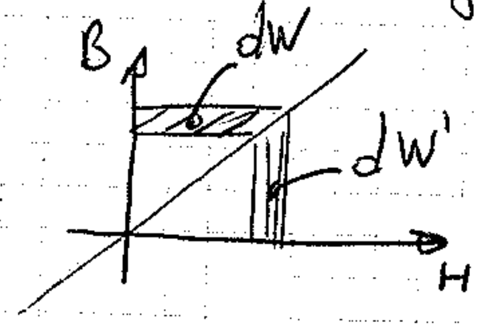
$$dt\, P_{tot} = L_{11}\, i_1\, di_1 + \boxed{L_{12}\, i_1\, di_2} + L_{13}\, i_1\, di_3 + \dots$$
$$+ \boxed{L_{21}\, i_2\, di_1} + L_{22}\, i_2\, di_2 + L_{23}\, i_2\, di_3 + \dots \quad =$$

$$L_{12}\, d(i_1 i_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} d\left(\frac{1}{2} L_{ij}\, i_i\, i_j\right)$$

$$\mathcal{E}_{tot} = \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{1}{2} L_{ij}\, i_i\, i_j\right)$$

discorso energetico campi

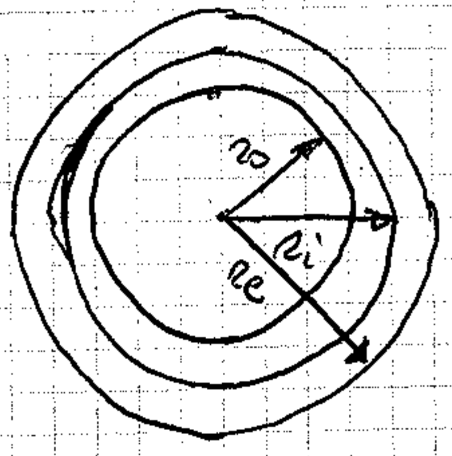


$$dW = H\, dB$$
$$dW' = B\, dH$$

$$W' = W = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

$$\mathcal{E} = \int_V W\, d\tau = \int_V \left(\int_{B_1}^{B_2} H\, dB\right) d\tau$$

CAVO COASSIALE



Ci aspettiamo linee di campo magnetico circonferenziali e aventi centro in comune con i conduttori.

$$\text{rot}\, H = J$$

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} d\vec{s}$$

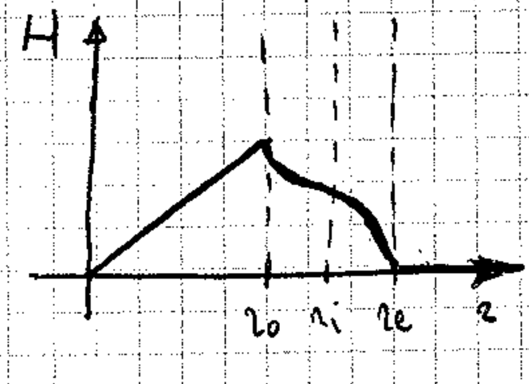
Per $0 < r < r_0$

$$H \cdot 2\pi \cancel{r} = \frac{I}{\cancel{\pi} r_0^2} \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \qquad H = \frac{I r}{2\pi r_0^2}$$

Per $r_0 < r < R_i$ $\quad H \cdot 2\pi r = I \quad H = \frac{I}{2\pi r}$

Per $R_i < R < R_e$ $\quad H \cdot 2\pi R = I - \frac{I}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} \pi (R^2 - R_i^2)$

$$H = \frac{1}{2\pi R} I \left(\frac{R_e^2 - R^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) = \frac{I}{2\pi (R_e^2 - R_i^2)} \frac{R_e^2 - R^2}{R}$$



Troviamo le energie immagazzinate nei volumi

$$\mathcal{E}_{int} = \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \mu H^2 \, r \, d\theta \, dr \, dz = \ell \cdot 2\pi \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \mu \left(\frac{r I}{2\pi r_0^2} \right)^2 r \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ell \mu I^2}{2\pi^2 r_0^{\cancel{4}}} \frac{1}{4} \cancel{r_0^4} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu \ell}{8\pi} \sim L_{int}$$

$$\mathcal{E}_{\text{interl.}} = \int_0^{\ell}\int_{r_0}^{r_i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\mu H^2)\, r\, d\theta\, dr\, dz = \frac{1}{2}\ell\mu 2\pi \int_0^{r_i}\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 r\, dr$$

$$= \ell\mu\pi \int_{r_0}^{r_i} \frac{I^2}{4\pi^2 r}\, dr = \frac{\ell\mu\pi I^2}{4\pi^2 R}\left[\ln r\right]_{r_0}^{r_i} =$$

(32)

$$= \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu\ell}{2\pi}\ln\frac{r_i}{r_0} \quad L_{is.}$$

$$\mathcal{E}_{est} = \frac{1}{2} I^2 \mu \ell \left[\frac{1}{2\pi(r_e^2 - r_i^2)}\right]^2 \int_{r_i}^{r_e} \frac{(r_e^2 - r^2)^2}{r}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} I^2 L_{est}$$

$\varphi_{int} = \ell\mu \int_0^{r_0} H\, dr$ da risultato sbagliato (manca coeff. di concatenamento).

