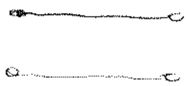
LINEE ELETTRICHE

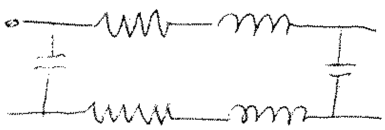
Insieme di conduttori che collega due n-poli.
Una linea bifilare è dotata di 2 conduttori.

Tipi di linee bifilari.

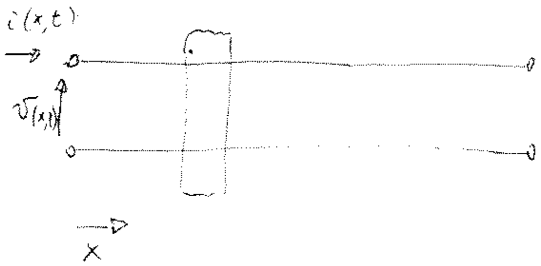
Modelli di linea:

1)  due cortocircuiti. Non si utilizza mai

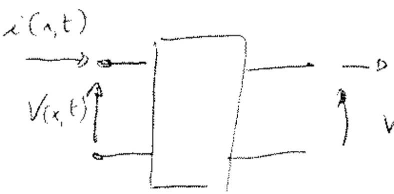
2)  3)

4) 

La linea può essere trattata in questo modo se la sua geometria rimane la stessa.



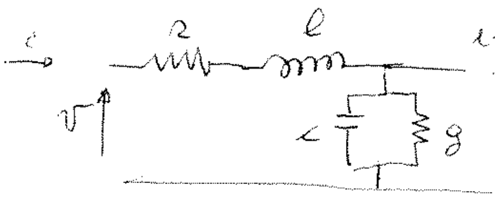
Possiamo considerare la linea come un collegamento in cascata di tanti doppi bipoli.



$i' = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$

$V' = v + \frac{dv}{\partial x} dx$

il modello del doppio bipolo è questo



$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ lettere minuscole perché sono misure specifiche per unità di lunghezza

$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx$

Possiamo risolvere il bipolo in questo modo:

$$\left.\begin{aligned} V-\left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right) &= r\,i\,dx + \ell\,dx\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= r\,i + \ell\frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned}\right\}\ \text{Legge delle tensioni}$$

$$i-\left(i+\frac{\partial i}{\partial x}dx\right) = g\left(v+\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}dx}}_{\text{infinitesimo di ordine sup.}}\right)dx + c\,dx\frac{\partial}{\partial t}\left(v+\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}dx}}_{\text{inf. di ordine sup.}}\right)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g v + c\frac{\partial v}{\partial t}$$

Le equazioni elettriche risultano quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\\ \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = r i + \ell\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial t} = g v + c\frac{\partial v}{\partial t}\end{cases} \Rightarrow \begin{aligned}\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}\\ \cancel{\frac{\partial}{\partial x}}\end{aligned}\begin{cases} -\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} = r\frac{\partial i}{\partial t} + \ell\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = g\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = r i + \ell\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial t} = g v + c\frac{\partial v}{\partial t}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r\frac{\partial i}{\partial x} + \ell\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = g\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\end{cases}$$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -r\left(g v + c\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \ell\left(g\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v^2}{\partial t^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= r g v + (rc+\ell g)\frac{\partial v}{\partial t} + \ell c\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= r g i + (rc+\ell g)\frac{\partial i}{\partial t} + \ell c\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

Equazioni dei telegrafisti

Dobbiamo analizzare le due equazioni in regime transitorio ~~periodico~~ ed in regime stazionario (periodico).

Per il regime transitorio si studiano 3 casi distinti:

- linee senza perdite
- linee non distorcenti
- linee caso generale (non studiato)

LINEE SENZA PERDITE

Supponiamo che $r = 0$ e $g = 0$.
Otteniamo che

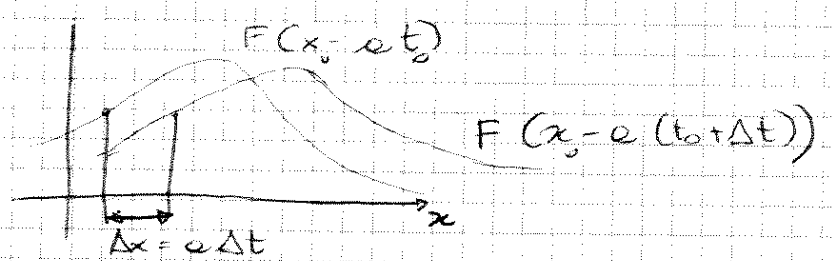
$$* \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases}$$

Ne deriva che $v(x,t) = F(x - a t)$, infatti

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = F' \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -a F' \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 F'' \end{cases}$$

ne segue che sostituendo in $*$:

$$\cancel{F''} = lc\, a^2 \cancel{F''} \Rightarrow lc\, a^2 = 1 \Rightarrow \underset{\text{velocità di propagazione}}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{lc}}$$



Voglio trovare il valore di un punto della funzione dopo un tempo Δt

$$x_0 + \Delta x - a (t_0 + \Delta t)$$

$$x_0 + a t_0 + \cancel{\Delta x} - \cancel{a \Delta t} \rightarrow \text{perché } a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ne segue che dopo un tempo Δt la funzione viene traslata di $\Delta x = a \Delta t_0$

Possiamo quindi dire che $v = F(x \mp at)$

$i = G(x \mp a_1 t)$

con $a_1 = a$

Ora cerchiamo il legame tra F e G.

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x} = l\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = c\dfrac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Se $v = F(x+at)$ allora

$\rightarrow -F'(x \mp at) = l(-a)\, G'(x-at)$

$\forall\, a = \pm\frac{1}{\sqrt{lc}}$

$$F'(x \mp at) = \pm\frac{1}{\sqrt{lc}}\, l\, G'(x \mp at)$$

$$F'(x-at) = \pm\sqrt{\frac{l}{c}}\; G'(x-at) \qquad Z_\infty = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

$$\begin{cases} v(x-at) = Z_\infty\, i(x-at) \\ v(x+at) = -Z_\infty\, i(x+at) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^+ = Z_\infty\, i^+ \\ v^- = -Z_\infty\, i^- \end{cases}$$

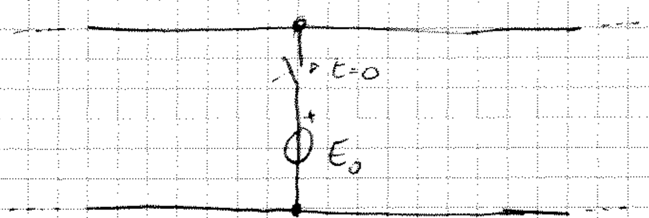
"+" indica che l'onda si propaga nel senso delle x crescenti (onda progressiva)

"−" indica che l'onda si propaga nel verso delle x negative (onda regressiva)

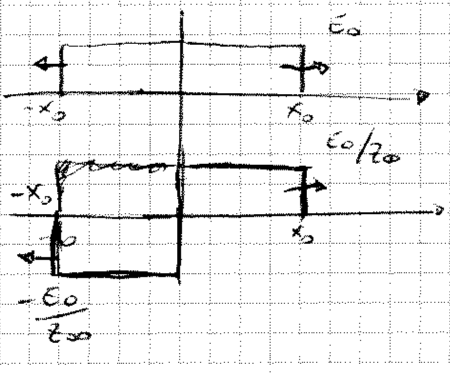
È necessario che siano fornite v ed i all'istante $t=0$ su tutta la linea.

Sono inoltre necessarie le condizioni al contorno (ad esempio cosa è collegato ai capi della linea).

Esempio

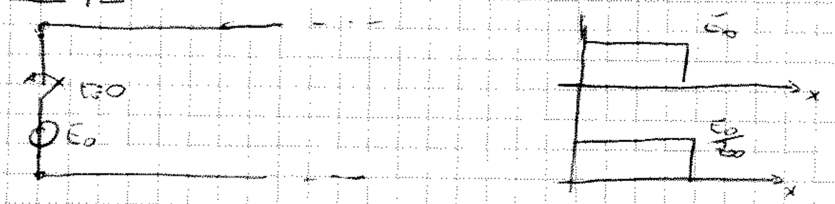


in $t=0$ $v=0$ ed $i=0$



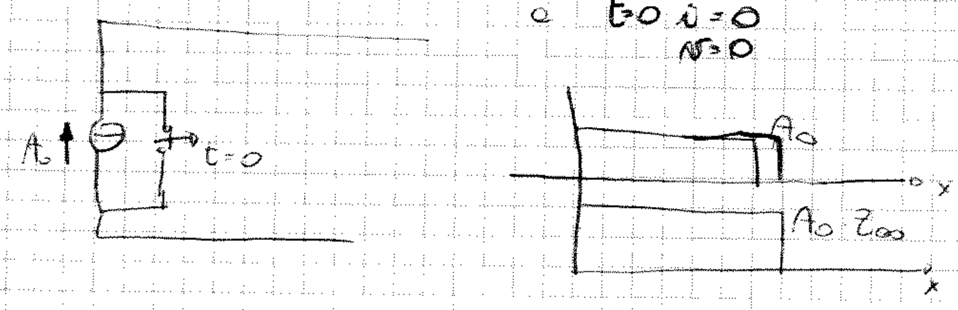
All'istante t_0. Infatti $\frac{x_0}{t_0} = a$. Cioè tempo e spazio sono proporzionali

Esempio



e $t=0$ $v=0$
$i=0$

Esempio



e $t=0$ $i=0$
$v=0$

LINEE non DISTORCENTI

$$\begin{cases} v = e^{-\beta x} F(x - at) \\ i = e^{-\beta x} G(x - at) \end{cases}$$ ipotesi

Calcoliamo le derivate

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta e^{-\beta x} F + e^{-\beta x} F'$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\beta e^{-\beta x} F' + \beta^2 e^{-\beta x} F - \beta e^{-\beta x} F' + e^{-\beta x} F''$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a e^{-\beta x} F'$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 e^{-\beta x} F''$$

Inserisco nelle equazioni dei telegrafisti

$$+\beta^2 e^{-\beta x} F - 2\beta e^{-\beta x} F' + e^{-\beta x} F'' = rg e^{-\beta x} F + (rg + lc)(-a e^{-\beta x} F') +$$
$$+ lc a^2 e^{-\beta x} F''$$

$e^{-\beta x}$ si butta via

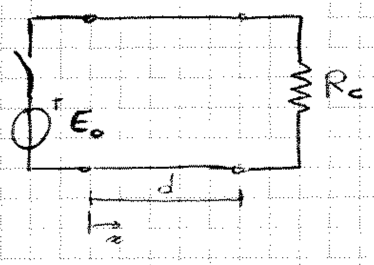
$$\begin{cases} \beta^2 = rg & \Rightarrow \beta = \sqrt{rg} \\ -2\beta = (rg + lc)(-a) & \Rightarrow \beta = (rg + lc)\frac{a}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{a^2}{4}\left(r^2g^2 + l^2c^2 + 2rglc\right) \\ 1 = lc a^2 & \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{lc}} \end{cases}$$

$$4rglc = \frac{1}{lc}\, r^2g^2 + l^2c^2 + 2rglc$$

$$(rg - lc)^2 = 0 \Rightarrow rg = lc$$

$rg = lc$ è il vincolo da rispettare affinché la linea sia non distorcente.

