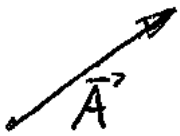
Richiami su calcolo vettoriale

Funzioni scalari o vettoriali

Vettore



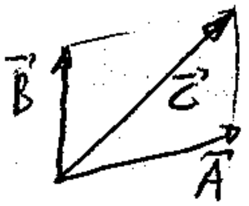
$\vec{A} = |\vec{A}|\,\vec{e}$ ← versore. $\vec{e} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$\vec{A} = A_1\vec{u}_1 + A_2\vec{u}_2 + A_3\vec{u}_3$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ è un sistema di riferimento.

Operazioni tra vettori,

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$



Se $A = A_1\vec{u}_1 + A_2\vec{u}_2 + A_3\vec{u}_3$

$B = B_1\vec{u}_1 + B_2\vec{u}_2 + B_3\vec{u}_3$

$C = (A_1+B_1)\vec{u}_1 + (A_2+B_2)\vec{u}_2 + (A_3+B_3)\vec{u}_3$

Vettore nullo $\vec{0}$ tale che $\vec{A}+\vec{0} = \vec{A}$

Moltiplicazione per 1 costante,

$\vec{A} = k\vec{B} = k\,|\vec{B}|\,\vec{b}$

Se $k>0$ stesso verso
Se $k<0$ verso opposto.

Prodotto tra vettori.

Scalare $(\cdot)$

genera uno scalare

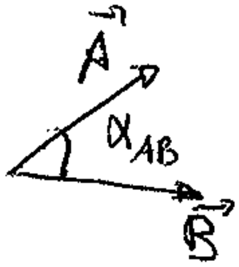
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{C} =$

Vettoriale $(\times)$

genera un vettore.

$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$

$= |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha_{AB} =$



$= \vec{B}\cdot\vec{A} =$

$= (A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3)\cdot$

$\cdot(B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3) =$

Se sistema di riferimento ortogonale:

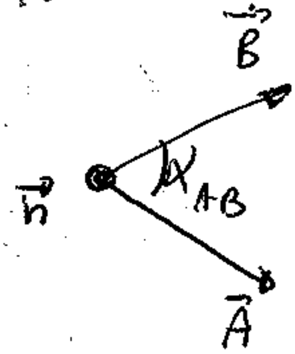
$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

Metodo di calcolo del modulo di un vettore

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|\cdot|\vec{A}|\cos 0 = |\vec{A}|^2$$

$= |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin(\alpha_{AB})\cdot\vec{n}$

n è la normale al piano individuato dai due vettori



$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

$\cancel{\vec{A}\times(\vec{B}\cdot\vec{C})}$ errato

Doppio prodotto esterno

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = B(A\cdot C) - C(A\cdot B)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Operatori differenziali del 1° ordine

- gradiente — grad (grad)
- divergenza — div (div)
- rotore — rot (curl)

Gradiente $\varphi = \vec{E} = |\vec{E}|\,\vec{n}$

φ una funzione scalare.

$\vec{n}$ direzione della massima variazione della grandezza.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

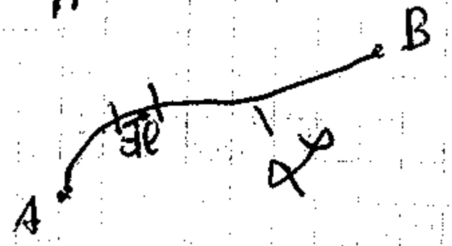
$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} \cdot \overrightarrow{dl} \\ dl = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{cases}$$

Ne segue che

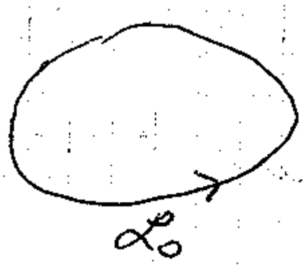
$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$\forall \alpha : A \to B$



$$\oint_{\alpha_0} \overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

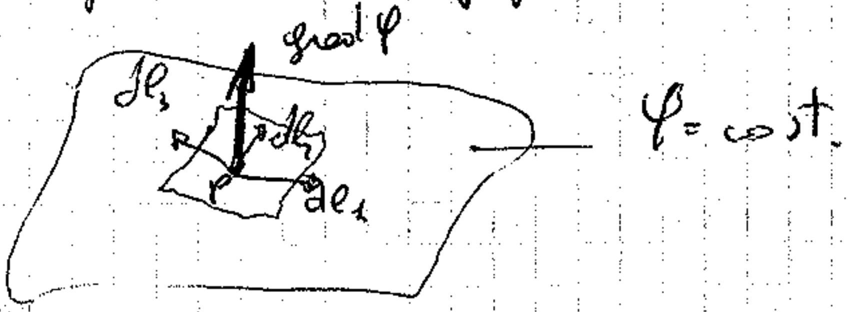
$\forall \alpha_0$ chiusa



$d\varphi = 0$ se φ è costante

Possiamo immaginare che esistano regioni dello spazio in cui φ è costante.