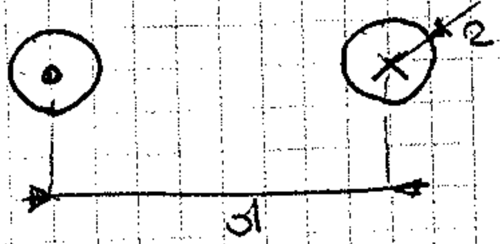
$\lambda_i = \ell\mu \int_0^{r_0} H\, dr \; \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2}$ coeff. di concatenamento (rapporto delle aree)

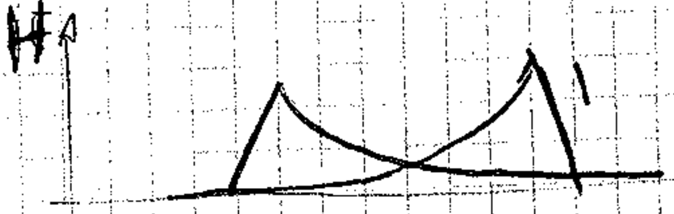
↳ flusso concatenato interno

$$\lambda_{isol} = \ell\mu \int H\, dr$$

$$\lambda_{est} = \ell\mu \int H\, dr \,\frac{r_e^2 - r^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

Linee con due conduttori





~~caso cavo coassiale~~

$$L = (L_{int} + L_{est})\,2$$

$$\int_0^l \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mu H^2 r \, d\theta \, dr \, dz = \frac{1}{2} L_{int} I^2 \Rightarrow$$

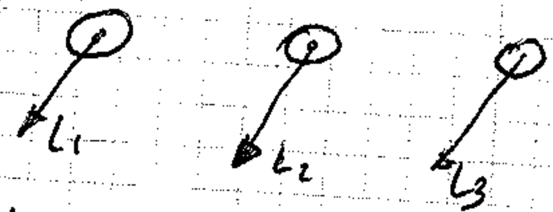
$$\Rightarrow L_{int} = \frac{\mu_0 \, l}{8\pi}$$

$$L_{est} \Rightarrow \lambda_{est} = \varphi_{est} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\lambda_{est} = \varphi_{est} = \mu_0 \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{I}{2\pi r} \, l \, dr = \frac{I \mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}$$

$$L_{spire} = 2l\left[\frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}\right]$$

$$L_{linea} = l \, \frac{\mu_0}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln \frac{d-r_0}{r_0}\right]$$



Assegno ad ogni singolo conduttore un autoinduttanza e le mutue induttanze con gli altri conduttori

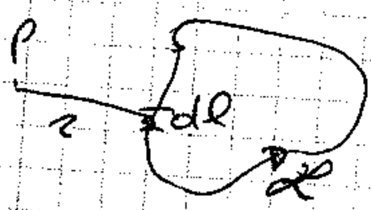
Formule di Neumann

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,H = J \rightarrow \mathrm{rot}\,\frac{B}{\mu} = J \; ; \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A = \mu J$$

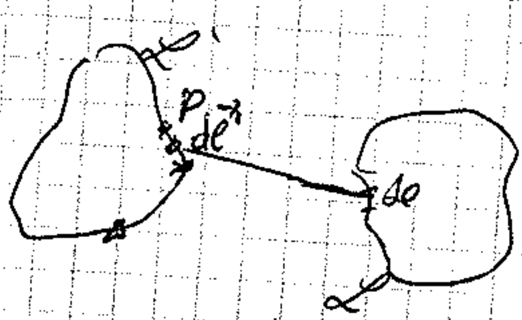
$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu J \qquad \vec{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\text{volume}} \frac{\vec{J}}{r}\, d\tau$$

caso semplice



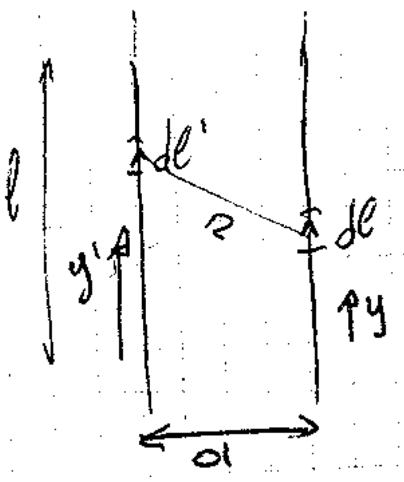
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$$

se ho



$$\oint_{\mathscr{L}'} \vec{A}' \, d\vec{l}' = \oint_{\mathscr{L}'} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r} \right) d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathscr{L}'} \oint_{\mathscr{L}} \frac{dl}{r}\, dl' = M I_{\mathscr{L}}$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathscr{L}'} \oint_{\mathscr{L}} \frac{dl}{r}\, dl'$$