Esempio



a $t=0$ $\quad v_0 = 0$, $i = 0$ $\quad \forall x$

Chiudo l'interruttore

$v_1^+ = E_0$ all'inizio della linea

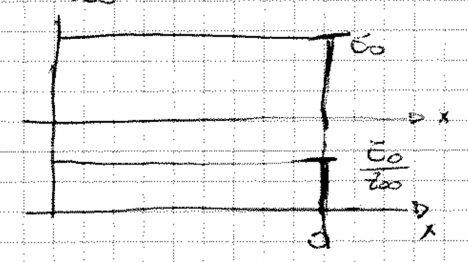
$i_1^+ = \dfrac{E_0}{Z_\infty}$ all'inizio della linea

Lo stato 1 resta tale per $t = \dfrac{d}{a}$ cioè fino a quando l'onda non raggiunge la resistenza

In $x = d$ a $t = \dfrac{d}{a}$ $\quad v_c = R_c\, i$

Se $Z_\infty = R_c$ la linea ha condizioni $\cancel{v = E_0}$ $\quad v = E_0$

$\cancel{i = \dfrac{E_0}{Z_\infty}}$ $\quad i = \dfrac{E_0}{Z_\infty}$



Se R_c è diverso da Z_∞ per un tempo $t_1 < t < 2t_1$

$$\begin{cases} v = v_1^+ + v_2^- \\ i = i_1^+ + i_2^- \end{cases}$$

$$v_c = R_c\,(\underbrace{i_1^+}_{\frac{E_0}{Z_\infty}} + i_2^-) = \underbrace{v_1^+}_{E_0} + \underbrace{v_2^-}_{-Z_\infty i_2^-}$$

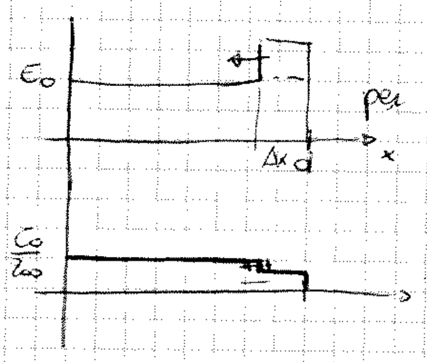
$$\boxed{\begin{array}{l} R_c\left(\dfrac{E_0}{Z_\infty} + i_2^-\right) = E_0 - Z_\infty\, i_2^- \\ \text{oppure sostituendo } i_2^- = -\dfrac{v_2^-}{Z_\infty} \\ R_c\left(\dfrac{E_0}{Z_\infty} - \dfrac{v_2^-}{Z_\infty}\right) = E_0 + v_2^- \end{array}}$$

$$v_2^-\left(1 + \frac{R_c}{Z_\infty}\right) = E_0\left(\frac{R_c}{Z_\infty} - 1\right) \Rightarrow v_2^- = E_0\,\underbrace{\frac{R_c - Z_\infty}{R_c + Z_\infty}}_{\Gamma_c}$$

$$v_2^- = E_0\,\Gamma_c$$

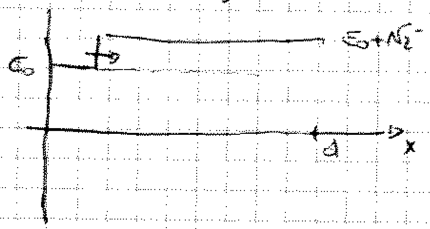
$$i_2^-\,(R_c + Z_\infty) = E_0\left(1 - \frac{R_c}{Z_\infty}\right) \Rightarrow i_2^- = E_0\,\frac{Z_\infty - R_c}{Z_\infty (R_c + Z_\infty)} = -\frac{v_2^-}{Z_\infty}$$

Se $R_c > Z_\infty$ $\qquad \Gamma_c = \dfrac{\frac{R_c}{Z_\infty} - 1}{\frac{R_c}{Z_\infty} + 1} < 1$ cioè $v_2^- < v_1^+$



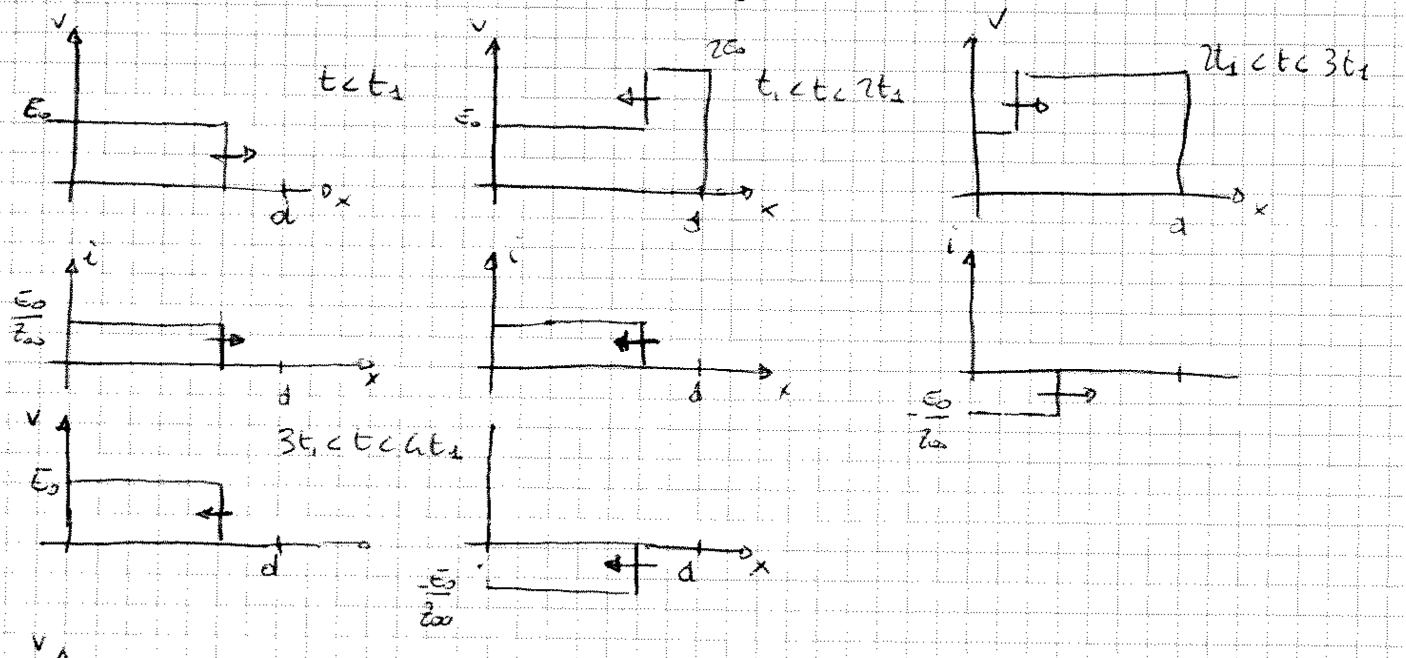
per $t = t_1 + \frac{\Delta x}{a}$

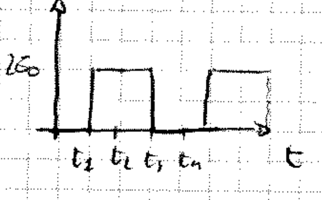
Quando l'onda arriva all'inizio della linea si ha $\Gamma_g = -1$. Si genera così un'onda $v_3^+ = -v_2^-$



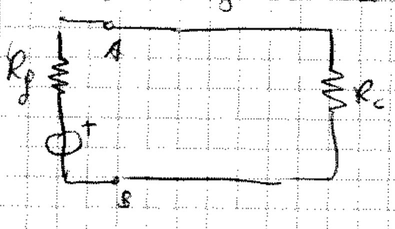
Si hanno due casi estremi: linea a vuoto o linea in c.c.

Se a vuoto ~~questo caso~~ $v_2^- = E_0$, cioè ci si ha il doppio della tensione e la corrente è nulla $i_2^- = -\frac{v_2}{Z_\infty}$





Nota: se il generatore non è ideale: ~~R_on~~

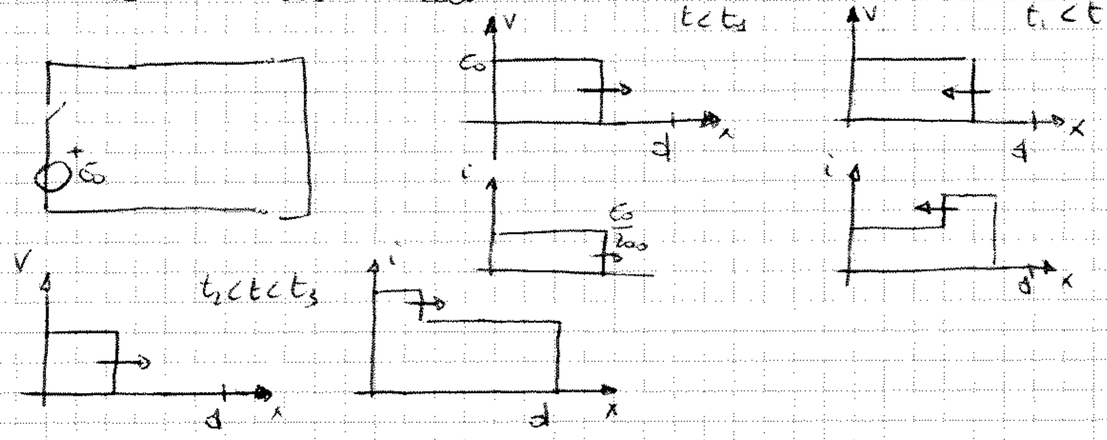


$$\left.\begin{aligned} V_{AB} &= E_0 - R_0 i = v_1^+ \\ i &= \frac{v_1^+}{Z_\infty} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

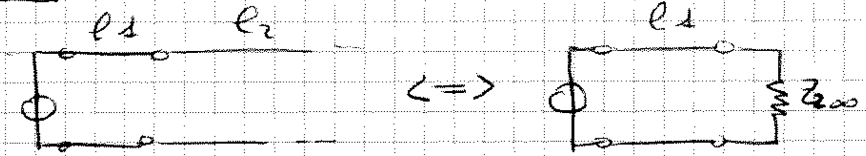
$$\Rightarrow \quad V_1^+ = E_0 \frac{Z_{0\infty}}{Z_{0\infty} + R_g}$$

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_{0\infty}}{R_g + Z_{0\infty}}$$

Se linea in corto circuito



Esempio

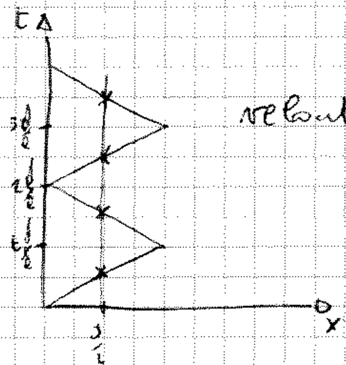


Questo esempio può essere il caso di una linea aerea che alimenta una linea in cavo.

$$Z_{a\infty} = \sqrt{\frac{\ell_a}{c_a}} \qquad Z_{c\infty} = \sqrt{\frac{\ell_c}{c_c}} \qquad \left.\begin{array}{l} \ell_a > \ell_c \\ c_a < c_c \end{array}\right\} \Rightarrow Z_{a\infty} > Z_{c\infty}$$

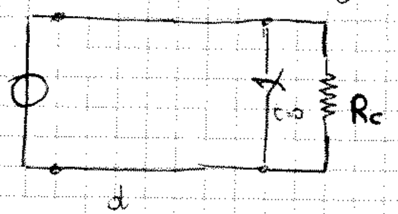
$$\Gamma_c = \frac{Z_{c\infty} - Z_{a\infty}}{Z_{c\infty} + Z_{a\infty}} < 0$$

Diagramma



velocità c

Corto circuito a fine linea



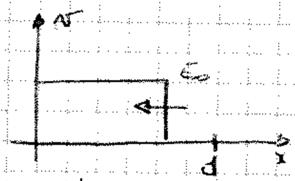
Se $t=0^-$ $\quad v(x,0)=E_0$, $\quad i(x,0)=\dfrac{E_0}{R_c}$ $\quad \forall x$

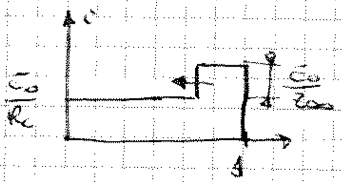
In $t=0^+$ a fine linea $v=0$ a causa del corto circuito

Nell'intervallo $0<t<\dfrac{d}{a}$ $\quad v=v_0+v_1^-$ ed $i=i_0+i_1^-$

quindi $v_1^-=-v_0$ ed $i_1^-=-\dfrac{v_1^-}{Z_\infty}=\dfrac{E_0}{Z_\infty}$ quindi

$v=0$ ed $i=\dfrac{E_0}{R_c}+\dfrac{E_0}{Z_\infty}$



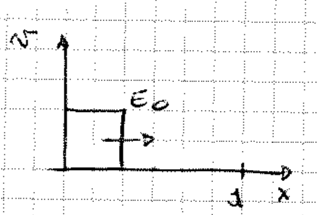


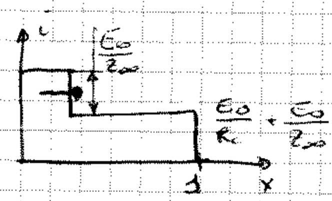
Per $0<t<\dfrac{d}{a}$

Per $\dfrac{d}{a}<t<2\dfrac{d}{a}$

$v_2^+=\Gamma_g\, v_1^-=E_0$

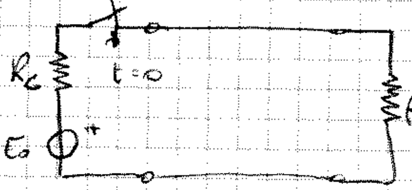
$i_2^+=\dfrac{v_2^+}{Z_\infty}=\dfrac{E_0}{Z_\infty}$





Andando avanti la corrente tende a diventare infinita.

