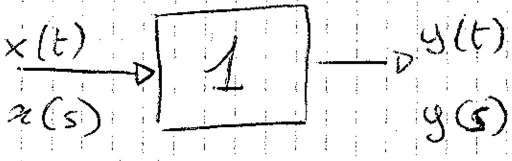
Azionamento = motore + convertitore + controllo.

Elementi di azionamenti è un corso di controlli automatici applicato agli azionamenti elettrici.

Programma:
- note di controlli automatici
- modello motore DC
- anelli di corrente e velocità
- problematiche meccaniche degli azionamenti
- problematiche termiche degli azionamenti

Note di controlli automatici

azionamento ideale

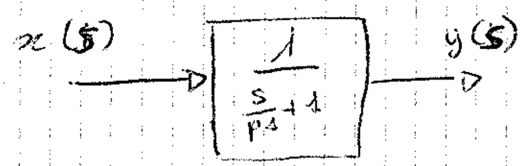


il sistema ideale deve avere una funzione di trasf. uguale a 1. In questo caso l'~~con~~ esecuzione è la copia del ~~comando~~ comando.

Problema: tutti i sistemi reali sono ben diversi da quelli ideali. In realtà la f.d.t presenta poli e zeri.

Analizziamo il seguente sistema: la f.d.t ha polo in $-p_1$

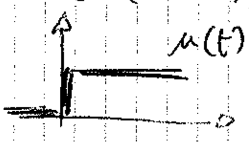
$$f.d.t = \frac{1}{\frac{s}{p_1}+1}$$



tutte le volte che studiamo un sistema lo studiamo con un ingresso standard:
- gradino
- funzione sinusoidale

Il gradino $u(t)$ lo studiamo perchè in un convertitore permette di testarlo in due condizioni tra loro complementari:

$\mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s}$

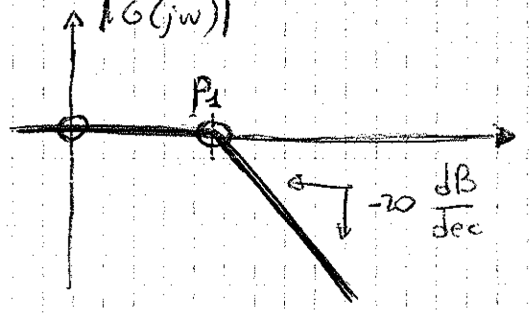


- come si comporta quando gli applico

un ingresso velocemente
- vedo come si comporta dopo che gli do in comando una grandezza costante.

Utilizziamo la funzione sinusoidale perché qualunque funzione periodica è uguale ad una somma di funzioni sinusoidali.

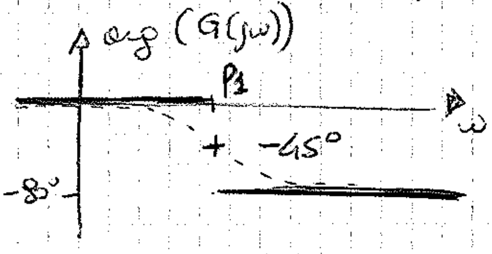
Come si studia il comportamento di un sistema ad ingresso sinusoidale si studia con i diagrammi di Bode.



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\cdot\log_{10}|G(j\omega)|$$

A noi interessano i punti cerchiati e le pendenze del diagr. di Bode

Ricordiamo che la differenza max tra diagramma asintotico e diagr. reale si ha nel polo ed è di $\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ dB



Se l'ingresso è una sinusoide con $\omega << p_1$ la sinusoide in uscita al sistema è una sinusoide che ha rapporto ingresso-uscita di 0 dB e differenza di fase nulla. (In questo caso il sistema si comporta come sistema ideale).
Se invece $\omega >> p_1$ la sinusoide in uscita ha modulo minore dell'ingresso ~~e~~ ed è ~~modulo~~ in ritardo di 90°.
Questo sistema è capace di seguire fedelmente ingressi con pulsazione minore di p_1. In particolare questo sistema ha banda passante p_1.
La banda passante è il valore della pulsazione per cui l'uscita ha ampiezza pari a -3dB rispetto all'ampiezza ~~uscita~~ per segnale ~~costante~~ con pari uscita e pulsazione tendente a 0.

Studiamo questo sistema: $\frac{K}{\frac{s}{p_1}+1}$

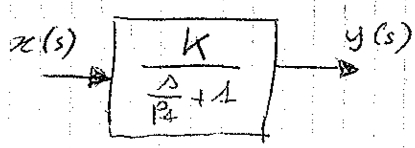
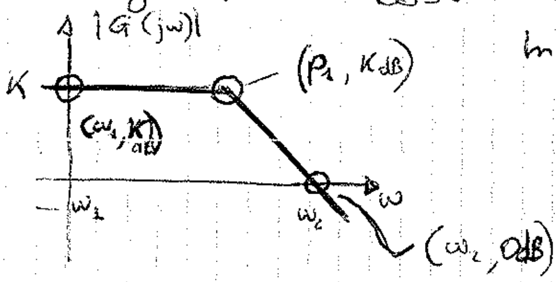


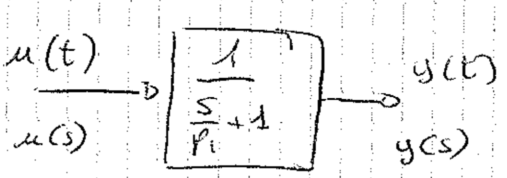
Diagramma di Bode



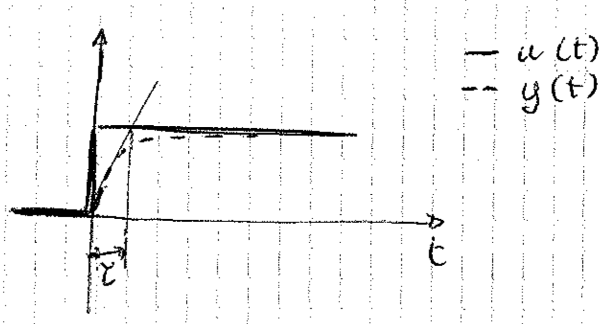
In questo caso ci interessano i punti cerchiati.
Se in ingresso ho una sinusoide con $\omega < p_1$ l'uscita ha ampiezza K-volte l'ingresso.
Anche per questo sistema la banda passante è p_1.

Possiamo dire che la banda passante è uguale alla capacità del sistema di seguire segnali d'ingresso rapidamente variabili nel tempo; è sempre una cifra di merito di un sistema.