$$dl' = dy'$$
$$dl = dy$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \frac{dy'\,dy}{\sqrt{(y'-y)^2+d^2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[l \ln\frac{l+\sqrt{l^2+d^2}}{-l+\sqrt{l^2+d^2}} - 2\sqrt{l^2+d^2}+2d\right]$$

$$\sqrt{l^2+d^2} \simeq l\left(1+\frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}\right) \qquad \text{se} \quad l \gg d$$

$$M \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\left[l \ln\frac{l\left(1+1+\frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}\right)^{\simeq 0}}{l\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}\right)} - 2l\left(1+\cancel{\frac{d^2}{2l^2}}\right)+\cancel{2d}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[l \ln\frac{4l^2}{\frac{d^2}{2l}} - 2l\right] \simeq$$

$$= \frac{\mu_0 l}{4\pi}\left[2\ln\frac{2l}{d} - 2 + \cancel{\frac{2d}{l}}\right] \simeq \frac{\mu_0}{2\pi}\, l\left[\ln\frac{2l}{d} - 1\right]$$

M non ha significato fisico, ma è grandezza di comodo.

$$\frac{M}{l} \simeq \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{d} - 1\right)$$ dipende da lunghezza!!!

autoinduttanza del conduttore

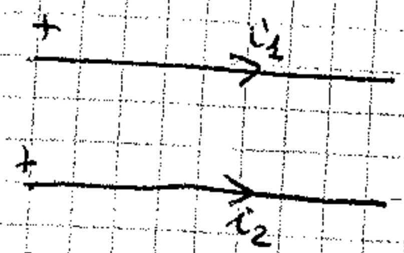
10

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{2\ell}{d_{medio}} - 1\right]$$

con $\ln(d_{medio}) = \ln(r_0) - \frac{1}{4}$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{2\ell}{r_0} - \frac{3}{4}\right)$$

Linea bifilare



λ_1 $\qquad \frac{d\lambda_1}{dt} = e_1$

λ_2 $\qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = e_2$

$$\begin{cases}\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2\end{cases}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[L_{11} i_1 + L_{12} i_2 - L_{21} i_1 - L_{22} i_2\right] =$$

se conduttori identici $L = L_{11} = L_{22}$ inoltre $L_{12} = L_{21} = M$

$i_2 = -i_1$

$$e_1 - e_2 = \frac{d}{dt}\left[(L-M) i_1 + (L-M) i_1\right] = \frac{d}{dt}\left(2(L-M) i_1\right)$$

$L-M$ è induttanza di servizio del conduttore

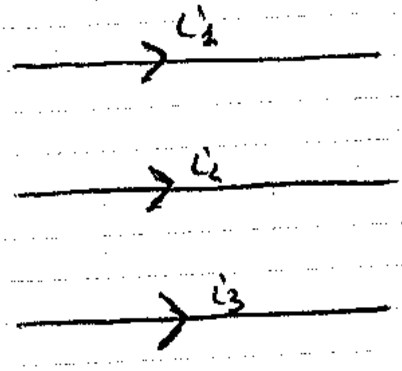
$$L-M = L_s = \frac{l\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{2l}{r_0} - \frac{3}{4} - \ln\frac{2l}{d} + 1\right] =$$

$$= \frac{l\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{d}{r_0} + \frac{1}{4}\right]$$

$$L_{linea} = \frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln\frac{d-r_0}{r_0} + \frac{1}{4}\right]$$ — flusso calcolato solo all'esterno ma anche nelle altre formule c'erano approssimazioni

$$\ln\frac{d-r_0}{r_0} \simeq \ln\frac{d}{r_0}$$

linee trifase



$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + L_{13} i_3 \\ \lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + L_{23} i_3 \\ \lambda_3 = L_{31} i_1 + L_{32} i_2 + L_{33} i_3 \end{cases}$$

Supponiamo che i conduttori siano disposti nei 3 vertici di un triangolo equilatero e quindi $L_{12} = L_{21} = L_{13} = L_{31} = L_{23} = L_{32} = M$ e

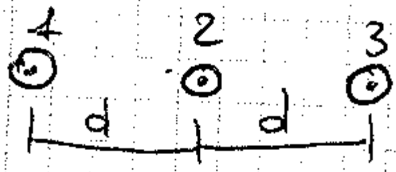
$L_{11} = L_{22} = L_{33} = L$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = L i_1 + M(i_2 + i_3) \\ \quad = (L-M) i_1 \\ \lambda_2 = M i_1 + L i_2 + M i_3 = L i_2 + M(i_1 + i_3) \\ \quad = (L-M) i_2 \\ \lambda_3 = (L-M) i_3 \end{cases}$$

$$L+M = L_s = \ell \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\ln \frac{d}{r_0} + \frac{1}{4}\right)$$