Esempio



Condizioni iniziali $\begin{cases} v(x,0)=0 \\ i(x,0)=0 \end{cases}$

t

$v_1^+=E_0\dfrac{Z_\infty}{R_G+Z_\infty}$

$i_1^+=\dfrac{E_0}{R_G+Z_\infty}$ $\Rightarrow$

$v_2^-=\Gamma_c\, v_1^+=$

$i_2^-=\Gamma_c\, i_1^+$

$v_3^+=\Gamma_g\, v_2^-$

$i_3^+=\Gamma_g\, i_2^-$

$\Gamma_g=\dfrac{R_G-Z_\infty}{R_G+Z_\infty}$

$\Gamma_c=\dfrac{R_c-Z_\infty}{R_c+Z_\infty}$

la soluzione di regime è $v_\infty=\dfrac{E_0\,R_c}{R_c+R_G}$ $\quad i_\infty=\dfrac{E_0}{R_c+R_G}$

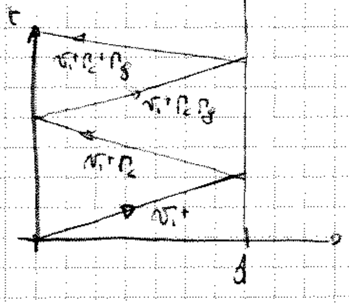
$v=v_1^++v_1^+\Gamma_c+v_1^+\Gamma_c\Gamma_g+v_1^+\Gamma_c^2\Gamma_g$

$$\lim_{t\to\infty} v=v_1^+\left[1+\Gamma_c+\Gamma_c\Gamma_g+\Gamma_c^2\Gamma_g+\Gamma_c^2\Gamma_g^2+\dots\right]=$$

$$=v_1^+\left\{\left[\Gamma_c+\Gamma_c^2\Gamma_g+\Gamma_c^3\Gamma_g^2+\dots\right]+\left[1+\Gamma_c\Gamma_g+\Gamma_c^2\Gamma_g^2+\dots\right]\right\}=$$

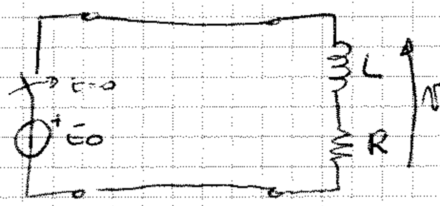
$$= v_1^+ \left\{ \Gamma_c \left[1 + \Gamma_c \Gamma_g + \Gamma_c^2 \Gamma_g^2 + \dots \right] + \left[1 + \Gamma_c \Gamma_g + \Gamma_c^2 \Gamma_g^2 + \dots \right] \right\} =$$

$$= v_1^+ \left(1 + \Gamma_c \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Gamma_c \Gamma_g \right)^n = v_1^+ \frac{1+\Gamma_c}{1-\Gamma_c \Gamma_g} = v_\infty$$



$$v_\infty = \frac{1+\Gamma_c}{1-\Gamma_c \Gamma_g} \frac{E_0 Z_\infty}{Z_\infty R_g} =$$

<u>Linea che alimenta un carico di tipo induttivo</u>



$$0 < t < \frac{d}{a} \qquad \left. \begin{array}{l} v(x,0)=0 \\ i(x,0)=0 \end{array} \right\} \forall x$$

$$\begin{cases} v_1^+ = E_0 \\ i_1^+ = \dfrac{E_0}{Z_\infty} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = L \dfrac{di}{dt} + Ri \\ v = v_1^+ + v_2^- \\ i = i_1^+ + i_2^- \end{cases} \quad \text{per} \quad \frac{d}{a} < t < 2\frac{d}{a} \qquad v_2^- = -Z_\infty i_2^-$$

$$E_0 + v_2^- = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E_0}{Z_\infty} + i_2^- \right) + R \left(\frac{E_0}{Z_\infty} + i_2^- \right)$$

$$E_0 - Z_\infty i_2^- = L \frac{d i_2^-}{dt} + R \frac{E_0}{Z_\infty} + R i_2^-$$

$$0 = L \frac{d i_2^-}{dt} + i_2^- \left(R + Z_\infty \right) - E_0 \left(1 - \frac{R}{Z_\infty} \right)$$

i_2^- = soluzione generale + soluzione particolare

$$i_{2\infty}^- = \frac{E_0 (Z_\infty - R)}{Z_\infty (Z_\infty + R)} \qquad \text{soluzione particolare}$$

$$L \frac{d i_2^-}{dt} + i_2^- (R + Z_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d i_2^-}{i_2} = - \frac{R + Z_\infty}{L} dt \qquad \tau = \frac{L}{R + Z_\infty}$$

$$\ln i_2^- = - \frac{1}{\tau} t' \Rightarrow i_2^- = A e^{-\frac{t'}{\tau}} \quad \text{con} \quad t' = t - \frac{d}{a}$$

$$i_2^- = A e^{-\frac{t - \frac{d}{a}}{\tau}} \quad \text{con} \quad \frac{d}{a} < t < 2\frac{d}{a} \qquad \text{soluzione generale}$$

$$\begin{cases} i_2^- = \dfrac{E_0}{Z_\infty}\dfrac{Z_\infty - R}{(Z_\infty+R)} + A e^{-\frac{t'}{\tau}} \Rightarrow A = -E_0\left(\dfrac{Z_\infty - R}{Z_\infty(Z_\infty+R)} + \dfrac{1}{Z_\infty}\right) = \\ i^-(t'=0)=0 \Rightarrow i_1^+ + i_2^- = 0 \Rightarrow i_2^-(t'=0) = -i_1^+(t'=0)\end{cases}$$

$$A = -\frac{E_0}{Z_\infty}\left(\frac{Z_\infty \cancel{-R} + Z_\infty \cancel{+R}}{Z_\infty + R}\right) = -\frac{2E_0}{Z_\infty+R}$$

quindi $$i_2^- = -\frac{2E_0}{Z_\infty+R}e^{-\frac{t'}{\tau}} + \frac{E_0}{Z_\infty}\frac{-R+Z_\infty}{R+Z_\infty}$$

$$i = -\frac{2E_0}{Z_\infty+R}e^{-\frac{t'}{\tau}} + \frac{E_0}{Z_\infty}\left(1+\frac{Z_\infty - R}{R+Z_\infty}\right) = -\frac{2E_0}{Z_\infty+R}e^{-\frac{t'}{\tau}} + \frac{2E_0}{R+Z_\infty} =$$

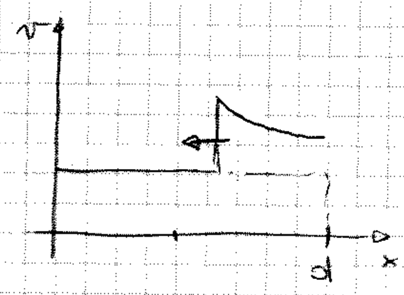
$$\boxed{i = \frac{2E_0}{R+Z_\infty}\left(1-e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)} \qquad v = L\frac{di}{dt} + Ri$$

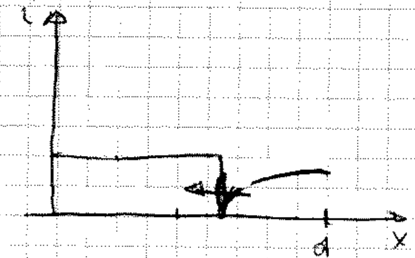
$$v = \frac{2RE_0}{R+Z_\infty}\left(1-e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) + \frac{2E_0}{R+Z_\infty}\cdot\frac{1}{\tau}L\,e^{-\frac{t'}{\tau}} =$$

$$= \frac{2RE_0}{R+Z_\infty} + \frac{2E_0}{R+Z_\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{L}{\tau} - R\right) \qquad \tau = \frac{L}{R+Z_\infty}$$

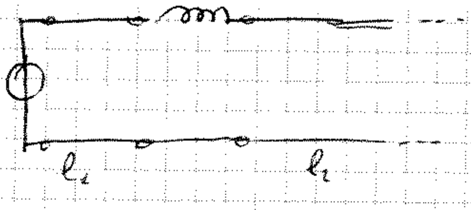
$$v = \frac{2RE_0}{R+Z_\infty} + E_0 e^{-\frac{t'}{\tau}}\frac{2Z_\infty}{R+Z_\infty}$$

$$\frac{2E_0}{R+Z_\infty}e^{-\frac{t'}{\tau}}\left(\frac{L(R+Z_\infty)}{L} - R\right) = \frac{2E_0 Z_\infty}{R+Z_\infty}e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

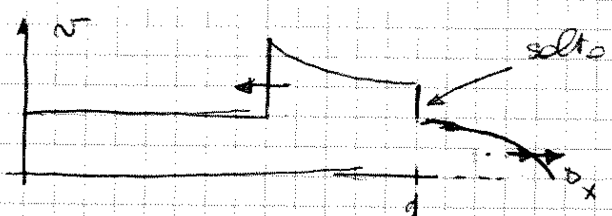




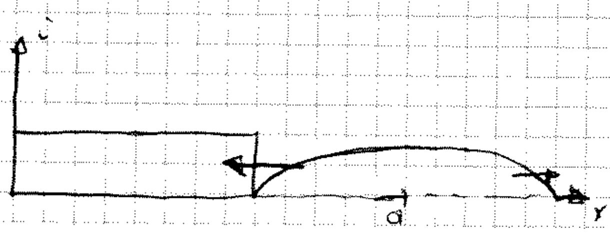
Esempio:



Se la l_2 ha $Z_\infty = R$ questo caso rientra nel caso precedente.

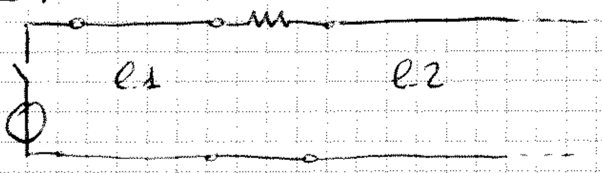


salto di tensione su induttore $\left(L\frac{di}{dt}\right)$

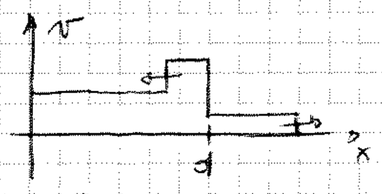


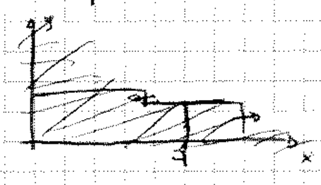
Quindi mettere un induttore ~~su~~ tra ~~tutte~~ linee serve a ridurre le sovratensioni sulla linea a valle sacrificando quella a monte.

Esempio



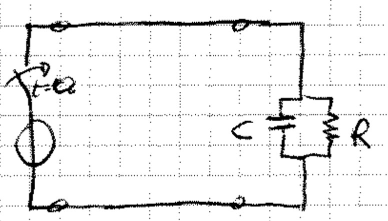
In questo caso il comportamento è questo





Difetto di questo caso è che la resistenza è un elemento dissipativo.