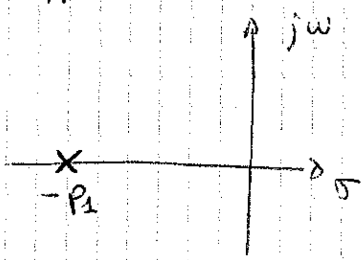
Considerazioni sul sistema: $\frac{1}{\frac{s}{p_1}+1}$



Se $u(s) = \frac{1}{s}$ allora
$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{1}{p_1}$



Rappresentiamo anche il sistema così:



Esempio della macchina: input = gradino di velocità $100 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{m}{s} = 100 \frac{Km}{h}$
l'auto risponde con un sistema che ha cost. di tempo $\tau = 5s$

tempo impiegato per percorrere:
a) 100 000 m = 100 Km
b) 1000 m = 1 Km

$v = 100 \cdot \frac{1000}{3600}\left(1-e^{-\frac{t}{5}}\right)\frac{m}{s}$

$\cancel{y(t) = \frac{100}{3{,}6}\left(t-\tau\left(1-e^{-\frac{t}{5}}\right)\right) \; t - e}$ $\qquad y(t) = \frac{100}{3{,}6}\left(t - \tau\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\right)\right)$

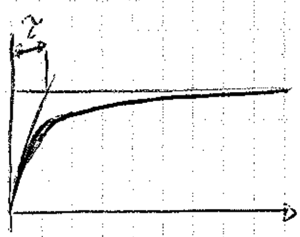
a) $t = \cancel{100000}$ 3605 (s) $\qquad$ 100 Km = 100'000 m

b) $t = 41$ s $\qquad$ 1 Km = 1000 m

Nel caso a posso trascurare il fatto che il sistema sia del 1° ordine, nel caso b non posso (perché commetto un errore più grande).

La differenza tra sist. ideale e sist. del 1° ordine: il sistema reale ha un polo (auto in $-\frac{1}{5}$). Se approx sistema reale ad uno ideale significa trascurare poli e zeri. Per sapere se questo si può fare bisogna confrontare la dinamica poli/zeri del sist. con la dinamica del fenomeno studiato, cioè dobbiamo confrontare le costanti di tempo dei poli/zeri del sistema con il tempo per cui il sistema viene studiato.

Nel caso dell'auto: $\tau \simeq 5s$. Se il percorso è di 100 Km per farlo impiego circa 3600 s. Confronto 5 con 3600 e 5 è ragionevole trascurarlo.



Se $t > 5\tau$ la differenza tra sistema del 1° ordine e sist. ideale è inferiore all'1%

3600 s è molto maggiore 5 volte τ. Va bene il risultato approx.

Se il percorso è ~~un~~ 1 Km il risultato approx mi dice 36 s $\quad (36/5 = 7{,}2)$ In questo caso è meglio non trascurare il polo.

E' possibile ~~~~ stimare l'errore che si commette trascurando poli e zeri prima di effettuare i calcoli.

La banda passante del sistema automobile ($\tau = 5s$).

$$B_p = \frac{1}{\tau} = 0{,}2 \frac{rad}{s} = \frac{0{,}2}{2\pi} Hz = 0{,}032\ Hz$$

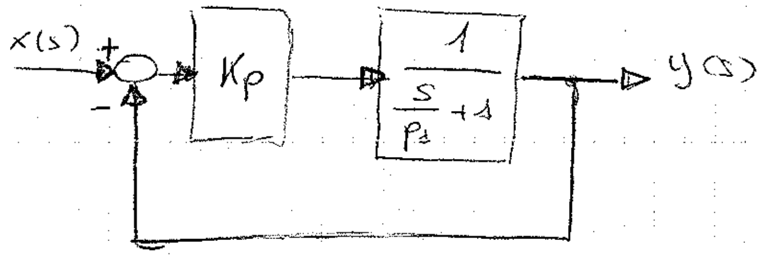
$\boxed{\text{N.B. l'inverso di una costante di tempo è sempre in } \frac{rad}{s}}$

Se si ha vibrazione a $f \simeq 2Hz \Rightarrow \omega \simeq 12$ rad/s Per capire se mi devo preoccupare confronto 0,2 con 12. $12/0,2) = 60$ (3)

Se l'ingresso ha una pulsazione $10 \cdot B_p$ allora l'uscita sarà $\simeq \frac{1}{10}$ ampiezza dell'ingresso.

In questo caso posso anche evitare di preoccuparmi.

Se cambio l'auto che è più spuntosa allora facciamo una retroazione.



Definiamo 2 funzioni: - funzione trasf. anello aperto $G(s) = \frac{K_p}{\frac{s}{p_1}+1}$

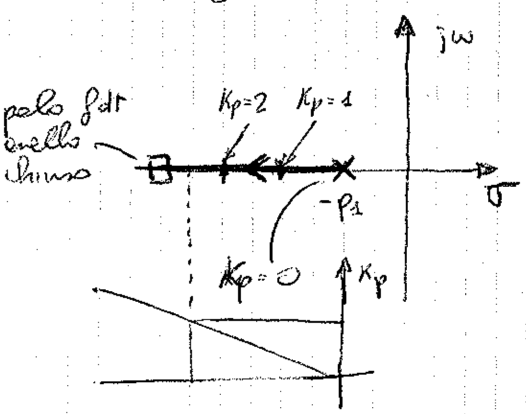
- funzione trasf. ad anello chiuso $G_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$

$$= \frac{\frac{K_p}{\frac{s}{p_1}+1}}{1+\frac{K_p}{\frac{s}{p_1}+1}} = G_c(s)$$

$$G_c = \frac{K_p}{\frac{s}{p_1}+1+K_p} = \frac{K_p \cdot p_1}{s + p_1(K_p + 1)}$$

La funzione $G_c(s)$ ha polo in $-p_1(1+K_p)$

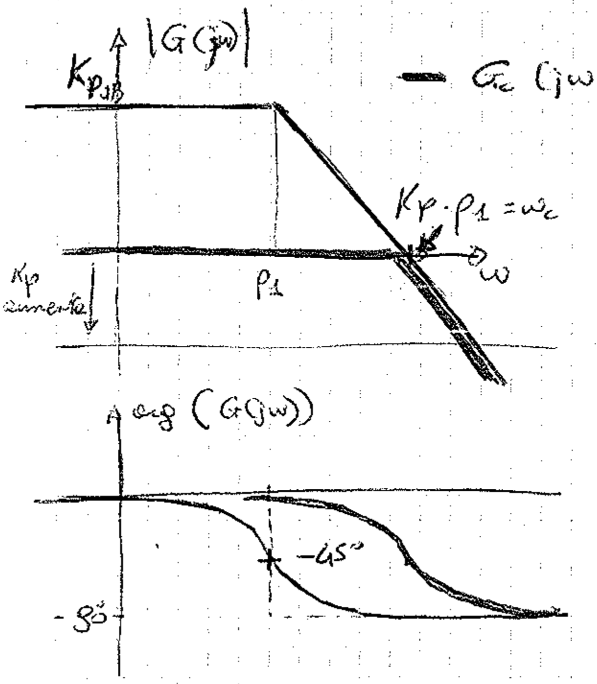
<u>Luogo delle radici</u>: luogo geometrico su piano complesso in cui si trovano i poli della funzione di trasf. anello chiuso al variare del guadagno K_p



Il luogo delle radici è comodo ci permette di discutere la stabilità al variare di K_p. All'aumentare di K_p il sistema si avvicina al comport. ideale oppure si allontana?

