

CAMPO di CORRENTE STATICO

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{J} = 0 \end{cases} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{E} = -\text{grad } V$$

$$\oint_{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0 \Rightarrow \sum V_{ij} = 0$$

$$V_{12} + V_{23} + \dots + V_{h-1,h} + V_{ht} = 0 \quad \text{legge delle tensioni}$$

$$\text{div } \vec{J} = 0 \Rightarrow \int \text{div } \vec{J} d\tau = \oint \vec{J} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad \text{legge delle correnti}$$

σ è la conduttività elettrica [S/m]

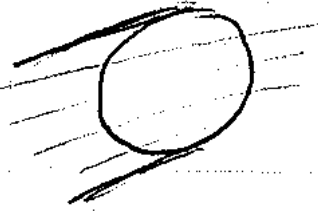
tipi di materiali:

- conduttori metallici ($\sigma \approx 10^{10}$)
- terreno
- isolanti ($\sigma = 0$)

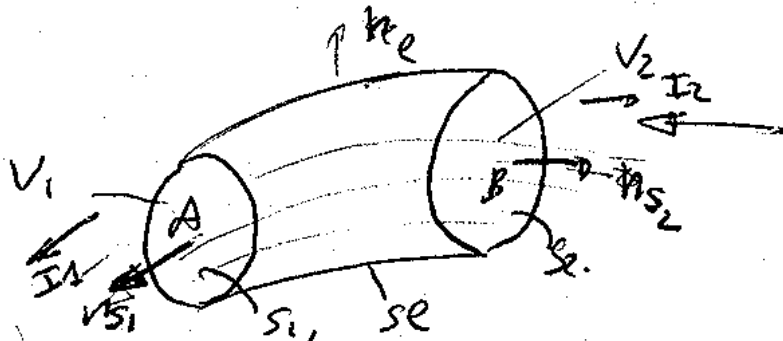
$$I_k = \int_{S_k} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Tubo di flusso:

tubo attraverso la
quale la superficie
del quale il
flusso è nullo.



(11)



porzione di tubo
di flusso:

In questa porzione si ha che

$$\text{div } \mathbf{J} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Supponiamo alle due superfici un potenziale
in modo che il campo sia ortogonale alla
superficie e

$$S = S_1 \cup S_e \cup S_2$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}_{I_1} + \underbrace{\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}_{I_2} + \underbrace{\int_{S_e} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}_{=0 \text{ per continuit.}} = 0$$

$-I_1 = I_2$ questo significa che ~~la~~ ^{attraverso un}
contanti tubo di flusso tante correnti entrano,
tante ne escono.

Troviamo $V_2 - V_1$

$$\int_{\mathcal{L}}_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int -\text{grad } V \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B dV = V(A) - V(B)$$

$V \cdot d\vec{\ell}$

Rendesi come ~~se~~ una linea di campo

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \epsilon \cdot d\ell = \int_A^B \frac{\rho}{\sigma} d\ell \neq$$

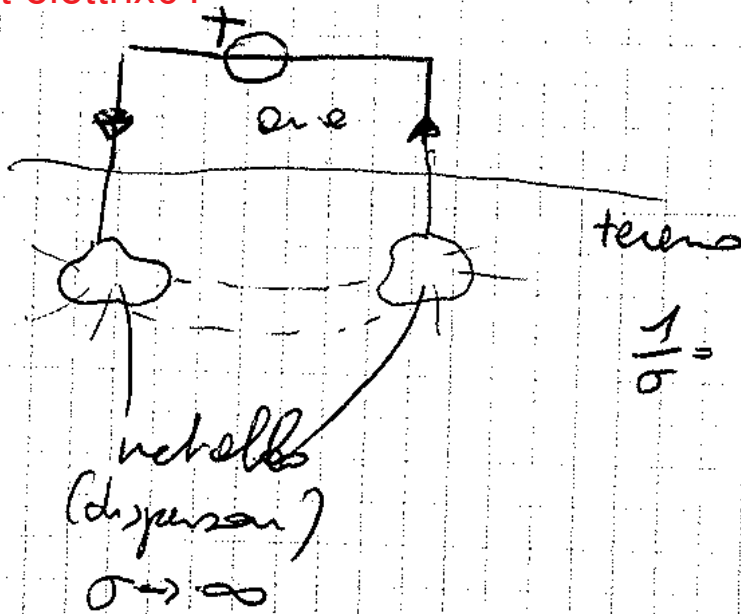
definisco $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \text{cost}$ nel caso di flusso su porzioni superf.