Se i conduttori sono disposti così:



$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = L$$

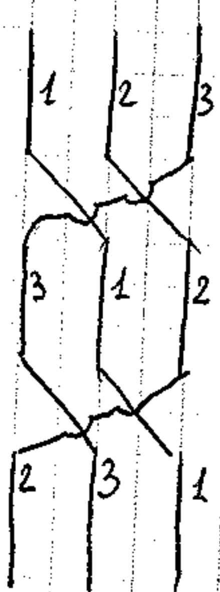
$$L_{12} = L_{21} - L_{23} = L_{32} = M$$

$$L_{13} = L_{31} = M'$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = L i_1 + M i_i + M' i_3 \\ \lambda_2 = M i_1 + L i_2 + M i_3 \\ \lambda_3 = M' i_1 + M i_2 + L i_3 \end{cases}$$

NON POSSO INTRODURRE l'induttanza di servizio

Per avere simmetria allora si può fare così



la mutua induttanza non è più la L_{12} o L_{13} ma è una media.

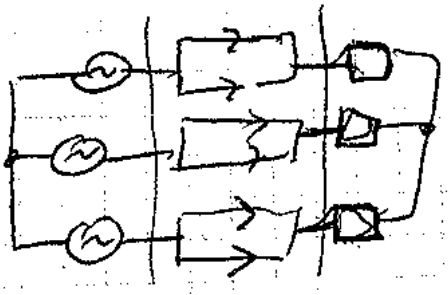
$$M_{media} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln \frac{2\ell}{d_{media}} - 1\right]$$

$$d_{media} = \sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}$$

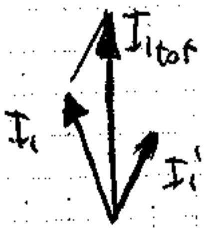
linea trifase con 2 conduttori per fase

1 1' 2 2' 3 3'

eq. circuitale



Problema come si dividono le correnti nei 2 conduttori



c'è dissimmetria tra le fasi e anche tra conduttori della stessa fase

Un metodo migliore

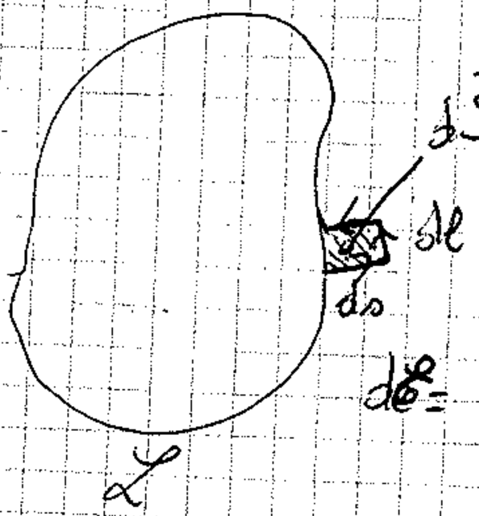
1 2 3 3' 2' 1' le correnti si dividono in modo uniforme.

oppure

1 2 3
3' 2' 1'

si hanno correnti uniformi

Legge di Faraday con corpi in movimento



$$d\vec{S} = d\vec{s} \times d\vec{\ell}$$

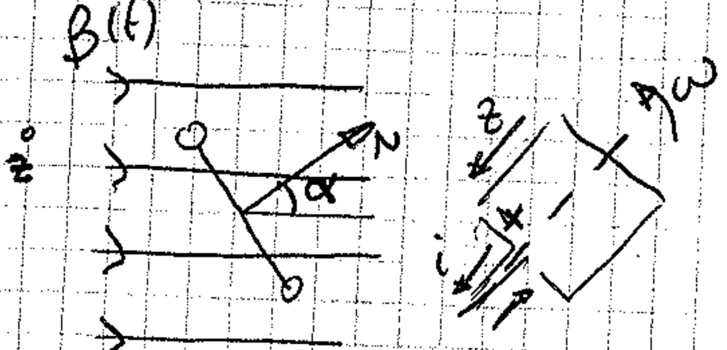
$$d^2\lambda = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$d\mathcal{E} = -\frac{d^2\lambda}{dt} = -\vec{B} \cdot \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times d\vec{\ell}\right)$$

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{L}} -\vec{B} \cdot \vec{v} \times d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{L}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\ell$$

forza elettromotrice indotta mozionale

Esempio



$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \qquad \lambda = \varphi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS\cos\alpha$$

$$e = -\frac{d}{dt} BS\cos(\alpha) = -\left[\frac{dB}{dt} S\cos\alpha\right] + BS(-\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \qquad \alpha - \alpha_0 = \int_0^t \omega\, dt$$

Se $\omega = cost \Rightarrow \alpha - \alpha_0 = \omega t$

$$e(t) = \underbrace{-\frac{dB}{dt} S \cos(\omega t + \alpha_0)}_{\text{trasformatorica}} + \underbrace{B(t) S \sin(\omega t + \alpha_0)\omega}_{\text{mozionale}}$$