In questo caso più K_p aumenta più si avvicina al sistema ideale.

Come possiamo ricavare il diagr. Bode della f.d.t anello chiuso partendo da quello della fdt anello aperto?

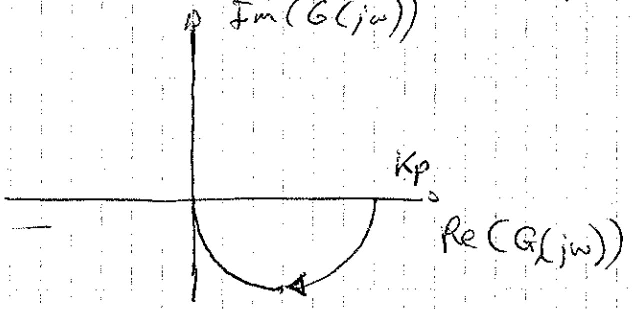


Se aumento Kp allora sposto l'asse delle ω verso il basso.
Per quanto riguarda ~~l'argomento~~ Kp per noi sarà sempre ≥ 0

Se $K_p \gg 1$ sono in grado di tracciare il modulo della fdt ad anello chiuso

La banda passante esatta è $(K_p+1)p_1$. Dal diagramma approx è $K_p p_1$ (ma $K_p \gg 1$ quindi sbaglio poco). L'argomento della fdt anello chiuso è l'arg. di quella ad anello aperto, ma traslato.

Tracciamo il diagramma di Nyquiest della $G(j\omega)$



Poichè il diagr. di Bode e di Nyquiest contengono le stesse informaz. si possono ottenere dati sulla stab. o meno del sistema direttamente dal diag. di Bode.

Sistemi del 2° ordine

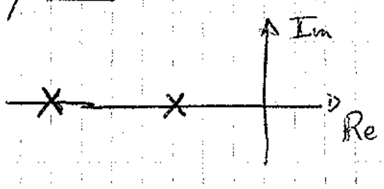
$$G(s) = \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{p_1}+1\right)\left(\frac{s}{p_2}+1\right)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 = p_1 p_2$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_0 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Se $\zeta > 1$ 2 poli reali e distinti
Se $\zeta < 1$ 2 poli complessi coniugati.

Se $\zeta > 1$ p_1, p_2 sono reali e distinti.



Esempio numerico: $p_1 = -5$, $p_2 = -50$

$$G(s) = \frac{250}{(s+5)(s+50)}$$

Risposta al gradino

$$\frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow F(s)$$

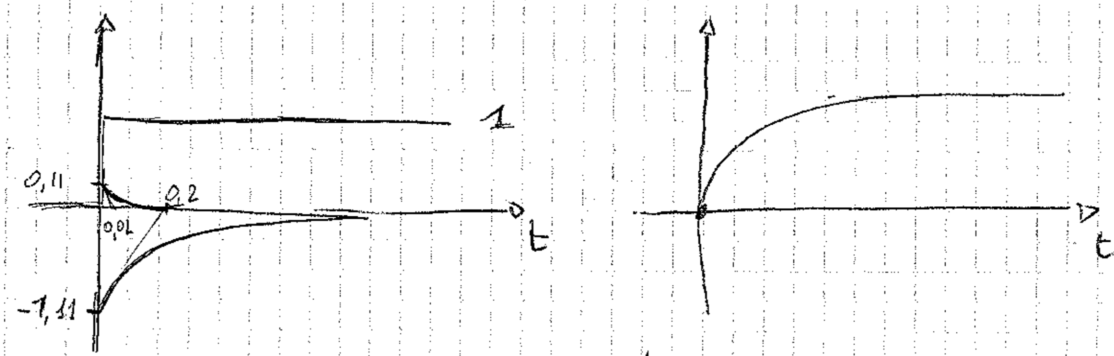
$$F(s) = \frac{1}{s}\,\frac{250}{(s+5)(s+50)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+50}$$

A, B, C sono i residui

$$A = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot \frac{1}{s}\,\frac{250}{(s+5)(s+50)}\right) = 1$$

$$B = \lim_{s \to -5} \frac{250}{s(s+50)} = -1{,}11 \qquad C = 0{,}11$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = 1 - 1{,}11\, e^{-\frac{t}{0{,}2}} + 0{,}11\, e^{-\frac{t}{0{,}02}}$$



$$f(t) \simeq 1 - 1{,}11\, e^{-\frac{t}{0{,}2}}$$

In questo caso trascuro il pezzo del residuo C (polo in 50 cioè il più lontano dall'origine).

In questo esempio abbiamo due poli reali distinti. Il polo più vicino all'origine ha maggiore influenza sull'uscita.
Il polo più vicino all'origine è il polo dominante del sistema

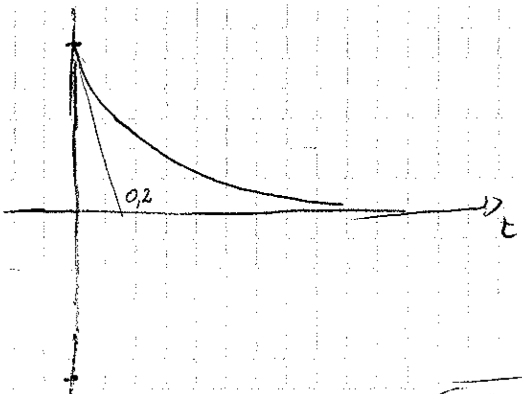
Indichiamo l'indice di dominanza di un polo come il valore assoluto dell'area sottesa dalla risposta all'impulso.

$$F(s) = \frac{250}{(s+5)(s+50)} = \frac{B}{s+5} + \frac{C}{s+50}$$

$$\underset{1}{\delta(t)} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \underset{F(s)}{f(t)}$$

$B = 5{,}55$

$C = -5{,}55$



$$f(t) = 5{,}55\, e^{-\frac{t}{0{,}2}} - 5{,}55\, e^{-\frac{t}{0{,}02}}$$

Devo calcolare gli integrali per ricavare l'indice di dominanza

$$5{,}55 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{0{,}2}} \dots - 5{,}55 \cdot \left[0{,}2\, e^{-\frac{t}{0{,}2}} \right]_0^\infty =$$

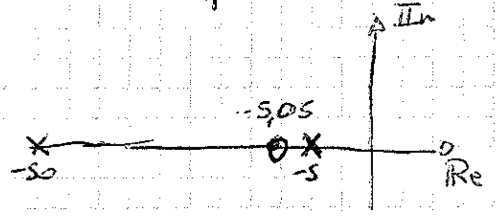
~~dall'impulso~~ $= 5{,}55 \cdot 0{,}2 = 1{,}11$

$$D_i = \left| \frac{\text{Residuo}}{\text{Re}(p_{olo})} \right| = \left| \frac{\lim_{s \to p} F(s)}{p} \right|$$

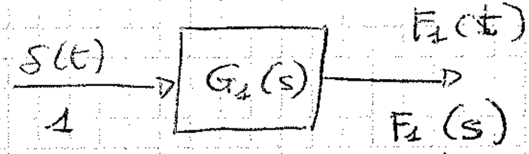
Residuo della funzione **F(s)** quando l'ingresso è l'impulso.