Linea che alimenta un carico capacitivo



$$\begin{cases} v_1^+ = E_0 \\ i_1^+ = \dfrac{E_0}{Z_\infty} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = v_1^+ + v_2^- \\ i_2 = C\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{R} \end{cases}$$

$$i = i_1^+ + i_2^- = \frac{E_0}{Z_\infty} + i_2^- \Rightarrow i_2^- = -\frac{E_0}{Z_\infty} + C\frac{dv}{dt} + \frac{v_1^+ + v_2^-}{R}$$

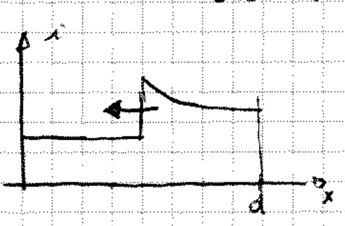
$$i_2^- = -\frac{E_0}{Z_\infty} + C\frac{d}{dt}\left(v_1^+ + v_2^-\right) + \frac{v_1^+ + v_2^-}{R} = C\frac{dv_2^-}{dt} + \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{Z_\infty} + \frac{v_2^-}{R}$$

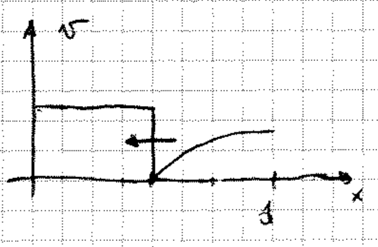
condizioni iniziali a $t = \frac{d}{a}$ $\quad v = 0$, $i = 0$

I risultati sono

$$i = \frac{2E_0}{R + Z_\infty}\left(1 + \frac{R}{Z_\infty} e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \quad \text{con} \quad \tau = C \cdot R_{eq} = C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_\infty}\right)$$

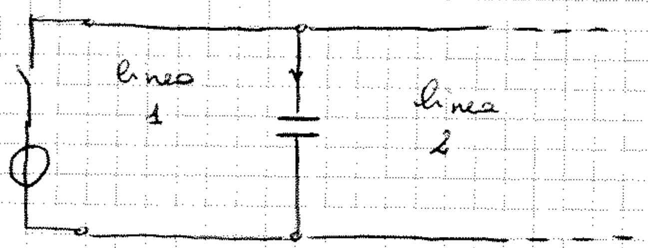
$$v = E_0 \frac{2R}{R + Z_\infty}\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)$$



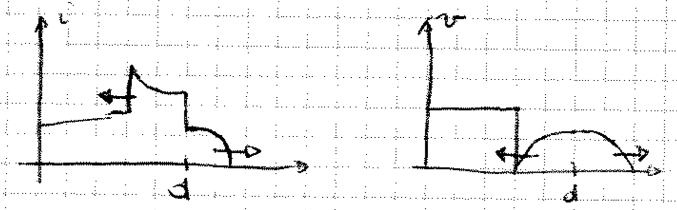


$$\frac{d}{a} < t < \frac{2d}{a}$$

Esempio

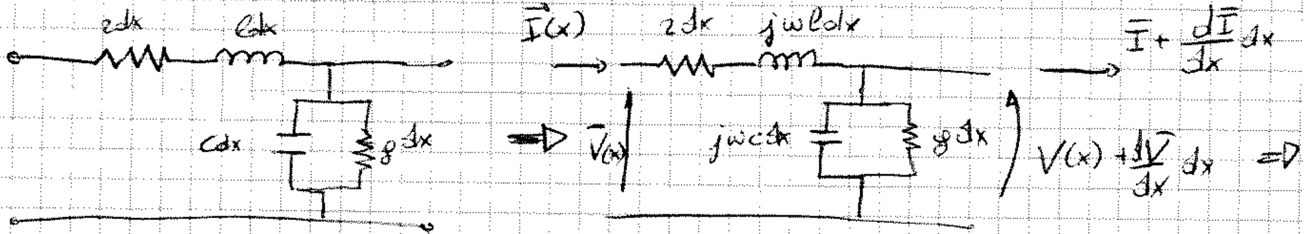


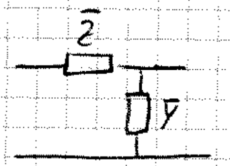
Riduzione delle sovracorrenti che vengono assorbite dal condensatore



E' la soluzione migliore tra le tre viste negli esempi

Linee bifilari e regime sinusoidale



$\Rightarrow$ 

$$\begin{cases} z = r + j\omega l \\ y = g + j\omega c \end{cases} \qquad \omega = 2\pi f$$

Le equazioni sono:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\bar{V}}{dx} = \bar{Z}\,\bar{I} \\ -\dfrac{d\bar{I}}{dx} = \bar{y}\,\bar{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \bar{z}\,\dfrac{d\bar{I}}{dx} = \bar{z}(-\bar{y}\,\bar{V}) \\ -\dfrac{d^2\bar{I}}{dx^2} = \bar{y}\,\dfrac{d\bar{V}}{dx} = \bar{y}\,(-\bar{z}\,\bar{I}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \bar{z}\,\bar{y}\,\bar{V} \\ \dfrac{d^2\bar{I}}{dx^2} = \bar{z}\,\bar{y}\,\bar{I} \end{cases}$$

definiamo $\bar{\gamma}^2 = \bar{z}\,\bar{y}$

$\bar{\gamma}$ è la costante di propagazione $(\gamma = \alpha + j\beta)$

$$\bar{\gamma}^2 = (r + j\omega l)(g + j\omega c) = m + jn$$

$$\begin{cases} rg - \omega^2 lc = m \\ \omega l g + \omega r c = n \end{cases}$$

Inoltre $\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \underbrace{(\alpha^2 - \beta^2)}_{m} + \underbrace{2j\alpha\beta}_{jn}$

$$\begin{cases} m^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 \\ n^2 = 4\alpha^2\beta^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{m^2+n^2} \\ \alpha^2-\beta^2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}+m}{2}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}-m}{2}} \end{cases}$$

Se $r=0$ e $g=0$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{m} \\ \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -\omega^2 \ell c \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V \Rightarrow \bar{V} = \bar{A}e^{\bar{\gamma}x} + \bar{B}e^{-\bar{\gamma}x}$$

$$I = C e^{\bar{\gamma}x} + B e^{-\bar{\gamma}x}$$

Ma $I = -\dfrac{1}{Z}\dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{1}{Z}\left(\bar{\gamma}\bar{A}e^{\bar{\gamma}x} - \bar{\gamma}\bar{B}e^{-\bar{\gamma}x}\right) =$

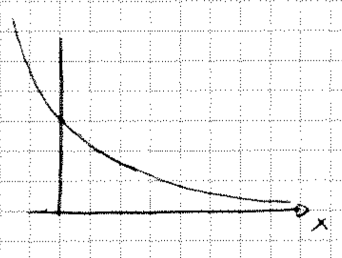
$$= -\frac{\bar{\gamma}}{Z}\bar{A}e^{\bar{\gamma}x} + \frac{\bar{\gamma}}{Z}\bar{B}e^{-\bar{\gamma}x}$$

con $\gamma = \sqrt{zy}$ quindi

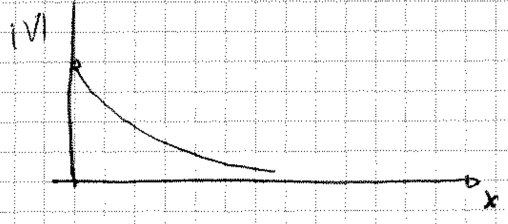
$$I = -\underbrace{\sqrt{\frac{y}{z}}}_{=\frac{1}{Z_\infty}}\bar{A}e^{\bar{\gamma}x} + \underbrace{\sqrt{\frac{y}{z}}}_{=\frac{1}{Z_\infty}}\bar{B}e^{-\bar{\gamma}x} = -\frac{1}{Z_\infty}\bar{A}e^{\bar{\gamma}x} + \frac{1}{Z_\infty}\bar{B}e^{-\bar{\gamma}x}$$

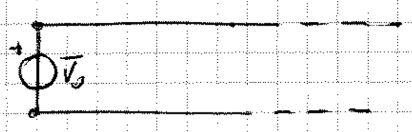
Se $r=0$ e $g=0$, $Z_\infty = \sqrt{\dfrac{\ell}{c}}$

$$e^{-\gamma x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$$



Eserciziello accademico: linea di lunghezza infinita





$$V = \underbrace{A}_{=0} e^{\alpha x} e^{j\beta x} + B e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

perché altrimenti diverge.

$V = B e^{-\alpha x} e^{j\beta x}$ in $x=0$ e $t=0$ si ha che

$V_0 = B$

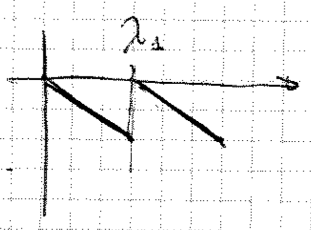
$$\begin{cases} V = V_0 e^{-\bar{\gamma} x} \\ I = \dfrac{V_0}{Z_\infty} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dI}{dx}} = \frac{+ZI}{+yV} \Rightarrow \left| \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dI}{dx}} \right|_{x=0} = \frac{Z}{y} \frac{I_0}{V_0} = \frac{Z_\infty^2}{Z_\infty} = Z_\infty$$

$$\frac{Z\left(-\frac{A}{Z_\infty} + \frac{B}{Z_\infty}\right)}{y\,(A+B)} = \frac{Z_\infty^2}{Z_\infty} \frac{-A+B}{A+B} = \ldots$$

NON LO SA NEANCHE LUI, MA NON SERVE

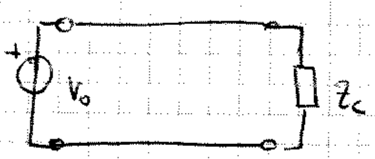
Rotazione di fase ($\beta\lambda = 2\pi$, λ = lunghezza d'onda)



Se la linea è senza perdite

$$\gamma^2 = -\omega^2 lc \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{lc} = \frac{2\pi f}{a} = \frac{\overbrace{2\pi}^{\omega}}{\underbrace{aT}_{\frac{1}{\sqrt{lc}}}}$$

<u>Linea di lunghezza finita</u>



$$V = \bar{A} e^{\gamma x} + B e^{-\bar{\gamma} x}$$

$$I = -\frac{A}{Z_\infty} e^{\gamma x} + \frac{B}{Z_\infty} e^{-\gamma x}$$

$$\begin{cases} e^{\gamma x} = \dfrac{\cosh(\gamma x) + \sinh(\gamma x)}{2} \\ e^{-\gamma x} = \dfrac{\cosh(\gamma x) - \sinh(\gamma x)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh(\gamma x) = \dfrac{e^{\bar{\gamma} x} + e^{-\bar{\gamma} x}}{2} \\ \sinh(\gamma x) = \dfrac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \end{cases}$$

$$V = \frac{A}{\cancel{2}}\cosh(\bar\gamma x) + \frac{A}{\cancel{2}}\sinh(\bar\gamma x) + \frac{B}{2}\cosh(\bar\gamma x) - \frac{B}{2}\sinh(\bar\gamma x) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{A+B}{\cancel{2}}\right)}_{P}\cosh(\bar\gamma x) + \underbrace{\left(\frac{A-B}{\cancel{2}}\right)}_{Q}\sinh(\bar\gamma x)$$

$$I = -\frac{A}{Z_\infty}\cosh(\bar\gamma x) - \frac{A}{Z_\infty}\sinh(\bar\gamma x) + \frac{B}{Z_\infty}\cancel{\sinh}(\bar\gamma x) - \frac{B}{Z_\infty}\sinh(\bar\gamma x) =$$

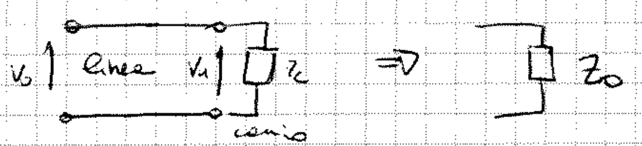
$$= -\frac{Q}{Z_\infty}\cosh(\bar\gamma x) - \frac{P}{Z_\infty}\sinh(\bar\gamma x)$$

$$\bar V(x=0) = \bar V_0 = P \qquad (\sinh(\bar\gamma \cdot 0) = 0 \Rightarrow P = V_0)$$

$$\frac{\bar V(x=d)}{\bar I(x=d)} = \bar Z_c \qquad \left(\frac{V_0\cosh(\bar\gamma d) + Q\sinh(\bar\gamma d)}{-\frac{1}{Z_\infty}\left(Q\cosh(\bar\gamma d) + V_0\sinh(\bar\gamma d)\right)} = Z_c\ ;\right.$$

$$Q\left(\sinh(\bar\gamma x) + \frac{Z_c}{Z_\infty}\cosh(\bar\gamma x)\right) = -V_0\cosh(\bar\gamma d) - \frac{V_0 Z_c}{Z_\infty}\sinh(\bar\gamma d)$$

$$Q = -\frac{V_0\left(Z_\infty\cosh(\bar\gamma d) + Z_c\sinh(\bar\gamma d)\right)}{Z_c\cosh(\bar\gamma d) + Z_\infty\sinh(\bar\gamma d)}$$