e
$$j_m = \frac{\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}{S}$$

$$I = j_m S$$

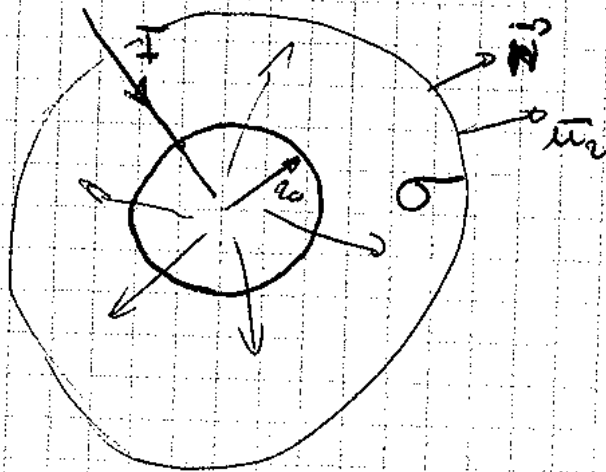
$$\int \frac{I}{\sigma_0} d\ell = V_1 - V_2$$

$$I \frac{\ell}{\sigma_0} = V_1 - V_2$$



$$\frac{1}{\sigma} = \rho = 10^{-10} \Omega \text{m}$$

Situazione più elementare



$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

per

$$-I + \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int 4\pi r^2$$

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$\vec{J} = J \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

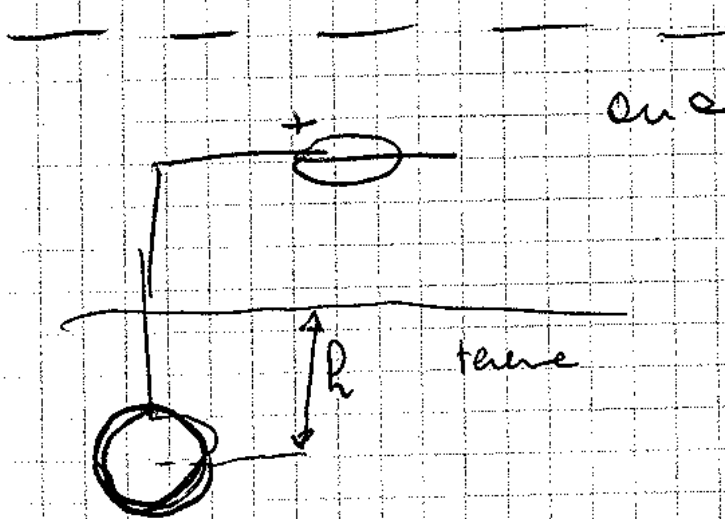
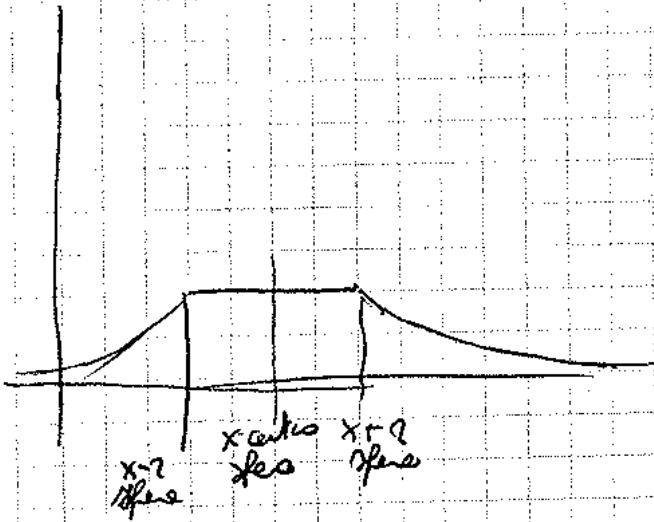
$$dV = - \int \frac{I}{4\pi r^2 \sigma} dr$$

