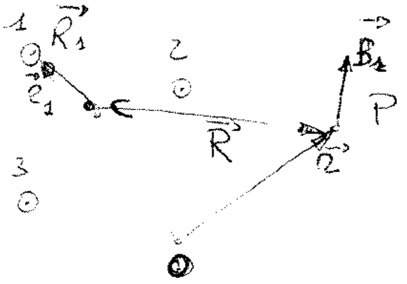
Sviluppo in serie dei campi magnetici



P è un punto generico ed è il punto in cui calcoliamo il campo magnetico

O è l'origine del sistema di riferimento

C baricentro delle sorgenti

$\vec{r} - \vec{r}_1$ è il vettore che unisce 1 e P.

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = \mu_0 \frac{\vec{u}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{2\pi (\vec{r} - \vec{r}_1)^2} I_1$$

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^{N} B_k = \sum_{k=1}^{N} \mu_0 I_k \frac{\vec{u}_k \times (\vec{r} - \vec{r}_k)}{2\pi (\vec{r} - \vec{r}_k)^2}$$

Si preferisce usare come origine del riferimento il punto C (baricentro delle coordinate). Possiamo riscrivere le equazioni di $\vec{B}$ riferite a C.

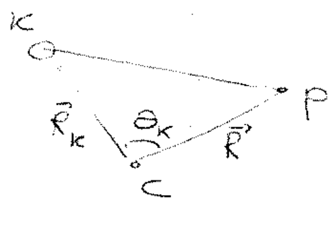
$$\vec{R} - \vec{R}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1$$

$$\vec{B} = \sum \mu_0 I_k \frac{u_k \times (\vec{R} - \vec{R}_k)}{2\pi (\vec{R} - \vec{R}_k)^2}$$

Cerchiamo di semplificare.

$$|\vec{R} - \vec{R}_k|^2 = R_k^2 + R^2 - 2 R R_k \cos(\theta_k) =$$

$$= R^2 \left(1 - 2 \frac{R_k}{R} \cos\theta_k + \left(\frac{R_k}{R}\right)^2\right)$$



Ipotesi: $\frac{R_k}{R} \ll 1$ cioè campo lontano

$$\frac{1}{|R - R_k|^2} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{1+x}\right], \quad x = -2\frac{R_k}{R}\cos\theta_k + \frac{R_k^2}{R^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \simeq f(x)\Big|_{x=0} + f'(x)\Big|_{x=0} x + f''(x)\Big|_{x=0} \frac{x^2}{2} + f'''(x)\Big|_{x=0} \frac{x^3}{3!}$$

$f(x) = (1-x)^{-1}$ $\qquad f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}$ $\qquad f''(x) = 2(1-x)^{-3}$

$f'''(x) = -6(1-x)^{-4}$

$f(0) = 1 \qquad f'(0) = -1 \qquad f''(0) = 2 \qquad f'''(0) = -6$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)} \simeq 1 - \left[-2\frac{R_k}{R}\cos\theta_k + \frac{R_k^2}{R^2} \right] + \frac{2}{2}\left[-2\frac{R_k}{R}\cos\theta_k + \frac{R_k^2}{R^2} \right]^2 =$$

$$= 1 + \frac{2R_k}{R}\cos\theta_k - \frac{R_k^2}{R^2} + \left[4\frac{R_k^2}{R^2}\cos^2(\theta_k) + \frac{R_k^4}{R^4} - 4\frac{R_k^3}{R^3}\cos\theta_k \right]$$

$$\vec{B}_k = \mu_0 I_k \frac{\vec{u}_k \times \overbrace{(\vec{R}-\vec{R}_k)}^{\simeq R}}{2\pi R^2}\left[1 + 2\frac{R_k}{R}\cos\theta_k - \frac{R_k^2}{R^2} + \dots \right] \simeq$$

$$\simeq \mu_0 I_k \frac{\vec{u}_k \times \vec{R}}{2\pi R^2}$$ se trascuro termini di ordine superiore

$$B_k \simeq \mu_0 I_k \left[\frac{1}{2\pi R} + \frac{2R_k}{2\pi R^2}\cos\theta_k \dots \right]$$

dipende da $\frac{1}{R}$ $\qquad$ dipende da $\frac{1}{R^2}$

Valutiamo ora il campo totale

$$B_0 = \sum_k B_k = \mu_0 \frac{\sum_k I_k}{2\pi R}$$

contributo del 1° termine dello sviluppo in serie

Nei sistemi trifase in generale B_0 è insignificante. Diventa importante se è presente la corrente omopolare (I_0).