VETTORE DI POINTING

$$\left.\begin{aligned} rot\,\bar{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ rot\,\vec{E} &= -\frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\text{reg. sinusoidale}}{\begin{cases} rot\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} \\ rot\,\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot (rot\,\vec{H})^* \\ \vec{H}^* \cdot rot\,\vec{E} \end{cases}$$

In un circuito $\bar{A} = \bar{V}\bar{I}^* = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi$

$\bar{A}$: p. apparente

Per trovare il vettore di Pointing si può utilizzare un approccio simile.

$$\vec{E}\cdot(rot\,\vec{H})^* - \vec{H}^*\cdot(rot\,\vec{E}) = -\nabla(\vec{E}\times\vec{H}^*)$$

Dove $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H}$ è il vettore di Pointing

$$\vec{E}(rot\,\vec{H})^* - \vec{H}^*(rot\,\vec{E}) = [\sigma|E|^2 - j\omega\varepsilon|E|^2] - [-j\omega\mu|H|^2]$$

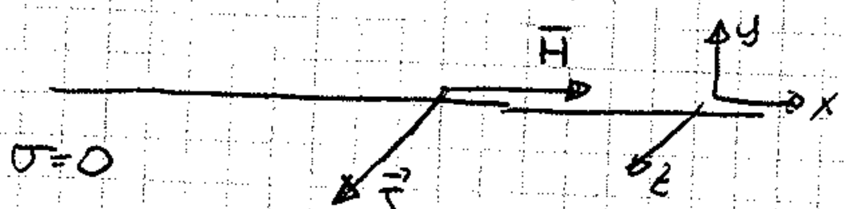
$$-div\,P = \sigma|E|^2 - j\omega\varepsilon E^2 + j\omega\mu|H|^2$$

$$-\int_{vol} \mathrm{div}\, P \, d\tau = \int \left[\sigma |E|^2 - j\omega\varepsilon |\vec{E}|^2 + j\omega\mu |H|^2\right] d\tau = -\int_{S=\partial\tau} \vec{P}\cdot d\vec{s}$$

$\sigma |E|^2 = \rho |J^2|$ effetto Joule totale all'interno del volume

$-\int \vec{P}\cdot d\vec{s}$ è la potenza complessa messa in gioco nel volume.

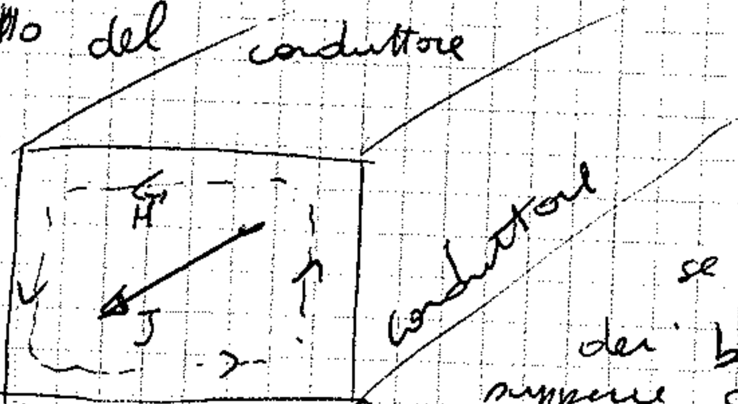
Esempio: consideriamo una regione dello spazio diviso in una parte conduttrice e in una no



$\vec{H} = (H,0,0)$

$\vec{J} = (0,0,J)$

Supponiamo che H e J non dipendano da z inoltre $\vec{H}$ e $\vec{J}$ siano sinusoidali. Mettiamoci in un volumetto del conduttore



in questo caso se sono lontano dai bordi posso supporre che H abbia sola componente x e J sola comp. z

Nel conduttore:
$$\begin{cases} rot\,\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ rot\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + \underbrace{j\omega\varepsilon\vec{E}}_{\text{trascurabile in caso quasi stazionario}} \end{cases}$$

$$rot\,\vec{E} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} = -j\omega\mu(H\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$$

$$\begin{cases} \vec{i}\,\frac{\partial E}{\partial y} = -j\omega\mu H\vec{i} \\ \vec{j}\,\frac{\partial E}{\partial x} = 0\,\vec{j} \end{cases}$$

pa ip E non dipende da z

$$\Downarrow$$

$$-\frac{d\vec{E}}{dy} = j\omega\mu H$$

$$rot\,\vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma\vec{E} = \sigma(0\vec{i} + 0\vec{j} + E\vec{k})$$

$$\begin{cases} \cancel{\vec{j}}\,\frac{\partial H}{\partial z} = 0\,\cancel{\vec{j}} \\ -\cancel{\vec{k}}\,\frac{\partial H}{\partial y} = \sigma\vec{E}\cancel{\vec{k}} \end{cases} \Rightarrow \frac{dH}{dy} = \sigma\vec{E}$$