$$V = \frac{I}{4\pi R \sigma} + \text{cost}$$

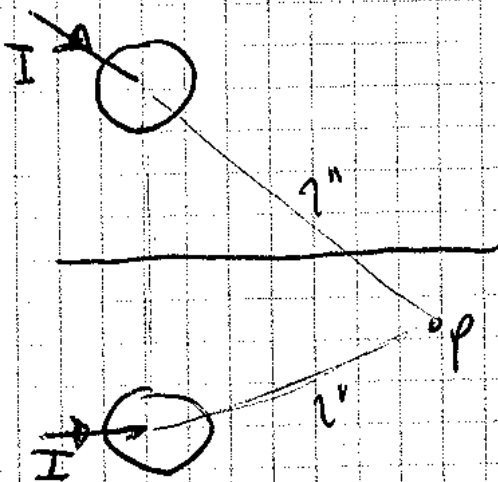
re $r \rightarrow \infty$
 $V_{r \rightarrow \infty} = 0$

$V = \text{cost} + \text{quadr.}$ per convenzione

$$V = \frac{I}{4\pi\sigma R}$$



Per studiare questo caso basterà far
 un caso alle inverse:

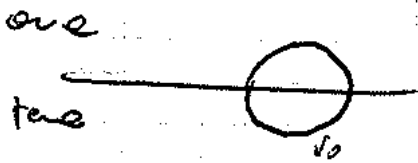


$$V(\rho) = \frac{I}{4\pi\sigma r'} + \frac{I}{4\pi\sigma r''}$$

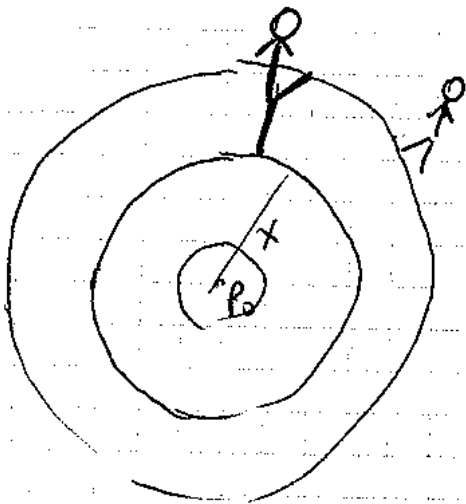
Posizione P ^{nel centro} ~~sulla superficie~~ delle sfere (24)

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\sigma R_0} + \frac{I}{4\pi\sigma 2l} = I \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\sigma R_0} \left(1 + \frac{R_0}{2l} \right) \right]}_{R_T}$$

Caso tecnico



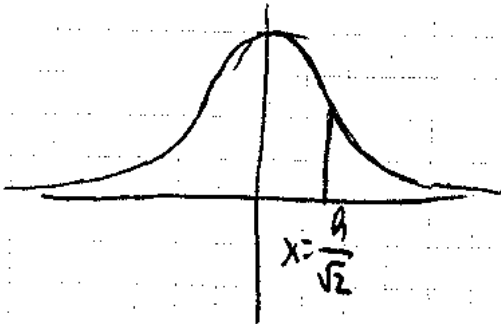
$$V_0 = \frac{I}{2\pi\sigma R_0}$$



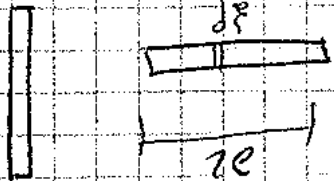
P₀ è il punto sulla sup. ~~terza~~ ^{interna} ~~o~~ ^{risp.} al centro delle sfere.