Esempio delle superficie



Consideriamo un qualunque versore in P tg alla superficie.

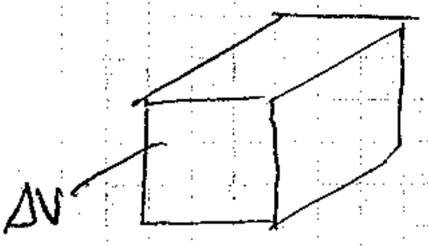
$d\varphi = \text{grad}\,\varphi \cdot dl_1 = 0$

Quindi il gradiente di φ è perpendicolare alla superficie in cui φ è costante.

$\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ è un campo lamellare

<u>Divergenza</u>

$$\text{div}\,\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{S=\partial\Delta V} \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

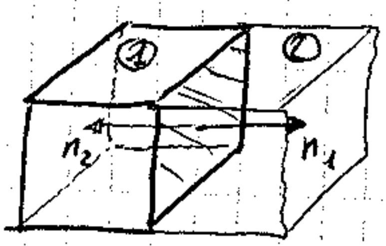


$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ è il flusso di $\vec{B}$ attraverso S

Questa definizione contiene all'interno il teorema della divergenza

$$\int_V \text{div}\,\vec{A}\, dV = \oint_{S=\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

(3)



n_1 opposto a n_2 ed il vettore $\vec{A}$ è sempre uguale quindi il flusso attraverso la superficie ① ha il ~~è uguale~~ negativo del flusso attraverso ② _ il flusso è nullo. Questo accade ovunque fuorché ai bordi_

Facendo i conti si ha che

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Posto

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

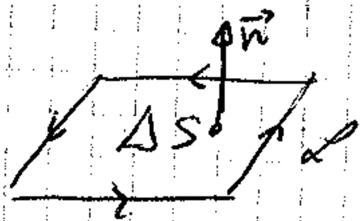
$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Rotore

$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ genera un vettore

$$(\operatorname{rot} \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \cdot \vec{n}$$



Teorema di Stokes $\displaystyle\int \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{l = \partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}$

$$\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \text{rot}\,\vec{A}$$

<u>Propietà degli operatori differenziali</u>

$$\text{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{grad}\,\varphi_1 + \text{grad}\,\varphi_2$$

$$\text{div}\,(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \text{div}\,\vec{A}_1 + \text{div}\,\vec{A}_2$$

$$\text{rot}\,(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \text{rot}\,\vec{A}_1 + \text{rot}\,\vec{A}_2$$

$$\text{grad}\,(\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_2\,\text{grad}\,\varphi_1 + \varphi_1\,\text{grad}\,\varphi_2$$

$$\text{div}\,(\varphi \vec{A}) = \varphi\,\text{div}\,\vec{A} + \text{grad}\,\varphi \cdot \vec{A}$$

$$\text{rot}\,(\varphi \cdot \vec{A}) = \varphi\,\text{rot}\,\vec{A} + \text{grad}\,\varphi \times \vec{A}$$

$$\text{rot}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \vec{A}\,\text{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\text{div}\,\vec{A}$$

$$\text{div}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\text{rot}\,\vec{B}$$

<u>OPERATORI DOPPI</u>

$$\text{div}\,(\text{rot}(\vec{A})) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\text{rot}\,(\text{grad}(\varphi)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$i\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) + 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0$$

Se $\text{rot}\,\vec{E} = 0$ allora $\vec{E}$ è irrotazionale o conservativo.

Se $\text{div}\,\vec{B} = 0$ allora B è solenoidale.

Se $\text{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$ o $\text{div}\,\vec{A} = \vec{X}$ allora sono qualsiasi

Campi conservativi

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$ so anche che
$\text{rot}(\text{grad}\,\varphi) = 0$

Quindi $\vec{E} = \text{grad}\,\varphi$

Quindi posso studiare la funzione φ
Introduco una funzione scalare φ per rappresentare $\vec{E}$ e semplificare i conti.