$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{P}{-\frac{Q}{Z_\infty}}$$

~~come calcolo Z_0?~~

$$Z_0 = \frac{\cancel{V_0}}{\frac{\cancel{V_0}}{Z_\infty}\cdot\frac{Z_\infty\cosh(\bar\gamma d) + Z_c\sinh(\bar\gamma d)}{Z_c\cosh(\bar\gamma d) + Z_\infty\sinh(\bar\gamma d)}} =$$

$$\bar Z_0 = \bar Z_\infty \cdot \frac{\bar Z_c\cosh(\bar\gamma d) + \bar Z_\infty\sinh(\bar\gamma d)}{\bar Z_\infty\cosh(\bar\gamma d) + \bar Z_c\sinh(\bar\gamma d)}$$

Se $\bar Z_c = \bar Z_\infty \Rightarrow Z_0 = Z_\infty$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{P\cosh(\bar\gamma d) + Q\sinh(\bar\gamma d)}{V_0} = \frac{V_0\cosh(\bar\gamma d) - \frac{V_0\left(Z_\infty\cosh(\bar\gamma d) + Z_c\sinh(\bar\gamma d)\right)}{Z_c\cosh(\bar\gamma d) + Z_\infty\sinh(\bar\gamma d)}\sinh(\bar\gamma d)}{V_0}$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_c\cosh^2(\bar\gamma d) + \cancel{Z_\infty\cosh(\bar\gamma d)\sinh(\bar\gamma d)} - \cancel{Z_\infty\cosh(\bar\gamma d)\sinh(\bar\gamma d)} - Z_c\sinh^2(\bar\gamma d)}{Z_c\cosh(\bar\gamma d) + Z_\infty\sinh(\bar\gamma d)}$$

$$\frac{V_u}{V_0} = \frac{Z_c \overbrace{(\cosh^2(\bar\gamma d) - \sinh^2(\bar\gamma d))}^{1}}{Z_c \cosh(\bar\gamma d) + Z_{00} \sinh(\bar\gamma d)} = \boxed{\frac{Z_c}{Z_c \cosh(\bar\gamma d) + Z_{00} \sinh(\bar\gamma d)}}$$

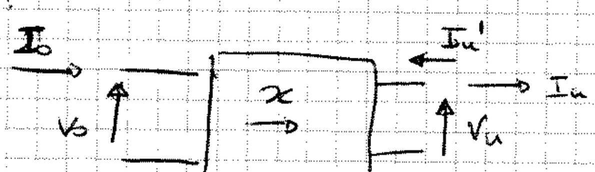
$$\frac{I_u}{I_0} = \frac{\frac{V_u}{Z_c}}{\frac{V_0}{Z_0}} = \frac{V_u}{V_0} \cdot \frac{Z_0}{Z_c} = \frac{Z_0}{Z_c \cosh(\bar\gamma d) + Z_{00} \sinh(\bar\gamma d)} \overset{\text{sostituiamo } Z_0}{=}$$

$$= Z_{00} \frac{Z_c \cosh(\bar\gamma d) + Z_{00} \sinh(\bar\gamma d)}{Z_{00} \cosh(\bar\gamma d) + Z_c \sinh(\bar\gamma d)} \cdot \frac{1}{Z_c \cosh(\bar\gamma d) + Z_{00} \sinh(\bar\gamma d)} =$$

$$= \boxed{\frac{Z_{00}}{Z_{00} \cosh(\bar\gamma d) + Z_c \sinh(\bar\gamma d)} = \frac{I_u}{I_0}}$$

La linea in questione ha andamento simile ad una linea di lunghezza infinita.

Noi sappiamo già come descrivere una linea elettrica a parametri distribuiti.



Per utilizzare la medesima notazione ai morsetti di ingresso e di uscita creiamo $I_u' = -I_u$.
Se scambio i morsetti di ingresso e di uscita dovrò ritrovarmi con un comportamento simile.

$$\begin{cases} V = P\cosh(\bar\gamma x) + Q\sinh(\bar\gamma x) \\ I = -\frac{1}{Z_{00}}\left[P\sinh(\bar\gamma x) + Q\sinh(\bar\gamma x)\right] \end{cases}$$

in $x=0$ si avrà che:

$$\begin{cases} V_0 = P \\ I_0 = -\frac{Q}{Z_{00}} \end{cases}$$

in $x=d$:
$$\begin{cases} V_u = P\cosh(\bar\gamma d) + Q\sinh(\bar\gamma d) \\ I_u = -\frac{1}{Z_{00}}\left[P\sinh(\bar\gamma d) + Q\cosh(\bar\gamma d)\right] \end{cases}$$

Ora sostituiamo $I_u = -I_u'$

$$\begin{cases} V_u = P\cosh(\bar\gamma d) + Q\sinh(\bar\gamma d) \\ I_u' = \frac{1}{Z_{00}}\left[P\sinh(\bar\gamma d) + Q\sinh(\bar\gamma d)\right] \end{cases}$$

Ora sostituiamo $P = V_0$ e $Q = -I_0 Z_{00}$ (condizioni per $x=0$)

$$\begin{cases} V_u = V_0 \cosh(\bar{\gamma} d) - Z_{00} I_0 \sinh(\bar{\gamma} d) \\ I'_u = \dfrac{V_0}{Z_{00}} \sinh(\bar{\gamma} d) - I_0 \cosh(\bar{\gamma} d) \end{cases}$$

In forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} V_u \\ I'_u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cosh(\bar{\gamma} d) & -Z_{00} \sinh(\bar{\gamma} d) \\ \dfrac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{Z_{00}} & -\cosh(\bar{\gamma} d) \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$[T]$ matrice di trasmissione della linea.

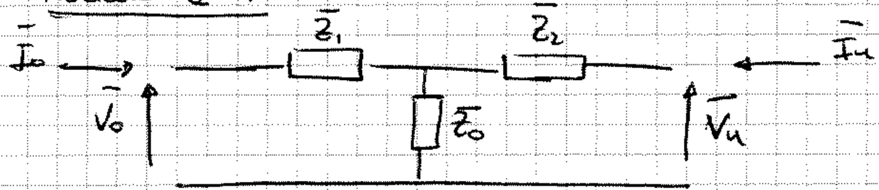
Proprietà di $[T]$:

- $\det(T) = -1$
- $T = T^{-1}$

} giustificazione formale della reciprocità del doppio bipolo

I doppi bipoli passivi possono essere rappresentati con un modello a "T" o con uno a "π".

Modello a T



Analizziamo il comportamento a vuoto dei morsetti di uscita

Affinché il comportamento del doppio bipolo sia reciproco è necessario che $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$

$$\left.\frac{\bar{I}_0}{\bar{V}_u}\right|_{I'_u=0} = \frac{1}{Z_0} = \frac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{Z_{00}} \qquad \left.\frac{\bar{I}_0}{\bar{V}_0}\right|_{I'_u=0} = \frac{1}{Z_1 + Z_0} \frac{Z_0}{Z_0} = \frac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{Z_{00} \cosh(\bar{\gamma} d)}$$

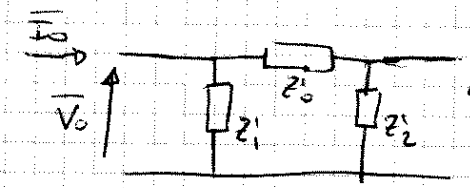
$$\left.\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_u}\right|_{I'_u=0} = \frac{Z_1 + Z_0}{Z_0} = \cosh(\bar{\gamma} d)$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma d) & -Z_{00} \sinh(\bar{\gamma} d) \\ \dfrac{\sinh(\gamma d)}{Z_{00}} & -\cosh(\gamma d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u \\ I'_u \end{bmatrix}$$

Inoltre
$$Z_0 + Z_1 = Z_0 \cosh(\bar{\gamma} d)$$
$$Z_1 = Z_0 (\cosh(\bar{\gamma} d) - 1) = Z_{00} \frac{\cosh(\gamma d) - 1}{\sinh(\gamma d)}$$

Queste equivalenze è rigorose, non sono state fatte approx.

Modello a Π



Analizziamo il comportamento a vuoto dei morsetti di ingresso

$$\left.\frac{\bar{V}_o}{\bar{I}'_u}\right|_{V_u=0} = -z'_o = -\bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d) \qquad \left.\frac{\bar{I}'_u}{\bar{I}_o}\right|_{V_u=0} = -\frac{z'_1}{z'_1+z'_o} = -\frac{1}{\cosh(\bar{\gamma} d)}$$

Anche in questo caso è necessario che $z'_1 = z'_2$

$$\begin{cases} \bar{V}_o = \bar{V}_u \cosh(\bar{\gamma} d) + \bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d)\, \bar{I}_u \\ \bar{I}_o = \bar{V}_u \dfrac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{\bar{Z}_\infty} + \bar{I}_u \cosh(\bar{\gamma} d) \end{cases}$$

Ne segue che

$$\bar{I}_u = \frac{1}{\bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d)} V_o - \frac{V_u}{\bar{Z}_\infty \operatorname{tgh}(\bar{\gamma} d)} = \frac{\bar{V}_o}{\bar{Z}_2} - \frac{\bar{V}_u}{\bar{Z}_1}$$

$$\bar{I}_o = \frac{\bar{V}_u \sinh(\bar{\gamma} d)}{\bar{Z}_\infty} + \cosh(\bar{\gamma} d)\left[\frac{\bar{V}_o}{\bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d)} - \frac{\bar{V}_u}{\bar{Z}_\infty \operatorname{tgh}(\bar{\gamma} d)}\right] =$$

$$= \frac{\bar{V}_u \sinh^2(\bar{\gamma} d) + \bar{V}_o \cosh(\bar{\gamma} d) - \bar{V}_u \cosh^2(\bar{\gamma} d)}{\bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d)} = \frac{\bar{V}_o}{\bar{Z}_\infty \operatorname{tgh}(\bar{\gamma} d)} - \frac{\bar{V}_u}{\bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d)}$$

$$= \frac{V_o}{Z_1} - \frac{V_u}{Z_2}$$

con

$$\begin{cases} \bar{Z}_1 = \bar{Z}_\infty \operatorname{tgh}(\bar{\gamma} d) \\ \bar{Z}_2 = \bar{Z}_\infty \sinh(\bar{\gamma} d) \end{cases}$$

Note tensioni e correnti possiamo valutare le potenze in ingresso ed in uscita dalla linea.

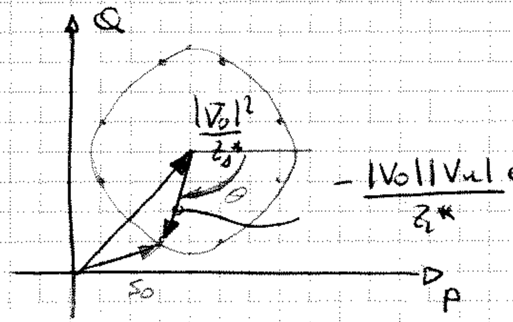
$$\bar{S}_o = \bar{V}_o \bar{I}_o^* = \bar{V}_o \left[\frac{\bar{V}_o^*}{\bar{Z}_1^*} - \frac{\bar{V}_u^*}{\bar{Z}_2^*}\right] = \frac{|\bar{V}_o|^2}{\bar{Z}_1^*} - \frac{|\bar{V}_o||\bar{V}_u| e^{j\theta}}{\bar{Z}_2^*}$$

$$\bar{S}_u = \bar{V}_u \bar{I}_u^* = \bar{V}_u \left[\frac{\bar{V}_o^*}{\bar{Z}_2^*} - \frac{\bar{V}_u^*}{\bar{Z}_1^*}\right] = \frac{|\bar{V}_u||\bar{V}_o| e^{-j\theta}}{\bar{Z}_2^*} - \frac{|\bar{V}_u|^2}{\bar{Z}_1^*}$$

con:

$$\bar{V}_o = V_o e^{j\varphi_o}$$
$$\bar{V}_u = V_u e^{j\varphi_u}$$
$$\theta = \varphi_o - \varphi_u$$

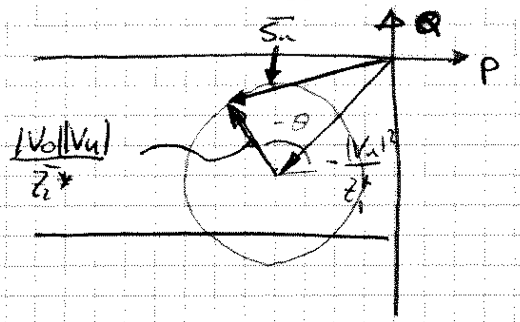
Analizziamo le potenze in un piano PQ



il modulo non cambia, cambia solo l'inclinazione

A seconda di θ variano le potenze. Ho una zona in cui P sarà massima ed una zona in cui Q sarà massima.