$$V_{\text{tecnico}} = \frac{I}{2\pi\sigma \sqrt{R_1^2 + R_0^2}}$$

linee di campo



$Q=0$



picchetto \uparrow

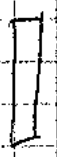
Scorporiamo il picchetto in parti infinitesime che si comportano come sorgenti infinitesime

coordinate rispetto alle sorgenti $(x-\xi, y)$

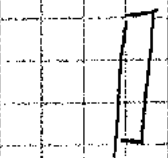
$$dV = \frac{I}{2l} d\xi \frac{1}{4\pi\sigma\epsilon} = \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}$$

$$V = \int_{-l}^l \left[\right] d\xi = \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}}$$

Picchetto verticale



faciamo la solita approssimazione



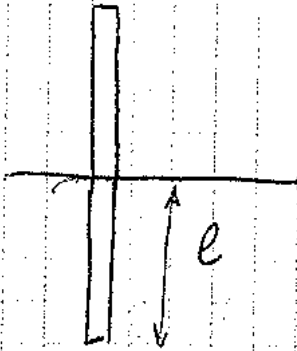
$$V'_S = \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{l+l \cdot \left(1 + \frac{d^2}{4l^2}\right)}{l+l \cdot \left(1 + \frac{d^2}{4l^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V'_S = \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \left(\frac{2l+3l + \sqrt{(2l+3l)^2 + \frac{d^2}{4}}}{2l+l + \sqrt{(2l+l)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right) \approx \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{2l+3l}{2l+l}$$

$$V'_S \approx \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{l+l}{d^2/4l} = \frac{I}{8\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{16l^2}{d^2} = \frac{I}{4\pi\sigma\epsilon} \ln \frac{4l}{d}$$

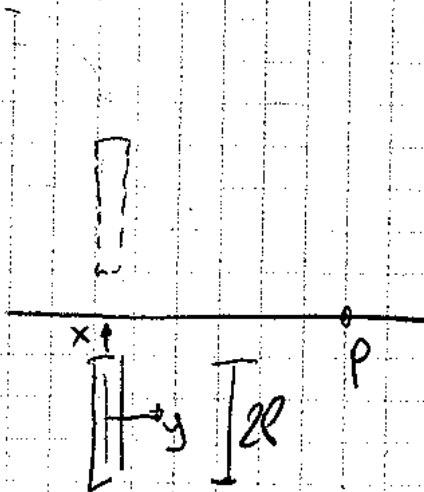
$$V = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \frac{4l}{d} \sqrt{\frac{2R+3l}{2h+l}}$$

resistenza di terra (25) di un dissipatore disposto verticalmente



$$V = \frac{2I}{4\pi\sigma l} \ln \frac{4l}{d}$$

in questo caso l è l'altezza di tutto il dissipatore.

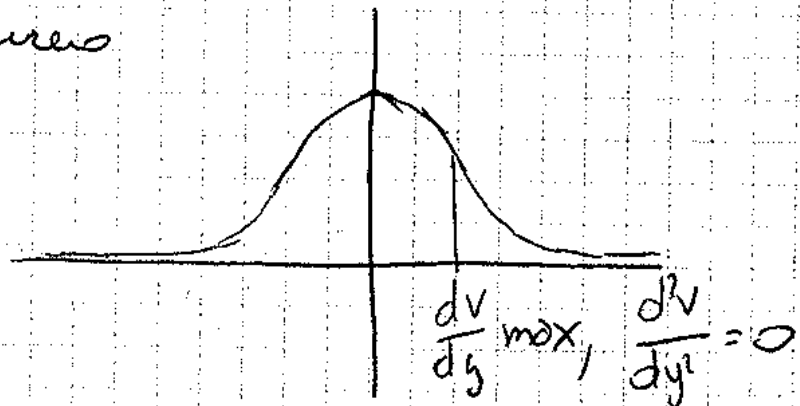


$$V(P) = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \frac{x+l+\sqrt{x^2+l^2}}{x-l+\sqrt{x^2+l^2}}$$