Se prendo $\psi = \varphi + \text{costante}$ si ha che $\text{grad}\,\psi = \text{grad}\,\varphi = \vec{E}$

Di solito si hanno due equazioni

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = 0 \\ \text{div}\,E = \chi \end{cases} \Rightarrow \text{div}(\text{grad}\,\varphi) = \chi$$

$$\text{div}(\text{grad}\,\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = \chi$$

Introduciamo l'operatore $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\nabla^2 \varphi = \chi$ equazione di Poisson

La funzione φ si chiama potenziale scalare.
Noi sappiamo che le superfici equipotenziali sono ortogonali al campo.

CAMPI SOLENOIDALI

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{C} \end{cases}$$

sappiamo che la $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A}$

Possiamo scrivere $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$? Sì

$\vec{A}$ potenziale vettore.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{C} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{C}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = C$$

$$\cancel{\vec{\nabla}^2 = \vec{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \vec{i} + \nabla^2 A_y \vec{j} + \nabla^2 A_z \vec{k}$$

Poniamo la divergenza $\vec{A} = 0$

quindi rimane $-\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{C}$

$$\mathrm{rot}\, A' = \mathrm{rot}\, A + \underbrace{\mathrm{rot}\,\cancel{\mathrm{grad}}\,\psi}_{=0} \quad \Sigma B$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\psi$$

Questo permette di scegliere A in modo tale che $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

CAMPO QUALSIASI

Si può dimostrare che la soluzione di un problema

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, A = B \\ \mathrm{div}\, A = \chi \end{cases}$$

può essere risolto come somma delle soluzioni di un problema irrotazionale e di uno sinusoidale.

$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ in modo che:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, A_1 = 0 \\ \Downarrow \\ \vec{A}_1 = \mathrm{rot}\, W \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\, \vec{A}_2 = 0 \\ \Downarrow \\ A_2 = \mathrm{grad}\, \varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{rot}\,(A) = \mathrm{rot}\,(A_1 + A_2) = \mathrm{rot}\, A_1 + \mathrm{rot}\, A_2 =$$

$$= \mathrm{rot}\, A_1 = B$$

$$\mathrm{div}\,(A_1 + A_2) = \mathrm{div}\, A_1 + \mathrm{div}\, A_2 = \mathrm{div}\, A_2 = \chi$$

$$\begin{cases} \text{rot } A_1 = B \\ \text{div } A_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{div } A_2 = \chi \\ \text{rot } A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \text{rot } \vec{W} + \text{grad } \varphi$$

Un campo irrotazionale può essere studiato tramite potenziale scalare, uno solenoidale tramite potenziale vettore, uno qualsiasi tramite un potenziale vettore ed uno scalare.

$(\vec{K})$ $\vec{E}$ campo elettrico $\left(\frac{V}{m}\right)$

$\vec{D}$ induzione elettrica (C/m^2)

$\vec{J}$ densità di corrente (A/m^2)

$\vec{B}$ induzione magnetica $[T]$

$\vec{H}$ campo magnetico $[A/m]$

ρ: densità di carica volumica $\left[\frac{C}{m^3}\right]$

μ: permeabilità magnetica $[H/m]$

ε: permeabilità elettrica $[F/m]$

σ: conducibilità elettrica $[S/m]$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ H/m$$

$$\varepsilon_0 \cong \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \ F/m \cong 8{,}86 \cdot 10^{-12} \ \frac{F}{m}$$

Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} rot \ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot \ \vec{H} = J + \dfrac{\partial D}{\partial t} \\ div \ \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases}$$

Ricaviamo le altre

$$div \ rot \ \vec{E} = div - \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} div \ B = 0$$

trascurando il caso in cui div B è cost.

$$\boxed{div \ B = 0}$$

$$div \ rot \ \vec{H} = div \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0$$

$$div \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0 = div \ \vec{J} + div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$div \ \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div \ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{div \ \vec{D} = \rho}$$

Mancano ancora le equazioni sostitutive:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \sigma \vec{E} = \sigma \operatorname{div} \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho = \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \rho = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} , \qquad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Caso conduttori: $\tau_c = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-11}}{10^6} \cong 10^{-18}\ s$

Caso isolante: $\tau_i = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-11}}{10^{-18}} \cong 10^{6}\ s$

Tempo in cui un materiale con densità volumica di carica si scarica.
Materiali conduttori si scarica subito
a n isolante rimane carico per tempo molto lungo!

τ è il tempo di rilassamento.