Si ottengono:

$$\begin{cases} -\dfrac{dE}{dy} = j\omega\mu H \\ -\dfrac{dH}{dy} = \sigma E \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\dfrac{d^2\bar{E}}{dy^2} = -j\omega\mu\dfrac{d\bar{H}}{dy} = +j\omega\mu\sigma\bar{E} \\ +\dfrac{d^2\bar{H}}{dy^2} = -\sigma\dfrac{d\bar{E}}{dy} = +j\omega\mu\sigma\bar{H} \end{cases}$$

definiamo $j\omega\mu\sigma = \bar{\gamma}^2$ quindi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\bar{E}}{dy^2} = \bar{\gamma}^2\bar{E} \\ \dfrac{d^2\bar{H}}{dy^2} = \bar{\gamma}^2\bar{H} \end{cases} \qquad \bar{\gamma} = \beta(1+j) = \frac{1}{\delta}(1+j)$$

Definiamo $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}} = \dfrac{1}{\beta}$ con δ è lo spessore di penetrazione.

Forma generale:

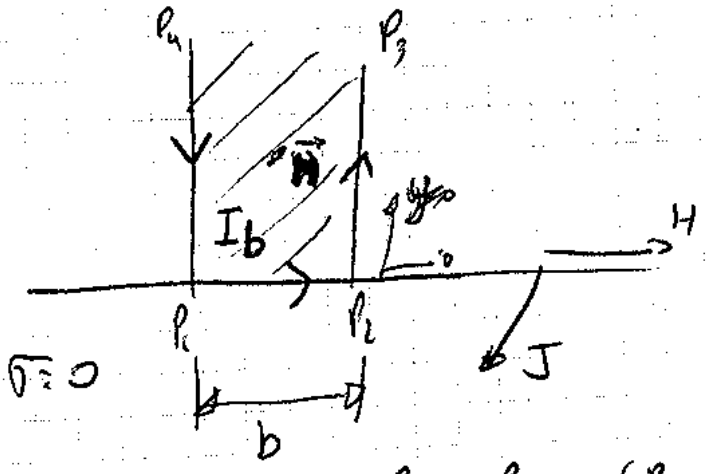
$$\bar{H} = \bar{M}e^{\bar{\gamma}y} + \bar{N}e^{-\bar{\gamma}y}$$

$$\bar{H} = \bar{M}e^{\beta y}\cdot e^{j\beta y} + \bar{N}e^{-\beta y}e^{-j\beta y}$$

con $0 \le y < \infty$, non è possibile che il campo sia illimitato, quindi $M = 0$

Dobbiamo trovare $\overline{N}$

P_3 e P_4 sono punti all'infinito



$$\oint_{\mathcal{L}=\partial S} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{P_1}^{P_2} + \int_{P_2}^{P_3} + \int_{P_3}^{P_4} + \int_{P_4}^{P_1} = I_b$$