Quasi sempre il polo dominante è quello vicino all'origine. Si possono avere problemi se il polo ha vicino uno zero.

Esempio:



$$G_1(s) = \frac{250 \left(\frac{s}{5{,}05} + 1 \right)}{(s+5)(s+50)}$$



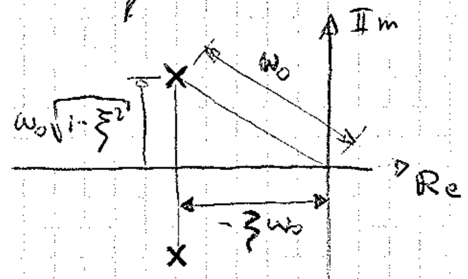
$$F_1(s) = \frac{B_1}{s+5} + \frac{C_1}{s+50}$$

$$B_1 = \lim_{s \to -5} \left[\frac{\left(\frac{-5}{5{,}05} + 1 \right) \cdot 250}{-5+50} \right] = 0{,}055$$

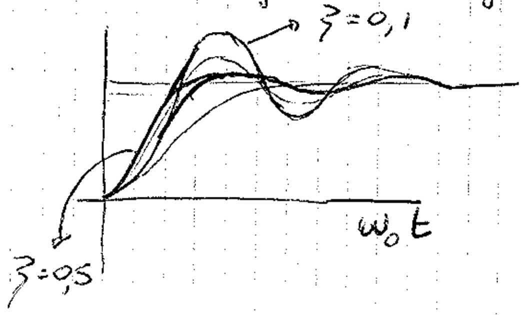
$$C_1 = \lim_{s \to -50} \left[\frac{\left(\frac{-50}{5{,}05} + 1 \right) \cdot 250}{5-50} \right] = 49{,}45$$

$$D_{i_{-5}} = \frac{0{,}055}{5} = 0{,}011 \qquad D_{i_{50}} = \frac{49{,}45}{50} = 0{,}988$$

Se $\xi < 1$ ho 2 poli complessi coniugati



La risposta al gradino è fatta così:

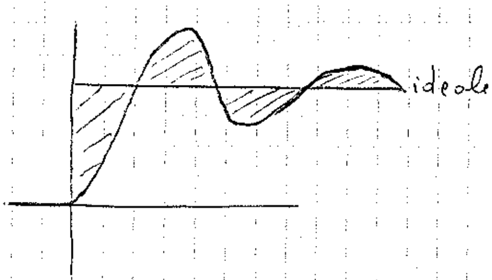


Se $\zeta < 1$

Differenze delle curve se $\zeta = 0,5$ e $\zeta = 0,1$:

- 0,5 sale più lentamente, ma una volta raggiunto 1 ha una piccola sovraelongazione e poi dopo sta sempre vicino all'uno.
- 0,1 sale velocemente, ma dopo oscilla tanto.

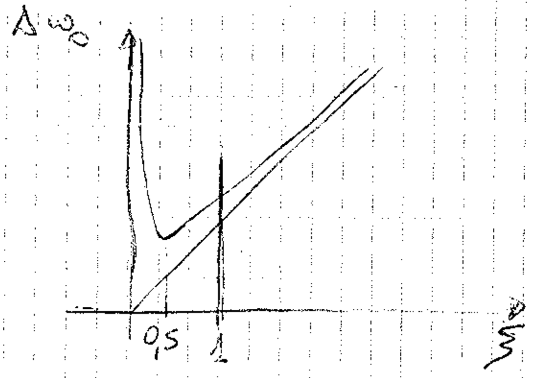
Si stabilisce un **indice di merito**: è l'area di differenza tra uscita ideale ~~ed id~~ e reale.



$$\Delta = \int_0^\infty \left(u(t) - c(t)\right)^2 dt$$, dove

$c(t)$ è l'uscita del sistema del 2° ordine

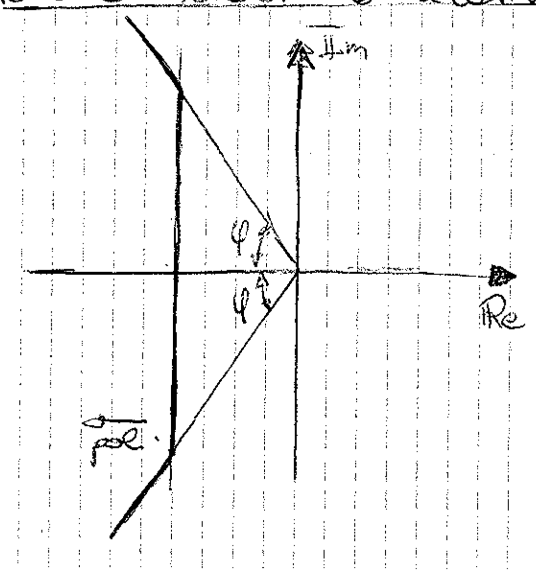
$$\Delta = \frac{1+4\zeta^2}{4\zeta\omega_0}$$



A noi interessa il grafico per $0 \leq \zeta \leq 1$

Se non riesco ad ottenere 0,5 mi conviene avere uno smorzamento maggiore o minore di 0,5 a parità di area? Di solito conviene uno smorzamento maggiore di 0,5. Quindi di solito è desiderato $0,5 \leq \zeta \leq 1$

<u>Buona stabilità relativa</u>

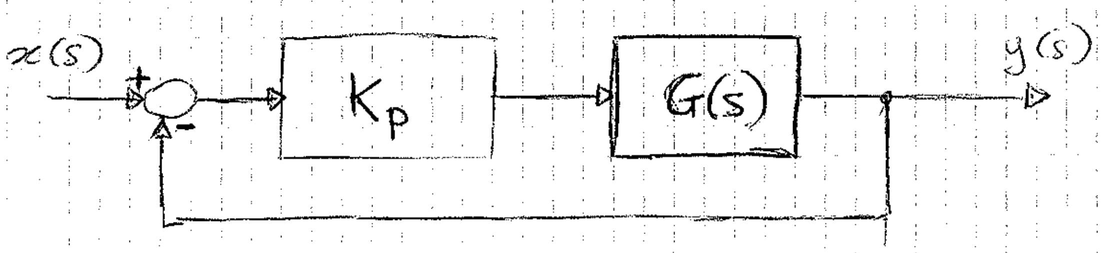


Ricordiamo che il sistema è stabile se i poli si trovano nel 2° e 3° quadrante.