Valutiamo ora $\overline{S_u}$



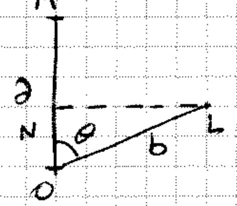
I raggi delle due circonferenze sono uguali (almeno in prima approx).

$\overline{S_0} - \overline{S_u} = S_a$

$$\frac{|\overline{V_0}|^2}{\overline{Z_1^*}} - \frac{|\overline{V_0}||\overline{V_u}|\, e^{j\theta}}{\overline{Z_2^*}} + \frac{|\overline{V_0}||\overline{V_u}|\, e^{-j\theta}}{\overline{Z_2^*}} - \frac{|\overline{V_u}|^2}{\overline{Z_1^*}} = \frac{|\overline{V_0}|^2+|V_u|^2}{\overline{Z_1^*}} - \frac{|V_0||V_u|}{\overline{Z_2^*}}\overbrace{\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)}^{2\cos\theta} =$$

$$\text{Perdite in linea} = \mathrm{Re}\left[\overline{S_0}-\overline{S_u}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{|V_0|^2+|V_u|^2}{\overline{Z_1^*}}\right] - \mathrm{Re}\left[\frac{|V_0||V_u|}{\overline{Z_2^*}}\right]\cdot 2\cdot\cos\theta =$$

$$= a - b\cos\theta$$



$a = MO$, $b = LO$

MN: perdite in linea

Per $\theta = 0$ perdite minime, per $\theta = \pi$ perdite massime.

Inoltre per le linee sufficientemente corte si può approssimare $\sinh(\bar{\gamma}d)$ con $\bar{\gamma}d = (\alpha + j\beta)d$ e $\cosh(\bar{\gamma}d)$ con 1

$\beta\lambda = 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, cioè la lunghezza d'onda interviene direttamente sulla valutazione della fase.

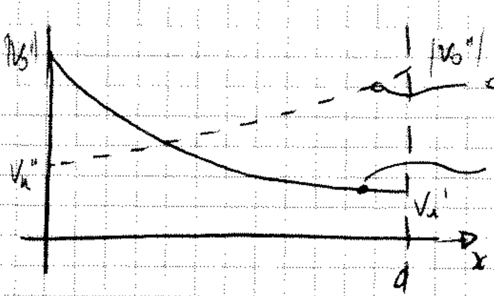
LINEE A REGIME SINUSOIDALE CON L'APPROCCIO DEGLI ELETTRONICI

1 "onda" progressiva + 1 onda regressiva

Si parla di ~~un~~ onde stazionarie

$$\begin{cases}\bar V = \bar A e^{\gamma x} + \bar B e^{-\gamma x}\\ \bar I = -\dfrac{A}{Z_\infty} e^{\gamma x} + \dfrac{B}{Z_\infty} e^{-\gamma x}\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar V = \bar A \underbrace{e^{-\gamma d} e^{\gamma d}}_{=1} e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\bar V = \underbrace{\bar A e^{\gamma d} e^{-\gamma(d-x)}}_{\text{onda regressiva}} + \underbrace{\bar B e^{-\gamma x}}_{\text{o. prog}}\end{cases}$$



Tutto avviene come se V fosse la somma dell'onda progressiva e di quella regressiva.

$$\bar V_0'' = \bar A e^{\gamma d} \qquad \bar V_0' = \bar B$$

definiamo $\bar r = \dfrac{\bar V_0''}{\bar V_u'}$ il fattore di riflessione

$$r = \frac{\bar A e^{\gamma d}}{B e^{-\gamma d}} = \frac{\frac{(P+Q)}{2} e^{\gamma d}}{\frac{(P-Q)}{2} e^{-\gamma d}}$$

$$\cancel{B} E_0 = \bar V(x=0) = \bar A + \bar B = \frac{P}{\cancel{2}}$$

$$r = \frac{\cancel{V_0}\left(1 - \dfrac{Z_\infty\cosh(\gamma d) + Z_c\sinh(\gamma d)}{Z_c\cosh(\gamma d) + Z_\infty\sinh(\gamma d)}\right) e^{2\gamma d}}{\cancel{V_0}\left(1 + \dfrac{Z_\infty\cosh(\gamma d) + Z_c\sinh(\gamma d)}{Z_c\cosh(\gamma d) + Z_\infty\sinh(\gamma d)}\right)} = e^{2\gamma d}\frac{Z_c\cosh(\gamma d) + Z_\infty\sinh(\gamma d) - Z_\infty ch(\gamma d) + Z_c sh(\gamma d)}{Z_c\, ch(\gamma d) + Z_\infty sh(\gamma d) + Z_\infty ch(\gamma d) + Z_c sh(\gamma d)}$$

$$= \frac{Z_c - Z_\infty\,(\cosh(\gamma d) - \sinh(\gamma d))}{Z_c + Z_\infty\,(\cosh(\gamma d) + \sinh(\gamma d))} e^{2\gamma d} = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}\frac{e^{-\gamma d}}{\cancel{e^{\gamma d}}}\cancel{e^{2\gamma d}} = \boxed{\frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty} = r}$$

In $x=0$ $\quad \bar V = E_0 = \bar V_0' + \bar V_u'' = \bar V_0' + \bar V_0'' e^{-\gamma d} = \bar V_0' + r V_0' e^{-2\gamma d} =$

$$\bar V_0'' = \bar r \cdot \bar V_u'$$

$$E_0 = V_0'(1 + r\,e^{-2\gamma d}) \Rightarrow \boxed{V_0' = \frac{E_0}{1 + r\,e^{-2\gamma d}}}$$

$$V_0'' = r\,V_0'\,e^{-\gamma d} = r\,e^{-\gamma d}\,\frac{E_0}{1 + r\,e^{-2\gamma d}} = \boxed{\frac{r\,e^{-\gamma d}}{1 + r\,e^{-2\gamma d}}\,E_0 = V_0''}$$

Se la linea è adattata $(Z_c = Z_\infty)$ $r = 0$. Quindi:

$$\boxed{V_0' = E_0 \qquad V_0'' = 0}$$

Correnti:

$$\bar{I} = -\frac{\bar{V}_0''}{Z_\infty}\,e^{-\gamma(d-x)} + \frac{\bar{V}_0'}{Z_\infty}\,e^{-\gamma x}$$

Se la linea è adattata $V_0'' = 0$ $\quad I = \frac{\bar{V}_0'}{Z_\infty}\,e^{-\gamma x}$

__Carta di Smith__

$$\bar{r} = \frac{\bar{Z}_c - \bar{Z}_\infty}{\bar{Z}_c + \bar{Z}_\infty} = \frac{\frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_\infty} - 1}{\frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_\infty} + 1} = \frac{\bar{\eta} - 1}{\bar{\eta} + 1}$$

$\bar{r} = z + jw$

$\bar{\eta} = x + jy$

$$z + jw = \frac{x + jy - 1}{x + jy + 1}$$

$$\Downarrow$$

$$zx + jzy + z + jxw - yw + jw = x + jy - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} zx + z - yw = x - 1 \\ zy + xw + w = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} zx + z - x + 1 = wy = \dfrac{w^2(x+1)}{1-z} \\ y = \dfrac{xw + w}{1-z} \end{cases}$$

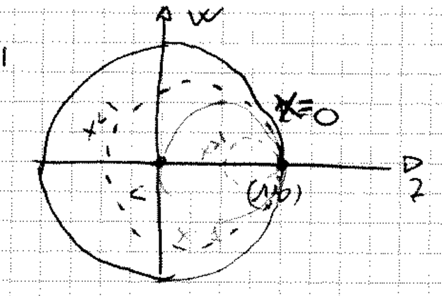
$$\cancel{wy = \frac{w^2(x+1)}{1-z}} \qquad \cancel{\Rightarrow y(1-z) = w(x+1) \Rightarrow y = \frac{w(x+1)}{}}$$

$$zx + z - x + 1 - \frac{w^2(x+1)}{1-z} = 0$$

è una circonferenza su piano (z, w) con

$$R = \frac{1}{1+x} \quad e \quad C = \left(\frac{x}{1+x}, 0\right)$$

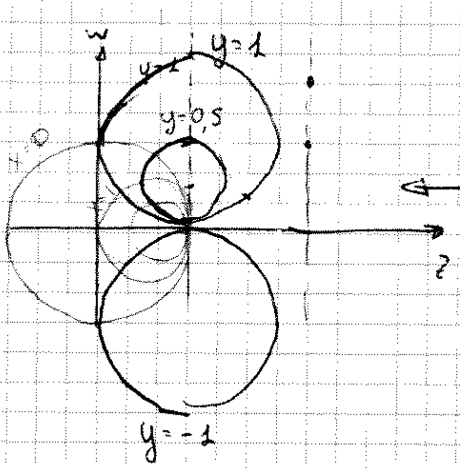
1



$$\begin{cases} zx + z - wy = x - 1 \\ zy + wx + w = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{z - wy + 1}{1 - z} \\ zy + w\left(\dfrac{z - wy + 1}{1 - z}\right) + w = y \end{cases}$$

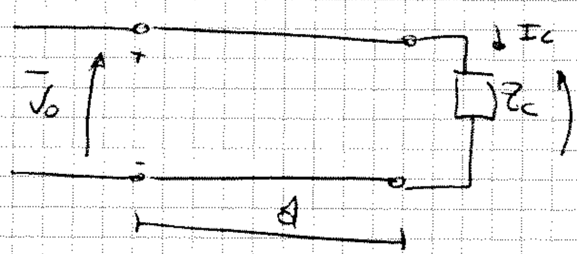
eq. di circonf.