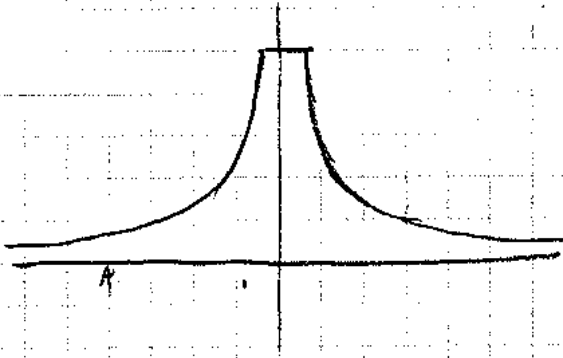
sul terreno $x = h+l$

$$V_{\text{terreno}} = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \frac{h+l+\sqrt{(h+l)^2+l^2}}{h+\sqrt{h^2+l^2}}$$

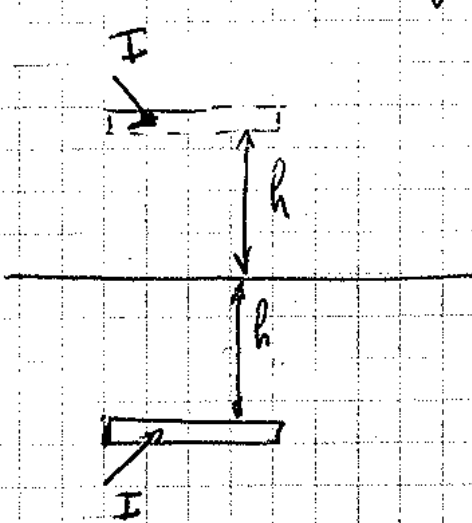
Potenziale terreno



Se picchetto è effiorante



Picchetto disposto orizzontalmente



$$R_T = \frac{V_S + V_I'}{I}$$

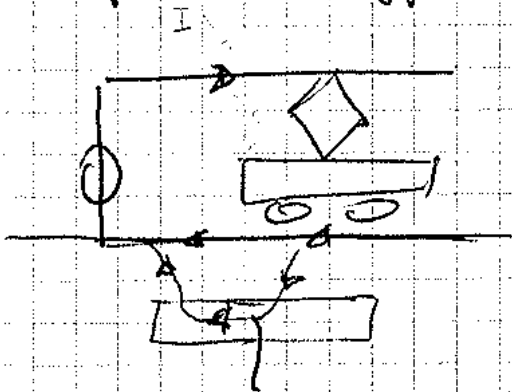
$$V_S' = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \frac{4e}{d}$$

$$V_i(x=0, y=ze) = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 4h^2}}{-e + \sqrt{e^2 + 4h^2}}$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \sqrt{\frac{e + \sqrt{e^2 + 4h^2}}{-e + \sqrt{e^2 + 4h^2}}}$$

$$V_{\text{inverso}} = \frac{I}{8\pi\sigma l} \ln \frac{(x+e) + \sqrt{(x+e)^2 + h^2 + z^2}}{(x-e) + \sqrt{(x-e)^2 + h^2 + z^2}}, \quad y' = \sqrt{h^2 + z^2}$$

Dispensore effiorante (es: bman' tuem)