Tipicamente vogliamo che i poli siano abbastanza lontani dall'origine.

Una seconda esigenza è che la risposta sia ben smorzata ($0,5 \leq \zeta \leq 1$) cioè l'angolo $\varphi \leq 60°$

Esempio: $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$

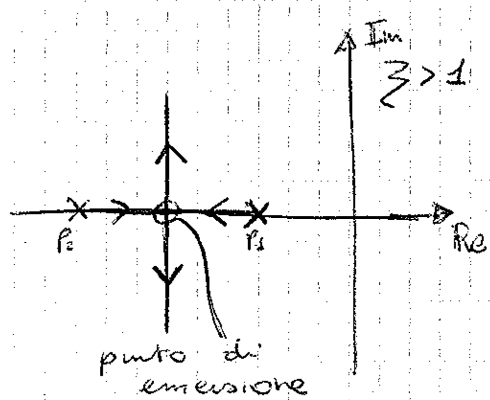


$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{K_p\,\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 + K_p\,\omega_0^2} = \frac{K_p\,\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2(1+K_p)}$$

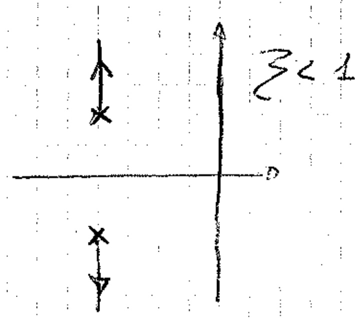
I poli sono caratterizzati da:
- $\omega_0' = \omega_0\sqrt{1+K_p}$
- $\zeta'\omega_0' = \zeta\omega_0 \Rightarrow \zeta' = \zeta\frac{\omega_0}{\omega_0'} = \frac{\zeta}{\sqrt{1+K_p}}$

Quindi $p'_{1,2} = -\zeta'\omega_0' \pm \omega_0'\sqrt{\zeta'^2-1} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1+K_p}\sqrt{\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+K_p}}\right)^2 - 1} =$

$= -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1 - K_p}$



Supponiamo che il sistema di partenza abbia $\zeta > 1$. I poli del sistema retroazionato si comporteranno come in figura all'aumentare di Kp.



Se $\zeta < 1$ si ha il seguente comportamento all'aumentare di Kp: rimangono complessi coniugati e si allontanano.

Se il Kp aumenta troppo il sistema diventa ~~[illegible]~~ sottosmorzato

Dal punto di vista della stabilità matematica all'aumentare di Kp il sistema è sempre stabile, ma da un punto di vista di stabilità relativa si posso avere problemi se Kp è troppo alto.

Criterio di stabilità secondo Bode

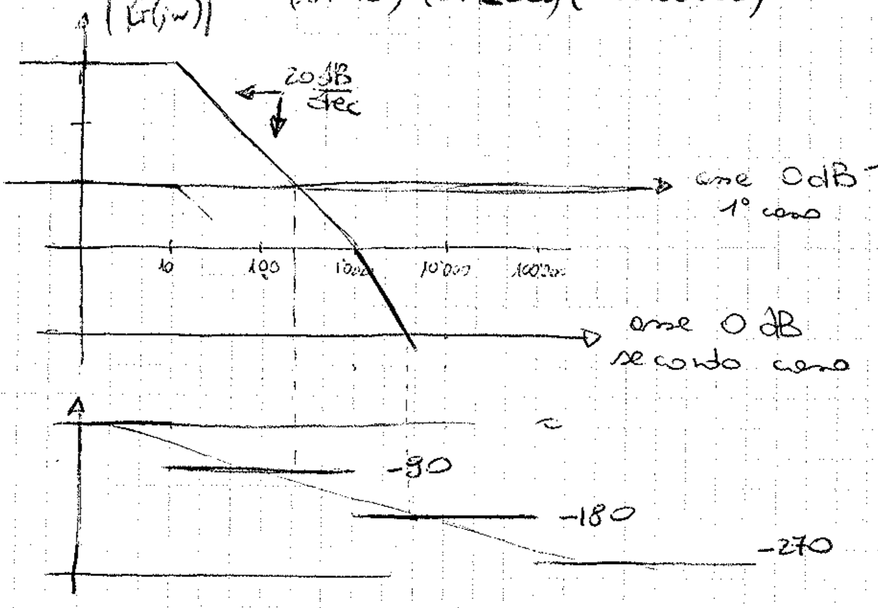
In questo caso con stabilità indichiamo la buona stabilità relativa.

Ipotesi: $G(s)$ funzione di trasf. anello aperto deve essere con modulo non crescente

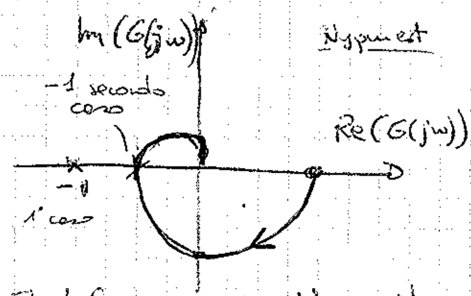
Allora se il modulo di $G(j\omega)$ attraversa l'asse 0 dB con pendenza $-20 \frac{dB}{dec}$ il sistema ha buona stabilità relativa accettabile. Ovvero non esistono problemi di stabilità. Invece se il modulo $G(j\omega)$ attraversa l'asse 0dB con pendenza $-40, -60, -80 \ldots$ dB/dec il sistema ha problemi di stabilità e deve essere studiato meglio

punto di Nyquist: -1 (modulo 1 (0 dB) e fase 180°).
~~Perché~~ Il diagramma di Bode e di Nyquist contengono ~~...~~ le stesse informazioni.

$$G(s) = \frac{K}{(s+10)(s+1000)(s+100'000)}$$



→ In questo caso il modulo è decrescente. Pendenza $-20 \frac{dB}{dec}$. Quindi la fase di $G(j\omega)$ è circa $-90°$



Stabile secondo Nyquist e secondo Bode.

Faccio aumentare K (sposto l'asse verso il basso) e analizzo il 2° caso. Ora la pendenza è $-40 \frac{dB}{dec}$. In questo caso il criterio di Bode dice che bisogna fare calcoli più approfonditi e Nyquist è al limite della stabilità.
Se aumento ancora K e vado a pendenza -60dB Nyquist mi dice che è instabile, mentre Bode è da un po' che dice che ci sono problemi.

La fdt ad anello chiuso con **poli** lontano dall'origine è uguale ad un sistema che risponde veloce cioè ha una alta banda passante. La presenza di poli nell'origine della fdt anello aperto è un indice di merito del sistema.