$$C = \left(1, \frac{1}{y}\right) \qquad R = \frac{1}{|y|}$$



← carta di Smith

SITUAZIONI PARTICOLARI



$$I(x=d) = \frac{V_0'}{Z_\infty} e^{-\gamma d} - \frac{V_0''}{Z_\infty}$$

$$I_c = \frac{V_0}{Z_\infty}\left[\frac{e^{-\gamma d}}{1 + r e^{-2\gamma d}} - \frac{r e^{-\gamma d}}{1 + r e^{-2\gamma d}}\right] =$$

$$= \frac{V_0}{Z_\infty} e^{-\gamma d}\left[\frac{1 - r}{1 + r e^{-\gamma d}}\right]$$

$$\frac{dI_c}{dr} = 0 \rightarrow \frac{dI_c}{dr} = \frac{-1(1 + re^{-2\gamma d}) - (1 - r)e^{-2\gamma d}}{(\qquad)^2}$$

$$\cancel{-1(1 + re^{-2\gamma d}) - (1 - r)e^{-2\gamma d} = 0}$$

$$\cancel{-1 - re^{-2\gamma d} - 1 + re^{-2\gamma d} = 0}$$

$$-1 - e^{-2\gamma d} = 0 \qquad \gamma = \alpha + j\beta$$

$$e^{-2\alpha \cdot d}\, e^{-2j\beta d} = e^{-j(2n+1)\pi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha = 0 \\ &2\beta d = (2n + 1)\pi \end{aligned}} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d = (2n+1)\pi \qquad d = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad e \ \alpha = 0$$

$$d = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \begin{cases} \text{se } n \text{ pari} \\ \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\text{se } n=0 \quad d = \frac{\lambda}{4} \qquad n=2 \quad d = \frac{5}{4}\lambda = \lambda + \frac{\lambda}{4} \ldots$$

$$n=1 \quad d = \frac{3}{4}\lambda \qquad n=3 \quad d = \frac{7}{4}\lambda = \lambda + \frac{3}{4}\lambda \ldots$$

$$I_c \Big|_{\frac{dI_c}{dz}=0} = \frac{V_0}{Z_{\infty}} e^{-\bar{\gamma} d}$$

$$\bar{\gamma} d = j\beta d = j\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(2n+1)\frac{\lambda}{4} = j(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

se $n=0$

$$e^{-\bar{\gamma} d} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

se $n=1$

$$e^{-\bar{\gamma} d} = e^{-j\frac{3}{2}\pi} = j$$

La corrente sul carico quindi

vale $I_c = \frac{\bar{V_0}}{Z_{\infty}} e^{-\bar{\gamma} d} = \frac{\bar{V_0}}{Z_{\infty}}(\mp j) = \mp j \frac{\bar{V_0}}{Z_{\infty}}$

se la lunghezza della linea è multiplo di quarti d'onda
la corrente ha carattere reattivo o induttivo

$$I = \frac{V_0}{Z_{\infty}} \frac{e^{-\bar{\gamma} x}}{1 + \Gamma e^{-2\bar{\gamma} d}} - \frac{V_0}{Z_{\infty}} \frac{e^{-\gamma(d-x)} \Gamma e^{-\gamma d}}{1 + \Gamma e^{-2\gamma d}}$$

$$I(x=0) = \frac{V_0}{Z_{\infty}} \frac{1}{1-\Gamma} - \frac{V_0}{Z_{\infty}} \frac{\Gamma e^{-2\gamma d}}{1-\Gamma} = \frac{V_0}{Z_{\infty}}\left(\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}\right)$$

La corrente nel carico non dipende dal carico. (se la lunghezza della linea è multipla di quarti d'onda).

$$V = \left[\frac{\cancel{\ } e^{-\gamma x}}{1+re^{-2\gamma d}} + \frac{e^{-\gamma(d-x)} \quad -e^{-\gamma d}}{1+2e^{-2\gamma d}} \right] V_0$$

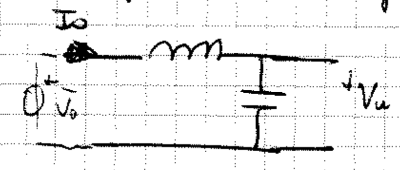
$$V(x=d) = V_0 \left[\frac{e^{-\gamma d}}{1+re^{-2\gamma d}} + \frac{re^{-\gamma d}}{1+re^{-2\gamma d}} \right] = V_u \quad \text{con} \quad r = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}$$

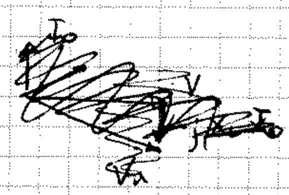
Se la linea è aperta $(Z_c \to \infty)$ allora $r = 1$ allora

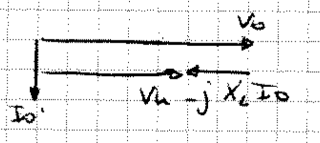
$$V_u = V_0 \frac{2e^{-\gamma d}}{1+e^{-2\gamma d}} = \frac{V_0}{\frac{e^{\gamma d}+e^{-\gamma d}}{2}} \qquad \frac{V_u}{V_0} = \frac{1}{\cosh(\gamma d)}$$

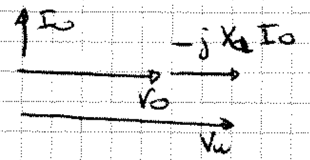
Se $\cosh(\gamma d) \leq 1$ si può avere a fine linea una tensione maggiore rispetto all'inizio della linea. (effetto Ferranti)

Specie di interpretazione dell'eff. Ferranti









se linea ha comportamento prevalentemente capacitivo

se comportamento induttivo

Ricordiamo che:

$$V = V_0' e^{-\gamma x} + V_0'' e^{-\gamma(d-x)} \quad \text{con}$$

$$V_0' = \frac{V_0}{1-re^{-2\gamma d}} \qquad V_0'' = V_0 \frac{re^{-2\gamma d}}{1-re^{-2\gamma d}} \quad \text{ed} \quad r = \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}$$

$$I = \frac{V_0'}{Z_\infty} e^{-\gamma d} - \frac{V_0''}{Z_\infty} e^{-\gamma(d-x)}$$

$$V(x=d) = V_c = V_0' e^{-\gamma d} + V_0'' = \frac{V_0 e^{-\gamma d}}{1+re^{-2\gamma d}} + \frac{V_0 r e^{-\gamma d}}{1+re^{-2\gamma d}} = \frac{V_0 e^{-\gamma d}(1+r)}{1+re^{-2\gamma d}}$$

$$V_0 = V_c \frac{1+re^{-2\gamma d}}{e^{-\gamma d}(1+r)}$$

sostituiamo V_0 in V in modo da ottenere V in funzione di V_c

$$V = \frac{1}{\cancel{1+re^{-2\gamma d}}} \cdot V_c \cdot \frac{\cancel{1+re^{-2\gamma d}}}{(1+r)e^{-\gamma d}} e^{-\gamma x} + \frac{r e^{-\gamma d}}{\cancel{1+re^{-2\gamma d}}} \cdot V_c \cdot \frac{\cancel{1+re^{-2\gamma d}}}{(1+r)e^{-\gamma d}} e^{-\gamma(d-x)}$$

$$= V_c \left[\frac{e^{-\gamma x} + r e^{-\gamma d} e^{-\gamma(d-x)}}{(1+r)e^{-\gamma d}} \right] = V_c \left[\frac{e^{\gamma d} e^{-\gamma x} + r e^{-\gamma d} e^{\gamma x}}{(1+r)} \right] =$$

$$= V_c \frac{e^{\gamma(d-x)}}{1+r} + V_c \frac{r}{1+r} e^{-\gamma(d-x)}$$ definiamo $d-x = y$

$$= V_c \frac{e^{\gamma y}}{1+r} + V_c \frac{r}{1+r} e^{-\gamma y}$$. Poniamo $\gamma = \alpha + j\beta$

$$V = V_c \left[\frac{e^{\alpha y} e^{j\beta y}}{1+r} + \frac{r}{1+r} e^{-\alpha y} e^{-j\beta y} \right] = \frac{V_c}{1+r} \left[e^{\alpha y} \left(\cos(\beta y) + j \sin(\beta y) \right) + \right.$$

$$\left. + r e^{-\alpha y} \left(\cos(\beta y) - j \sin(\beta y) \right) \right] = \frac{V_c}{1+r} \left[\cos(\beta y) \underbrace{\left(e^{\alpha y} + r e^{-\alpha y} \right)}_{a} + \right.$$

$$\left. j \sin(\beta y) \underbrace{\left(e^{\alpha y} - r e^{-\alpha y} \right)}_{b} \right]$$

Pongo $\frac{da}{dy} = \alpha e^{\alpha y} - r\alpha e^{-\alpha y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha (e^{\alpha y} - r e^{-\alpha y}) = 0$

$$\alpha = 0 \qquad e^{\alpha y} - r e^{-\alpha y} = 0 \qquad e^{2\alpha y} = r$$

Da cui si ottiene che

$$V = V_c \frac{1}{1+r} \left[\cos(\beta y)(1+r) + j \sin(\beta y)(1-r) \right] = V_c \left[\cos(\beta y) + j \frac{1-r}{1+r} \sin(\beta y) \right]$$

Quanto vale $\frac{1-r}{1+r}$?

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1 - \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}}{1 + \frac{Z_c - Z_\infty}{Z_c + Z_\infty}} = \frac{2 Z_\infty}{2 Z_c} = \frac{Z_\infty}{Z_c}$$

Quindi

$$V = V_c \left[\cos(\beta y) + j \frac{Z_\infty}{Z_c} \sin(\beta y) \right] , \qquad I_c = \frac{V_c}{Z_c}$$

Nelle telecomunicazioni si cerca di avere sulla linea una tensione di tipo sinusoidale

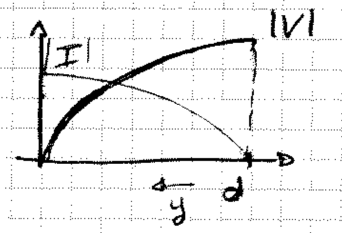
$$I = I_c \left[\cos(\beta y) + j \frac{Z_c}{Z_\infty} \sin(\beta y) \right] \qquad \frac{V_{Max}}{I_{Max}} = \frac{V_c \sqrt{1 + \frac{Z_\infty^2}{Z_c^2}}}{I_c \sqrt{1 + \left(\frac{Z_c}{Z_\infty}\right)^2}} = Z_\infty$$

Linee senza perdite a quarto d'onda

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d \quad , \quad d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \beta d = \frac{\pi}{2}$$

supponiamo che Z_c possa essere:
- ∞ vuoto
- 0 corto circuito
- $\frac{1}{j\omega C}$ carico capacitivo

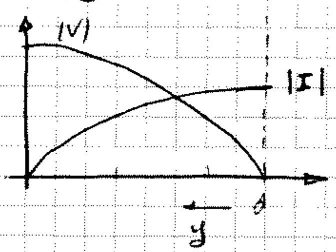
Se $Z_c = \infty$ allora V sarà puramente sinusoidale



V dipende solo $\cos(\beta y)$

I dipende da $\sin(\beta y)$

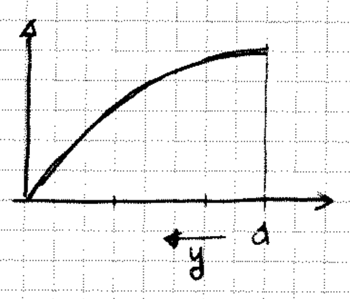
Se $Z_c = 0$



V dipende da $\sin(\beta y)$ mentre I dipende da $\cos(\beta y)$

Se $Z_c = \frac{1}{j\omega C}$

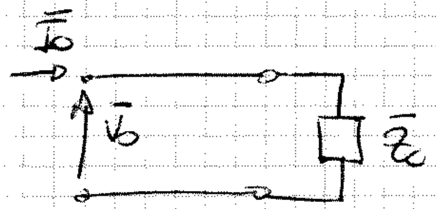
$$V = V_c \left[\cos \beta y + j \frac{Z_{\infty}}{\frac{1}{j\omega C}} \sin \beta y\right] = V_c\left[\cos\beta y - \omega C \sin \beta y\right]$$



$$I = V_c \left[j\omega C \cos(\beta y) - \frac{j}{Z_{\infty}} \sin(\beta y)\right]$$

$$= j V_c \left(\omega C \cos(\beta y) - \frac{\sin(\beta y)}{Z_{\infty}}\right)$$

IMPEDENZA di INGRESSO LINEA



$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{V}_0}{\bar{I}_0} = Z_{\infty} \frac{Z_c \cosh(\bar{\gamma} d) + Z_{\infty} \sinh(\bar{\gamma} d)}{Z_{\infty} \cosh(\bar{\gamma} d) + Z_c \sinh(\bar{\gamma} d)}$$

Se la linea è senza perdite

$$\bar{z} = r + j\omega l \simeq j\omega l$$
$$\bar{y} = g + j\omega c \simeq j\omega c$$

$$\gamma^2 = -\omega^2 lc \qquad \gamma = j\omega\sqrt{lc} = j\beta$$

$$Z_{\infty} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

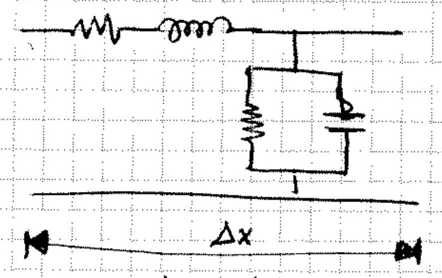
$$Z_0 = Z_{\infty} \frac{Z_c + Z_{\infty} \frac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{\cosh(\bar{\gamma} d)}}{Z_{\infty} + Z_c \frac{\sinh(\bar{\gamma} d)}{\cosh(\bar{\gamma} d)}} = Z_{\infty} \frac{Z_c + Z_{\infty} \operatorname{tgh}(\bar{\gamma} d)}{Z_{\infty} + Z_c \tanh(\bar{\gamma} d)}$$