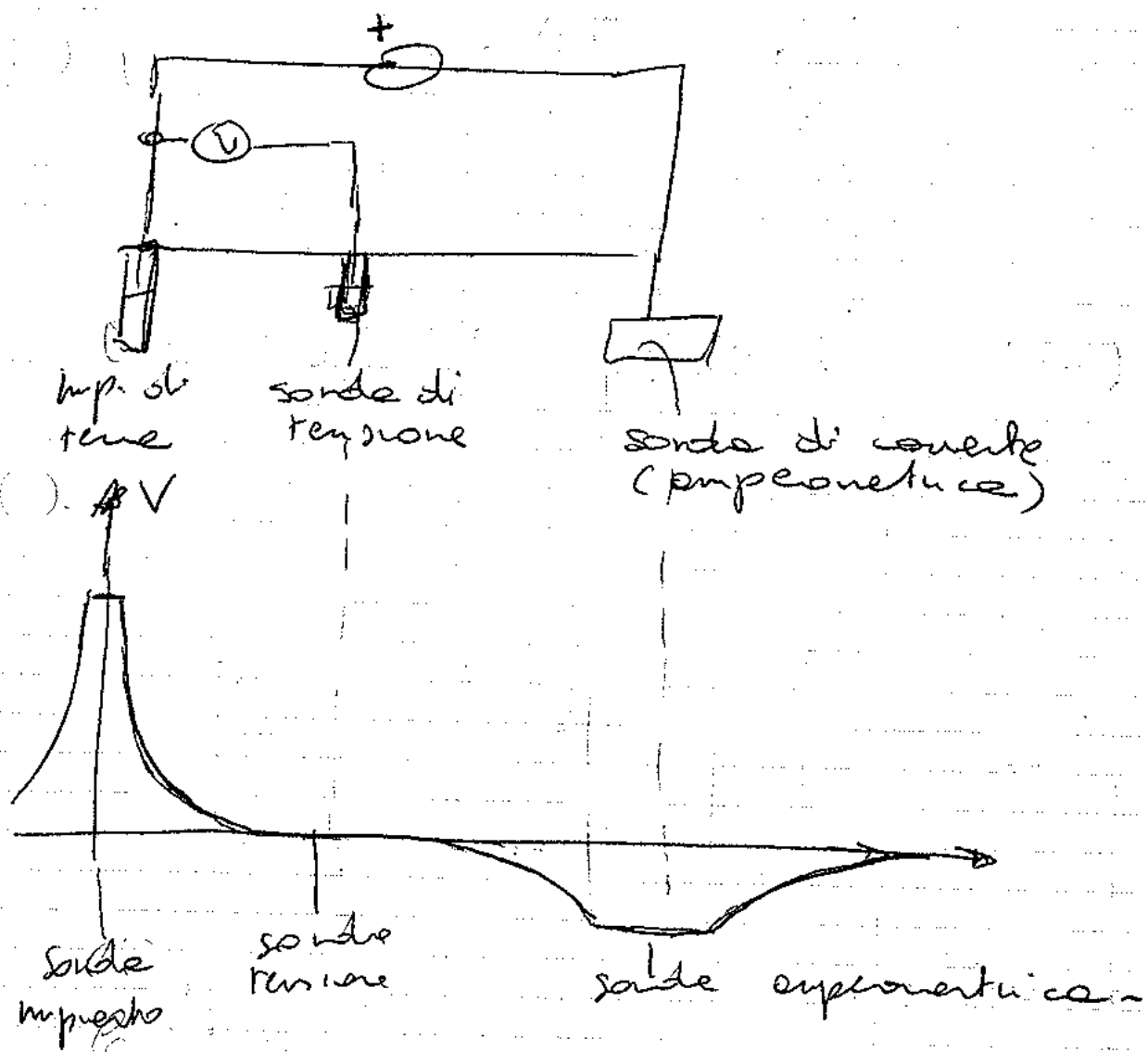


struttura metallica

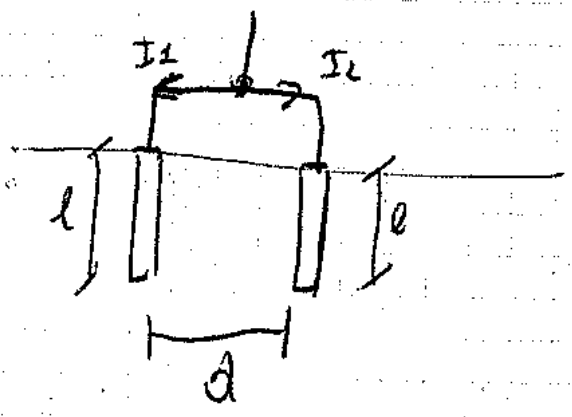
C'è la possibilità che si verifichi qualcosa del genere e la struttura metallica si danneggi.