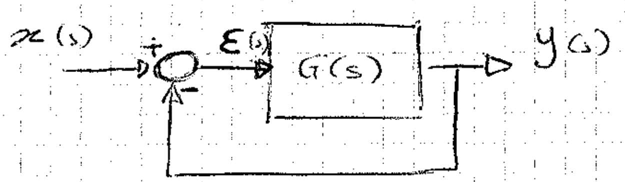
Immaginiamo di avere delle funzioni di ingresso:

- $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$
- $u(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$
- $t \longrightarrow \frac{1}{s^2}$ rampa
- $\frac{1}{2}t^2 \longrightarrow \frac{1}{s^3}$ parabola
- $\frac{1}{6}t^3 \longrightarrow \frac{1}{s^4}$ cubica

Consideriamo un input generico $\frac{1}{s^i}$, $i \in \mathbb{N}$.
Se ho una f.d.t. anello aperto fatta così: $G = K\,\frac{s^z(s+z_1)(s+z_2)\dots}{s^p(s+p_1)(s+p_2)\dots}$

dove z: numero di zeri in origine
p: numero di poli in origine
$z_1, z_2, \dots$ sono gli zeri di $G(s)$ non nell'origine
$p_1, p_2, \dots$ sono i poli di $G(s)$ non nell'origine.

Consideriamo l'anello chiuso:



$$\frac{\mathcal{E}(s)}{x(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s^p(s+p_1)(s+p_2)\dots}{s^p(s+p_1)(s+p_2)\dots + K s^z (s+z_1)(s+z_2)\dots}$$

Ricordiamo che
- $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$
- $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$

con $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$

$$\mathcal{E}(s) = \frac{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots}{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots + K(s+z_1)\dots}\cdot\frac{1}{s^i}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = \lim_{s\to 0} s\,\mathcal{E}(s) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots}{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots + K(s+z_1)\dots}\,\frac{1}{s^i}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{s^{(p-z+1-i)}(s+p_1)\dots}{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots + K(s+z_1)\dots} = \lim_{s\to 0} s^{p-z+1-i}\underbrace{\frac{(s+p_1)\dots}{s^{(p-z)}(s+p_1)\dots + K(s+z_1)\dots}}_{\text{ha sempre un valore finito}}$$

$p-z+1-i > 0 \Rightarrow i < p-z+1$ allora $\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = 0$

$p-z+1-i = 0 \Rightarrow i = p-z+1$ allora $\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t)$ valore finito

$p-z+1-i < 0 \Rightarrow i > p-z+1$ allora $\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = \infty$

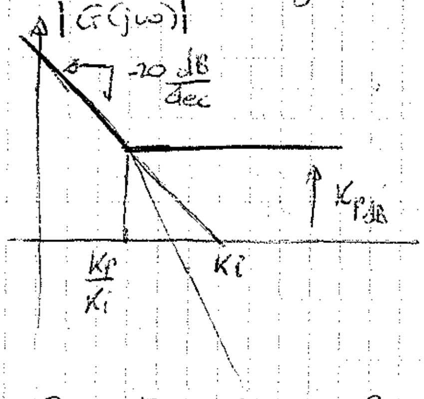
Per avere $\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}(t) = 0$ devo mettere tanti più poli nell'origine quanto è più alto il valore dell'esponente i.
I poli nell'origine hanno una funzione ~~pb~~ positiva. Tuttavia

vogliamo che i poli della funzione ad anello chiuso siano lontani dall'origine.

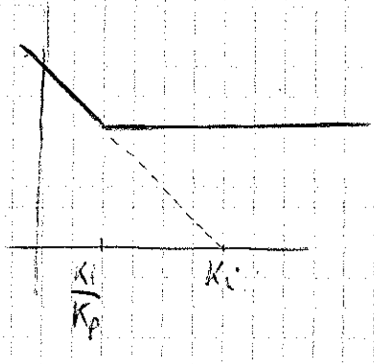
Reti di regolazione di tipo proporzionale integrale (PI)

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{s K_p + K_i}{s}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega K_p + K_i}{j\omega}$$



Se K_p aumenta:

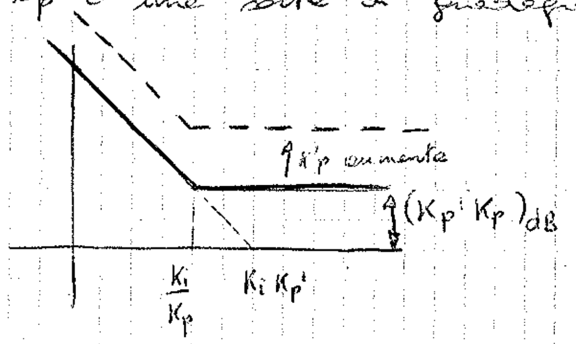


aumentare K_p implica: - aumento del modulo di $G(j\omega)$
- spostamento dello zero.

Nel linguaggio comune aumentare il K_p ha un significato diverso

$$G(s) = K'_p \, \frac{s K_p + K_i}{s} \quad , \quad K'_p \geq 0$$

In questa funzione K_i, K_p definiscono la posizione dello zero.
K'_p è una sorta di guadagno proporzionale addizionale.

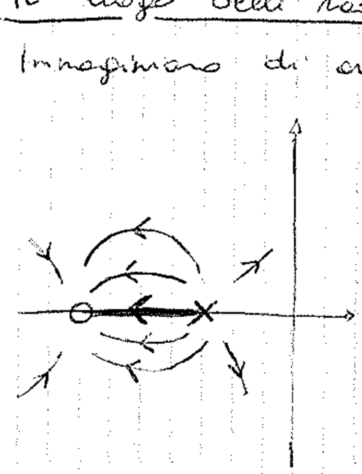


Quando si dice di variare il guadagno proporzionale della rete PI si varia K'_p.

Il guadagno proporzionale (oppure integrale) equivalente è $K_p \cdot K'_p$ (o $K'_p K_i$)

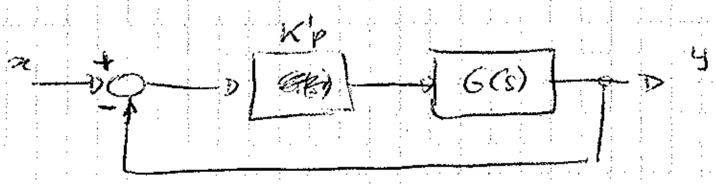
Il luogo delle radici per un sistema qualsiasi.

Immaginiamo di avere un piano.



Prendo i poli/zeri della fdt anello aperto e metto e disegno sul piano complesso. Una volta che ho segnato poli e zeri disegno linee di campo elettrostatico se al posto di zeri metto cariche − e al posto di poli cariche + il luogo delle radici è costituito da speciali linee di campo. Nell'esempio la linea orizzontale).