Polarizzazione dei dielettrici

Nei campi elettrostatici $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

ε_r di solito è circa 1 o minore.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{polarizzazione}}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

Poiché $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} \vec{V}$ da cui si ha

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{P}) = \rho$$

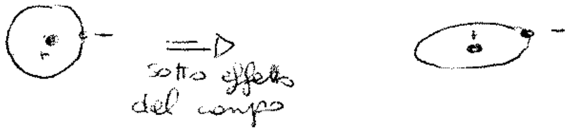
$$\operatorname{div} \varepsilon_0(-\operatorname{grad} V) = \rho - \operatorname{div} \vec{P}$$

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho - \operatorname{div} \vec{P}}{\varepsilon_0}$$ definiamo $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P}$

$$\boxed{-\nabla^2 V = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}}$$

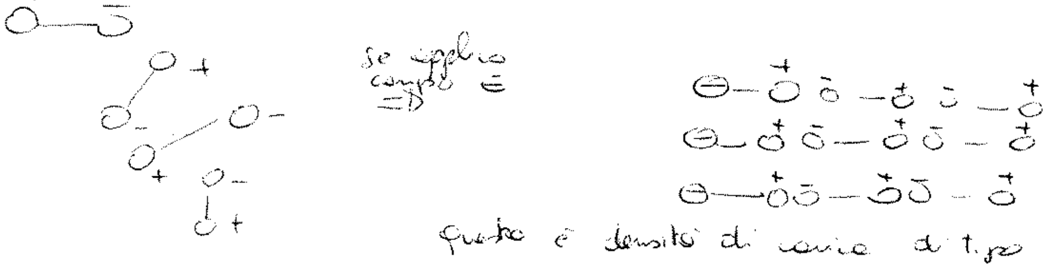
La polarizzazione può essere:

- elettronica



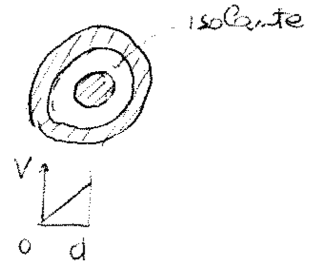
la presenza di campo elettrico dà origine ad una deformazione della struttura che può essere vista come effetto di una densità di carica effettiva.

- atomica

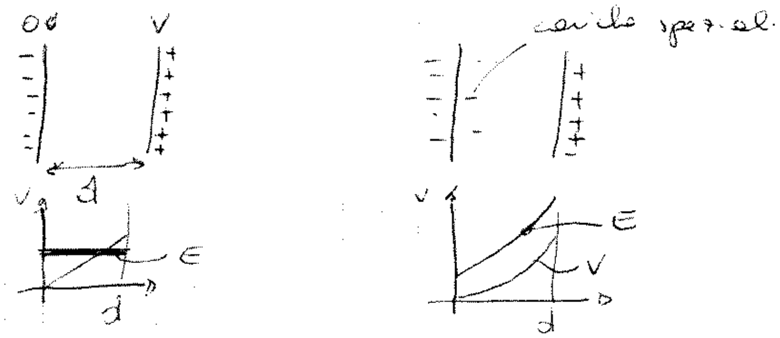


questa è densità di carica di tipo superficiale

Possibili differenze tra cavi DC e AC



~~Nei materiali isolanti si ha che~~



La presenza di cariche spaziali nell'isolante possono dare vita a campi elevati e fare invecchiare ~~troppo~~ l'isolante.

La presenza di cariche spaziali in DC è più dannosa rispetto al AC. Infatti si possono verificare delle scariche che fanno diminuire ~~l'eff~~ il rendimento della linea e riscaldare il cavo.

Equazioni del campo : - Laplace
- Poisson
...

Campo elettrostatico

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \vec{E} = -\text{grad } V \\ \text{div } \varepsilon \vec{E} = \text{div } \varepsilon (-\text{grad} V) = \rho \end{array}$$

ε cost. nel dominio

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon}$$ equazione Poisson

Se $\rho = 0$ $\nabla^2 V = 0$ (Laplace)

Campo magnetostatico

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_s \end{cases} \qquad \text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \vec{J}_s$$

se μ uniforme

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \vec{A} = \vec{J}_s$$

$$\text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_s$$

impongo $= 0$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}_s$$ Poisson