Effettuare la misura della resistenza di terra

(26)



Resistenze uguali in parallelo



se $D \gg l$ allora

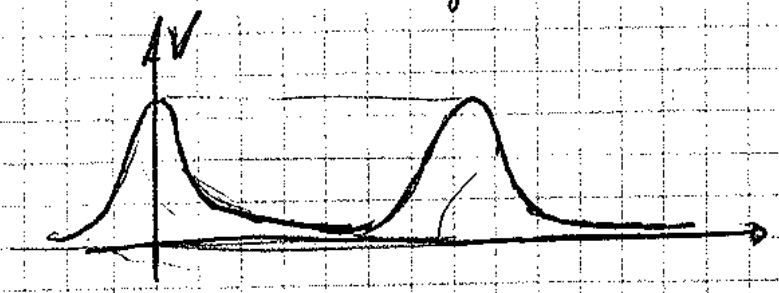
$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

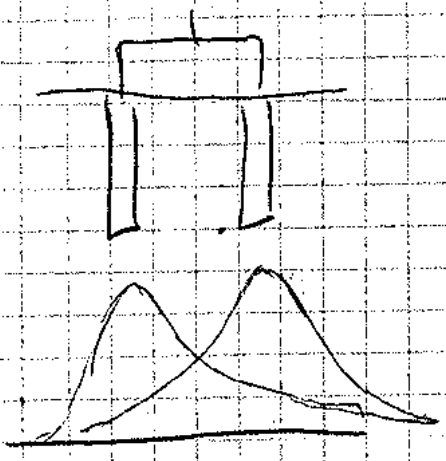
$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I$$

ci aspettiamo che

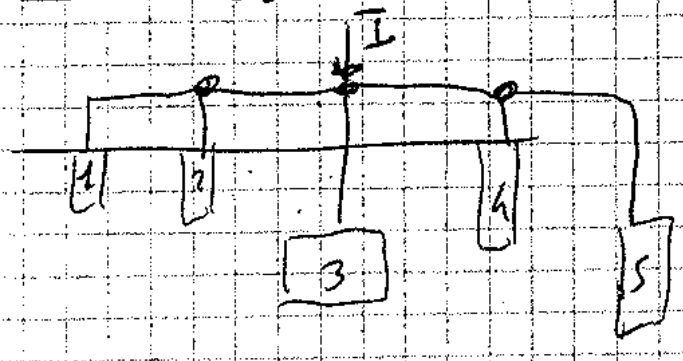
$$V_1 = V_2$$



Se i dispenser sono vicini



Caso generale



$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + \dots + R_{1N} I_N \\ V_2 = R_{21} I_1 + \dots + R_{2N} I_N \\ \vdots \\ V_N = R_{N1} I_1 + \dots + R_{NN} I_N \end{cases}$$

$$[V] = [R][I]$$

Ho $N+1$ conduttori e $n+1$ -esimo è distanza all'infinito.

$R_{11}, R_{21}, R_{31}, \dots, R_{NN}$ sono autovalenze

La matrice R non è simmetrica

Nella realtà i dispersori sono in parallelo
 (Caso base: dispersori suff. contenuti si
 ha $[R]$ diagonale)

(27)

In questo caso hanno correnti conosciute
 tensioni

$$[I] = [R]^{-1}[V] = [G][V]$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix}$$

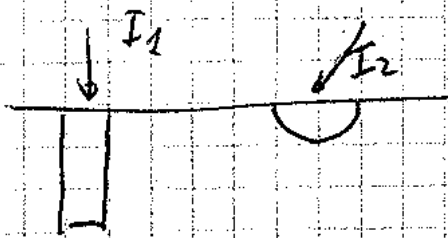
$$I = \sum_i I_i = \left(\sum_i \sum_j G_{ij} \right) V \quad R_T = \frac{1}{G_{eq}}$$

$\hookrightarrow G_{eq}$

Se R è diagonale

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & R_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & R_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{R_{22}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$G_{eq} = \left(\sum_i \sum_j \frac{1}{R_{ij}} \right)$$



$$R_{21} = \frac{V_{21}}{I_1}$$

$$R_{12} = \frac{V_{12}}{I_2}$$

In generale $R_{12} \neq R_{21}$

Se si dissipa energia intereagiscono la R_{eq} è $>$ rispetto al caso in cui non interagiscono

$$R_{eq} \cdot I_{tot} = V_{tot} \text{ feno}$$