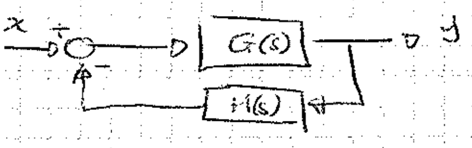
Esempio $\quad G(s) = \dfrac{s+10}{s+1}$



il polo della fdt anello chiuso al variare di K'_p tra 0 e ∞ sono reali $-10 \le p_1 \le -1$

Regole per determinare il luogo dei punti:

Consideriamo il sistema



$$y(s) = x(s)\,\frac{G(s)}{1+G(s)\,H(s)}$$

$$G(s)\,H(s) = K'\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{(s+p_1)(s+p_2)\dots}$$

$$1+G(s)\,H(s) = 0 \quad \text{se} \quad K'\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{(s+p_1)(s+p_2)\dots} = -1$$

implica che

$$\arg(s+z_1)+\arg(s+z_2)+\dots-\arg(s+p_1)-\arg(s+p_2)-\dots = \pm 180°$$

e $\left|\dfrac{|s+z_1|\,|s+z_2|\dots}{|s+p_1|\,|s+p_2|\dots}\right| |K'| = 1$

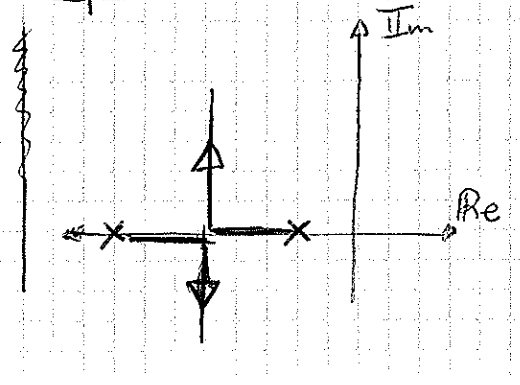
luogo delle radici

$\forall s = \sigma + j\omega$ tali che $\arg(s+z_1)+\arg(s+z_2)\dots-\arg(s+p_1)\dots = \pm 180°$

Regole: $\quad n_p$ = numero poli fdt a.a. $(n_p \ge n_z)$; $\quad n_z$ = numero zeri fdt a.a.

1) Numero dei rami del luogo delle radici = numero di poli della fdt anello aperto (n_p)

esempio: sistema del 2° ordine

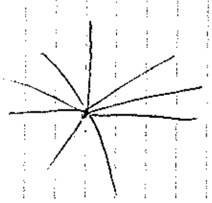


2) Ci sono dei pezzi dell'asse reale che fanno parte del luogo delle radici. Sono pezzi che lasciano a destra un numero di poli/zeri dispari

3) Le linee partono sempre dai poli della fdt anello aperto e finiscono negli zeri della fdt a.a. Se ~~il numero di~~ $n_p > n_z$ le linee vanno a finire ad infinito.
(N.B. i poli fdt anello chiuso coincidono con i poli fdt a. aperto per $K' \simeq 1$ ~~piccolo~~, se $K' \to \infty$ i poli della fdt anello chiuso tendono o a infinito o agli zeri della fdt anello aperto).

4) Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

5) Se $n_p > n_z$ (rami che vanno a ∞). Le linee che vanno a infinito sono delle semirette che partono da un punto e hanno un certo angolo.

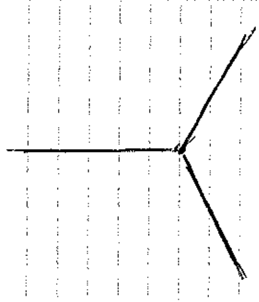


La regola 5 fornisce gli angoli:

$$K = (0, 1, 2, \dots, n_p - n_z - 1)$$

$$\varphi = \frac{K\,360° - 180}{n_p - n_z}$$

Esempio:
$n_p - n_z = 3 \Rightarrow K = (0,1,2)$
$\varphi_1 = 60°$ $\varphi_2 = 180°$
$\varphi_3 = 300°$

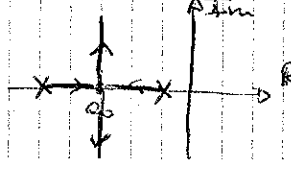


Questi 3 angoli sono facili da disegnare perché rappresentano la terna 3-fase

6) Se $n_p > n_z$. Ci fornisce il punto di partenza delle semirette.

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{j=1}^{n_z} z_j}{n_p - n_z}$$

Esempio per sistema del 2° ordine



$\varphi_1 = -90$
$\varphi_2 = 90$

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

7) Se $n_p - n_z \geq 2$ la somma dei poli fdt anello chiuso è uguale alla somma dei poli della fdt anello aperto.

b) il baricentro dei poli della fdt anello chiuso coincide con il baricentro dei poli della fdt anello aperto

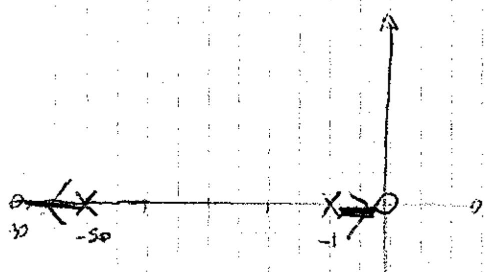
8) Metodo per individuare e calcolare i punti dell'asse reale di emersione o immersione.
Se una parte di asse reale luogo delle radici è compreso tra due poli, in quel pezzo di asse reale esiste almeno un punto di emersione. (carat. dai valori max di K')
In una parte di asse reale luogo delle radici compreso tra 2 zeri, ~~in quel pe~~ si trova un punto di inversione (caratterizzato dai valori minimi di K')

9) Se ho dei punti che vanno nel semipiano dx il luogo dei punti taglia l'asse immaginario in alcuni punti che vengono così ricavati:
$s = j\omega$ a questo punto si trovano gli ω_1 tali che
$\arg\left(G(j\omega_1)H(j\omega_1)\right) = \pm 180$

10) Come partono e come arrivano le linee in caso di poli/zeri complessi coniugati.

Esempio:

$$G(s)\,H(s) = K' \frac{(s+0)\,(s+30)}{(s+1)(s+5)}$$

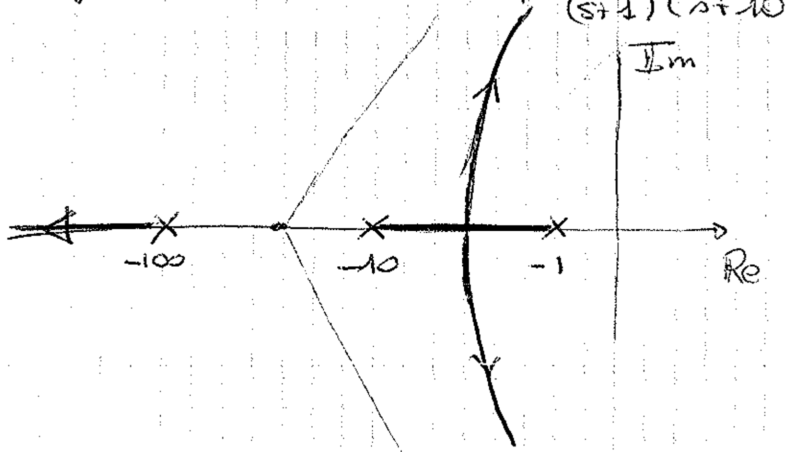


Il sistema non diventa instabile dal punto di vista matematico, ma può creare problemi dal punto di vista reale.