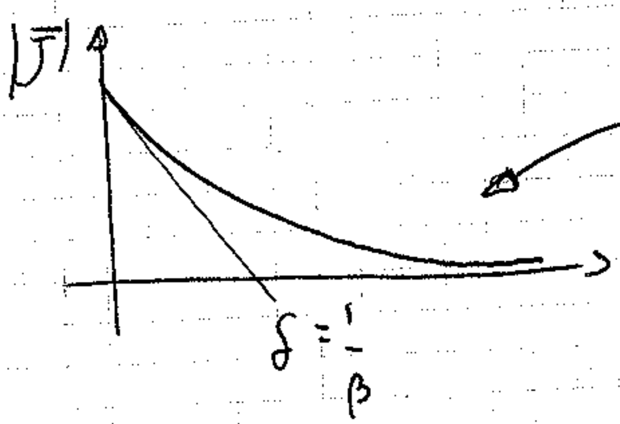
$$H(y=0) \cdot b + 0 + 0 + 0 = I_b$$

$$H(y=0) = \frac{I_b}{b} = H_0$$

$$H(y=0) = N \Rightarrow N = \frac{I_b}{b}$$

$$\boxed{H = \frac{I_b}{b} e^{-\gamma y}}$$

$$\vec{J} = \frac{I_b}{b} \frac{1}{\delta} (1+j) e^{-\gamma y}$$



effetto pelle

Copyleft elettrix01

δ	f
	50
	500
	5000
	$5\cdot10^4$
	$5\cdot10^5$

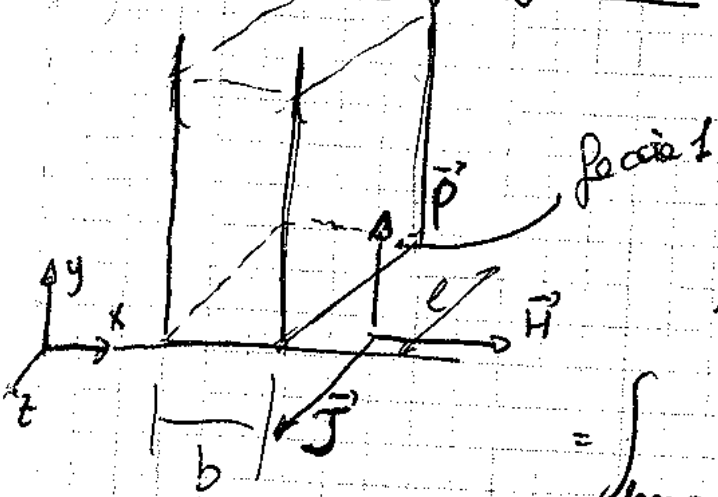
$\mu=\mu_0$

$\sigma = 50\cdot10^6$

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{2\pi f\cdot 4\pi\cdot10^{-7}\cdot 5\cdot10^7}}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{f}}$$

J diventa trascurabile dopo 4-5 volte δ

Altre superficie



$$\oint(\bar E\times\bar H^*)\cdot ds=$$

$$=\int_{faccia\,1}+\int_{faccia\,2}+\dots+\int_{faccia\,6}=$$

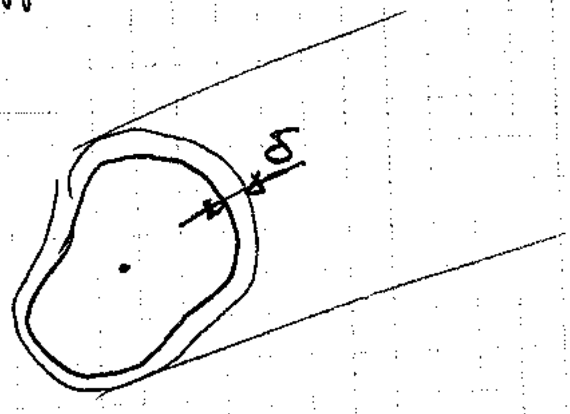
$$=\bar E(y=0)\cdot\bar H^*(y=0)\cdot b\cdot l = \text{Potenza complessa}$$

$$(1+j)\frac{1}{\sigma}\frac{\bar I_b}{b}\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\bar I_b^*}{b}\cdot\cancel{b}\cdot l=\bar S^*=$$

$$=\frac{|I_b|^2\,l}{\sigma b\delta}(1+j)$$

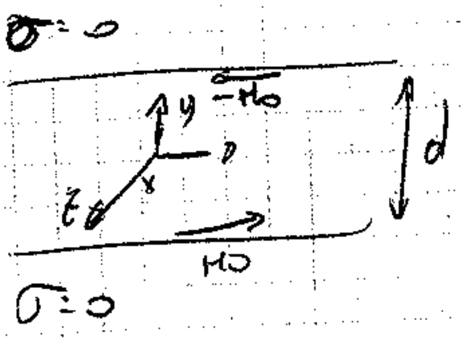
effetto del flusso interno al conduttore è uguale a quello resistivo

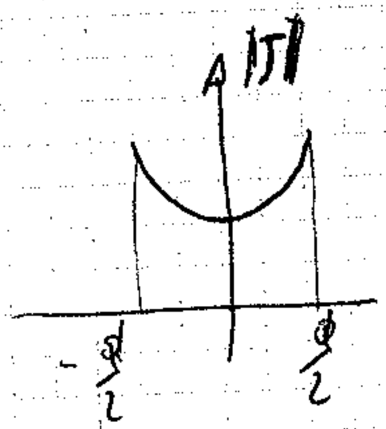
Supponiamo di avere

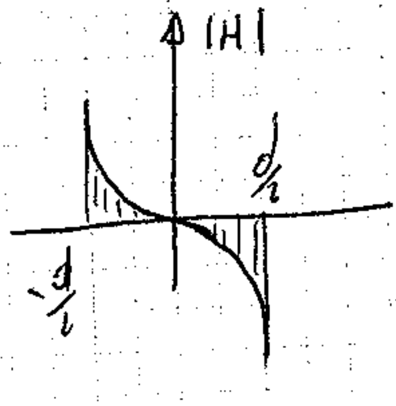


Posso usare un approccio approssimato: trovo $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ se δ è molto minore delle dimensioni in gioco. Altre si valuta la lunghezza periferica del conduttore e si dice che $\bar{Z} = \frac{l}{\sigma\delta l_p}(1+j)$

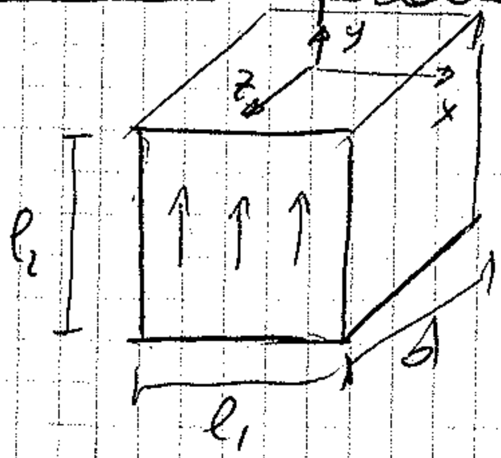
Caso:

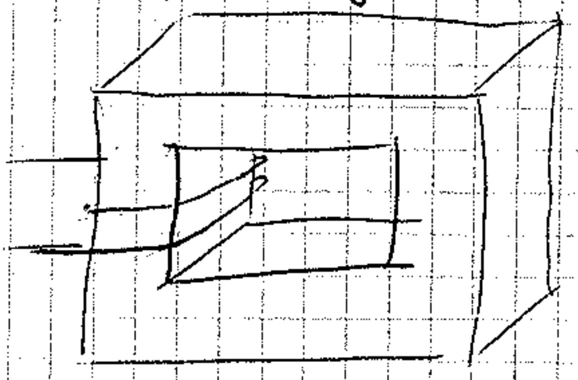






Altro caso: parallelepipedo ferromagnetico





Possiamo immaginare il parallelepipedo come una serie di striscette connesse in parallelo.
Ogni striscia elementare concatena un campo magnetico

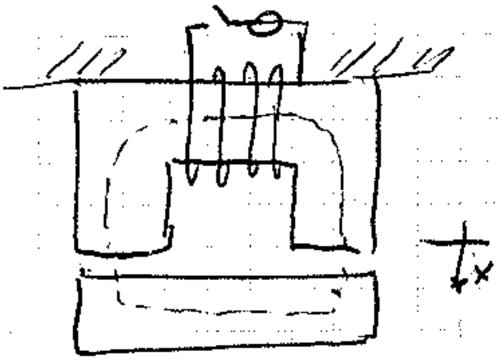
$$\mathcal{E} = B \cdot \omega \cdot 2z \cdot \ell_1 \qquad dP = \mathcal{E}^2 dG = \frac{\mathcal{E}^2 dz \cdot \ell_2}{2\ell_1}$$

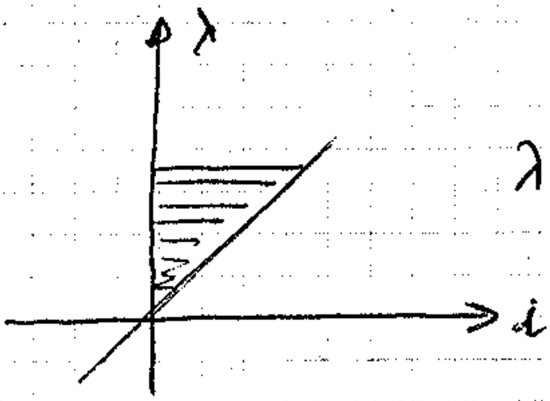
$$P = \int_{-d/2}^{d/2} B^2 \omega^2 4 \ell_1^2 z^2 \frac{\sigma \ell_2 \, dz}{2\ell_1} = \frac{B^2 \omega^2 4 \ell_1^2 \ell_2 \sigma}{2\ell_1} \cdot \frac{2 d^3}{8 \cdot 6} =$$

$$\frac{P}{\ell_1 \ell_2 d} = p = \frac{B^2 \omega^2 \sigma d^2}{6}$$

Dividendo a metà lo spessore implica una perdita che ~~che~~ questa $\frac{1}{4}$ di quella con spessore intero.
Il caso peggiore si presenta molto oltre è stato ola
P
Altri tipi di perdite sono date dal fenomeno dell'isteresi

CENNI di ELETTROMECCANICA





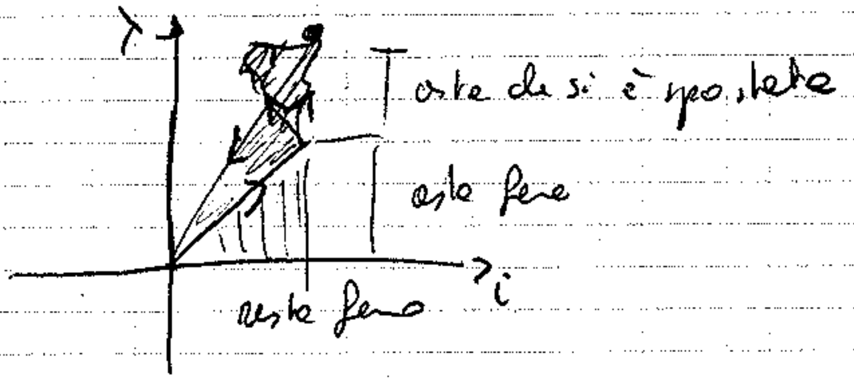
$\lambda = Li$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L} = \int \frac{1}{2} \mu H^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} d\tau$$

Si genera una forza quando chiudo il circuito

$$F_x = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}\Big|_{\lambda = cost} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial x}\Big|_{i = cost}$$

corrente continua



$$\oint i\, d\lambda = L_m.$$

in elettromeccanica bisogna unire conoscenze meccaniche ed elettriche.