Se $\bar{\gamma} = j\beta$ e $Z_{\infty} = \sqrt{\frac{l}{c}}$ allora

$$\tanh(\bar{\gamma} d) = \tanh(j\beta d) = j \tan(\beta d) \quad \text{quindi}$$

$$Z_0 = Z_{\infty} \frac{Z_c + j Z_{\infty} \tan(\beta d)}{Z_{\infty} + j Z_c \tan(\beta d)}$$

Scomponiamo la linea in N parti infinitesime di lunghezza Δx



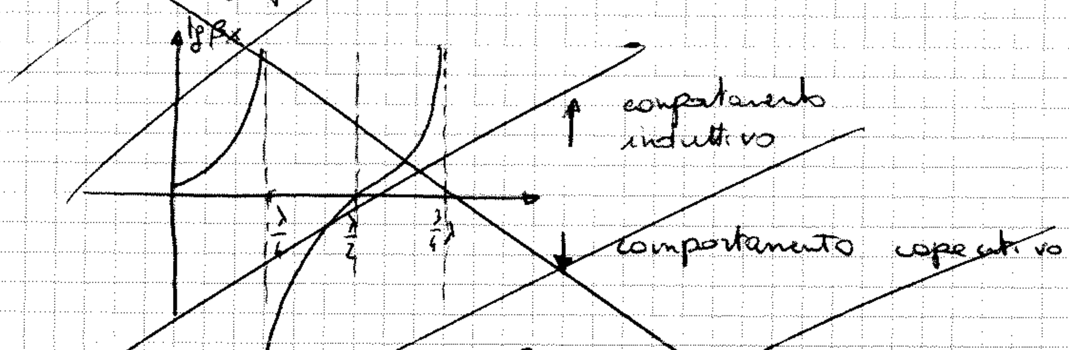
$$\frac{d}{N} = \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si è interessati in $Z_C \to \infty$, $Z_C \to 0$ se linea è lunga $\frac{\lambda}{4}$

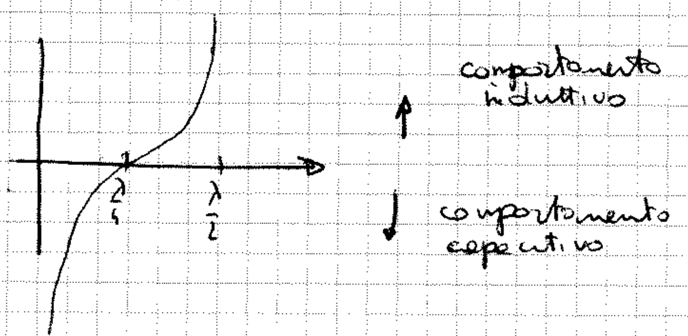
linea a vuoto

$$Z_0 = j Z_{\infty} \cdot tg(\beta d)$$



Se $d = \frac{\lambda}{4}$ $\quad \beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\quad tg^{-1}(\frac{\pi}{2}$

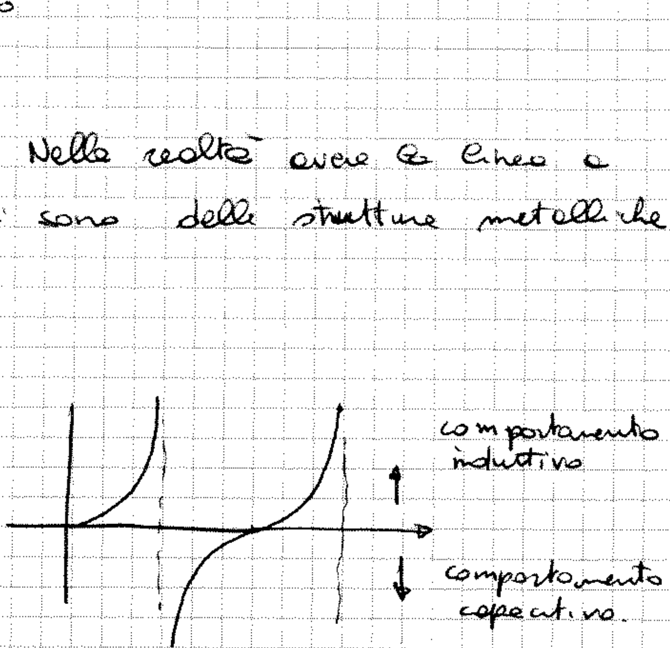
$$Z_0 = \frac{Z_{\infty}}{j\tan(\beta d)} = -j Z_{\infty} \cot\!an(\beta d)$$



Uso la linea per creare il carico. Nella realtà avere la linea a vuoto non è facile perché ci sono delle strutture metalliche nei dintorni.

linea in corto circuito

$$Z_0 = j Z_{\infty}\, tg(\beta d)$$



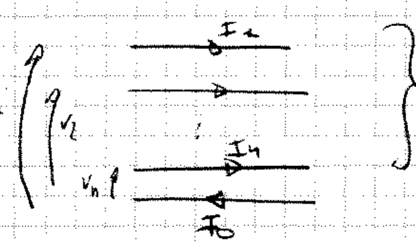
$d = \frac{\lambda}{4}$ $\quad \beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$Z_0 = Z_{\infty} \frac{Z_c + j Z_{\infty} \, tg(\beta d)}{Z_{\infty} + j Z_c \, tg(\beta d)} \quad tg(\beta d) \text{ diverge}$$

$$\bar{Z}_0 = \frac{Z_{\infty}^2}{Z_c}$$ la linea trasforma l'impedenza di carico: infatti viene vista all'inizio della linea come il suo inverso.

__Linee multifilari__

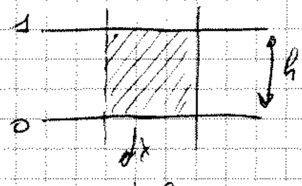
Cerchiamo di scomporle in sistemi più semplici



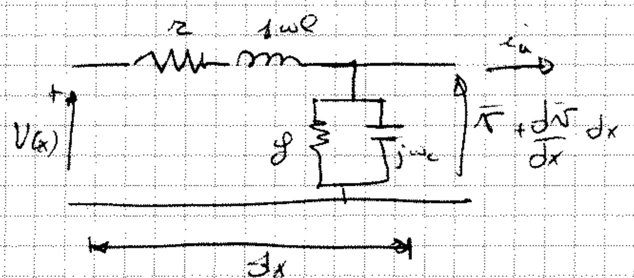
Abbiamo 1 conduttore di riferimento rispetto al quale riferiamo i potenziali.

$I_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

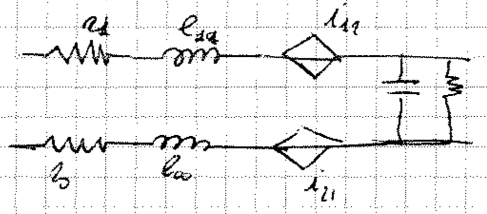
Possiamo immaginare la linea come un condensatore



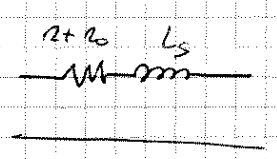
o vederla come una linea



$i = I + \frac{dI}{dx} \cdot dx$



$\Rightarrow$



$L_s = 2(L_{11} - L_{12})$ è induttanza di servizio

Inoltre tutti i conduttori hanno della capacità tra loro.

Equazioni della linea a parametri distribuiti

$$\begin{bmatrix} -\frac{dV_1}{dx} \\ \vdots \\ -\frac{dV_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + j\omega l_{10} & \cdots \\ \vdots & \bar{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(x) \\ \vdots \\ I_n(x) \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{d\bar{I}}{dx} = \bar{Y}\bar{V}$$

$\bar{Z}$ è una matrice con coefficienti complessi

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{d\bar V}{dx}\right] = [\bar Z]\,[\bar I] \\[2ex] -\left[\dfrac{d\bar I}{dx}\right] = [\bar Y]\,[\bar V] \end{cases}$$

$$+\frac{d^2V}{dx^2} = +\underbrace{[\bar Z][\bar Y]}_{[\bar P]}[\bar V]$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \underbrace{[\bar Y][\bar Z]}_{[\bar P^T]}[\bar I]$$

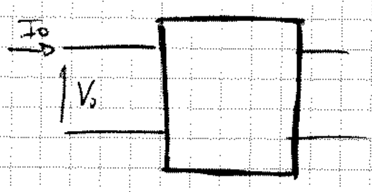
$[\bar P]$ matrice di propagazione

Nelle linee bifilari

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} = \underbrace{zy}_{\gamma^2}\,V \\[2ex] \dfrac{d^2 I}{dx^2} = \gamma^2 I \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} V &= P\cosh(\gamma x) + Q\sinh(\gamma x) \\ I &= -\frac{1}{Z_\infty}\left[Q\cosh(\gamma x) + P\sinh(\gamma x)\right] \end{aligned}$$

in $x=0$ $\quad V=V_0$ $\qquad$ in $x=d$ $\quad \dfrac{V(d)}{I(d)} = Z_\infty$

in $x=0$ $\quad V_0 = P$



$$I_0 = -\frac{1}{Z_\infty}\,Q$$

$$V = V_0\,\mathrm{ch}(\gamma x) - Z_\infty I_0 \sinh(\gamma x)$$

$$I = I_0\cosh(\gamma x) - \frac{V_0}{Z_\infty}\sinh(\gamma x)$$

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\gamma x) & -Z_\infty \sinh(\gamma x) \\ -\frac{1}{Z_\infty}\sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \bar\gamma = \sqrt{\bar z \bar y}, \quad Z_\infty = \sqrt{\frac{\bar z}{\bar y}}$$

$$[V] = [M][V^\circ]$$

$$[I] = [N][I^\circ]$$

facciamo queste trasformazioni

N e M non singolari

V° e I° sono modali

$$-\left[\frac{dV}{dx}\right] = [\bar Z][I]$$

$$-\left[\frac{d}{dx}(M V^\circ)\right] = [\bar Z][N\ I^\circ] \qquad -\left[\frac{dN I^\circ}{dx}\right] = [Y][M V^\circ]$$

$$-\left[\frac{dV^\circ}{dx}\right] = [M^{-1}][\bar Z][N][I^\circ] \qquad -\left[\frac{dI^\circ}{dx}\right] = [N^{-1}][Y][M][V^\circ]$$

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right] = [M^{-1}][Z][N]\left[\frac{dI^\circ}{dx}\right] \Rightarrow \left[\frac{d^2V}{dx^2}\right] = [M^{-1}][Z][N][N^{-1}][Y][M][V^\circ]$$

$$\left[\frac{d^2V^\circ}{dx^2}\right] = \underbrace{[M][Z\,Y][M^{-1}]}_{P^\circ}\,\underbrace{\left[\cancel{\frac{dI^\circ}{dx}}\right]}_{V^\circ}$$

Noi vogliamo che $[M][ZY][M^{-1}]$ sia una matrice diagonale (cioè scompongo gli $n+1$ conduttori ~~linee~~ in n linee bifilari)

Per quanto riguarda le correnti:

$$\left[\frac{d^2I^\circ}{dx^2}\right] = [N^{-1}][Y]\underbrace{[M][M^{-1}]}_{[I_d]}[Z][N][I^\circ]$$

$$\left[\frac{d^2I^\circ}{dx^2}\right] = \underbrace{[N^{-1}][Y\,Z][N]}_{[P^\circ]^T}[I^\circ]$$

Se P° è diagonale $[P^\circ]^T = [P^\circ]$

$$[V] = [M][\cosh \gamma x][M^{-1}][V^\circ] - [M][\sinh \gamma x][Z_\infty^\circ][N^{-1}][I^\circ]$$

$$[I] = -[N][\sinh \gamma x][Y_\infty][M^{-1}][V^\circ] - [N][\cosh \gamma x][N^{-1}][I^\circ]$$

verificare

$$[Z_\infty^\circ] = [M][\gamma_0^2][M^{-1}]\,Z$$