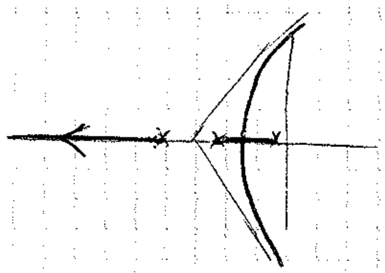
A fare $K' = \infty$ un polo va a finire in -30 e l'altro in 0. I due poli si annullano con gli zeri. Non ci sono quindi particolari problemi ad avere K' alto

Esempio $G(s)H(s) = K'_p \dfrac{1}{(s+1)(s+10)(s+100)}$

$a_0 = -\dfrac{111}{3} = -37$

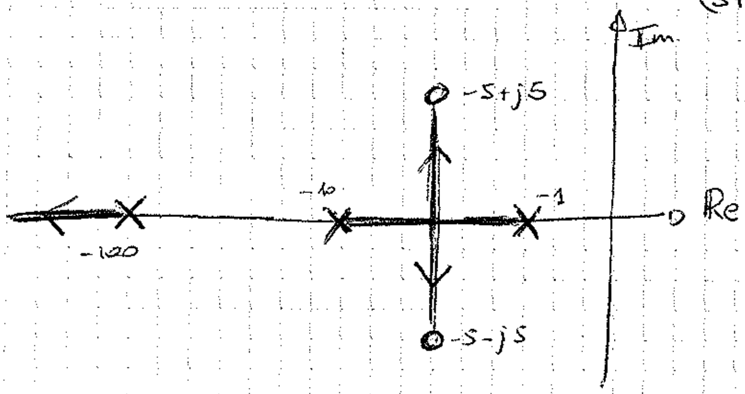


Cambiando scala



Sicuramente questo sistema per K' che aumenta diventa matematicamente instabile. Ottenere lo stesso risultato usando il criterio di Bode o Nyquist.

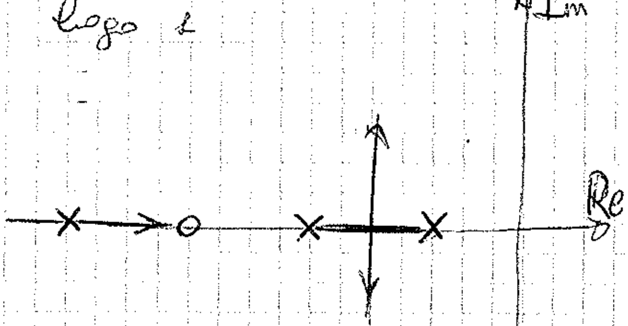
Esempio: $G(s)H(s) = K'_p \cdot \dfrac{(s+5+j5)(s+5-j5)}{(s+1)(s+10)(s+100)}$



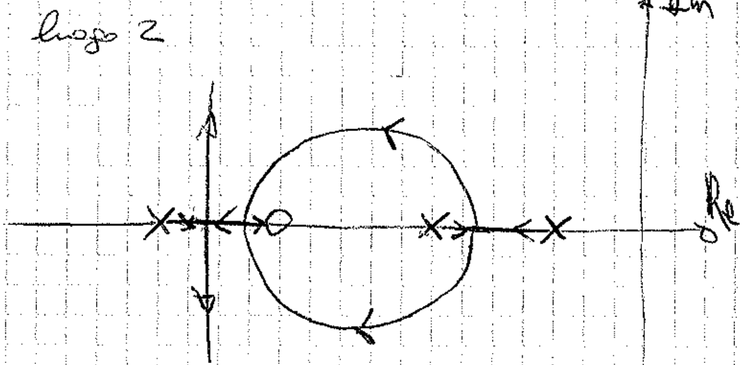
Il sistema è stabile (ha anche buona stabilità relativa).
Per $K \to \infty$ i poli hanno residuo che tende a zero

Confronto tra due luoghi delle radici

luogo 1



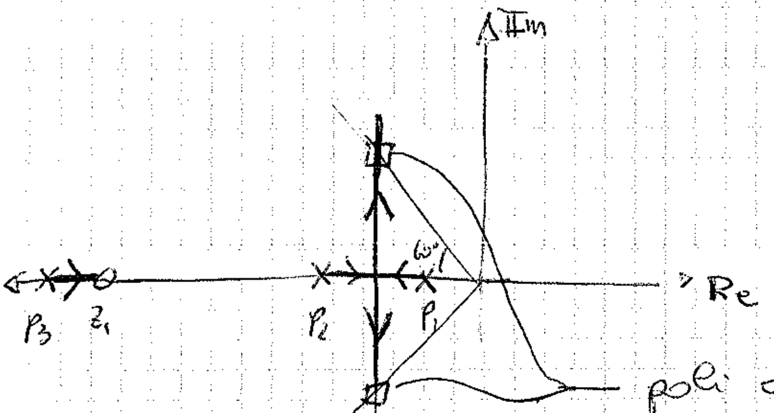
luogo 2



Uno dei 2 è sbagliato. Ma entrambi mi dicono che se K' diventa troppo grande il sistema diventa sotto smorzato.
In realtà qualitativamente sono entrambi giusti, dipende da dove sono i poli e gli zeri.

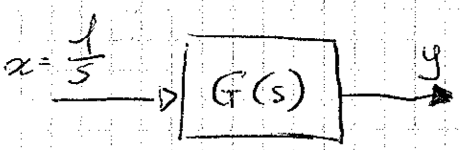
<u>Situazione 1</u>

Il polo p_3 e lo zero sono lontani dall'origine (e dagli altri due poli).



poli dominanti (ad anello chiuso)

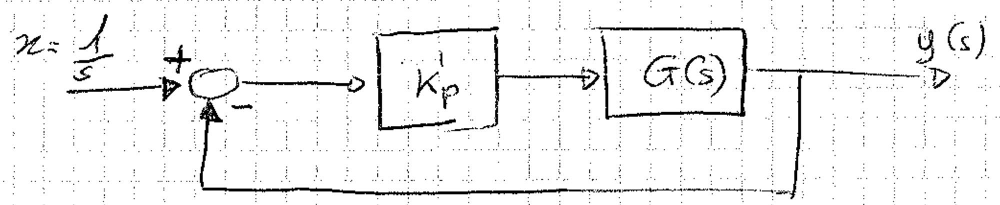
$$G(s) = \frac{s+z_i}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$



In prima approx il polo 3 e lo zero si annullano. Il polo dominante è il p_1. Quindi possiamo approssimare

$$G(s) \simeq \frac{1}{s+p_1}$$

Pensiamo G(s) in un anello chiuso.



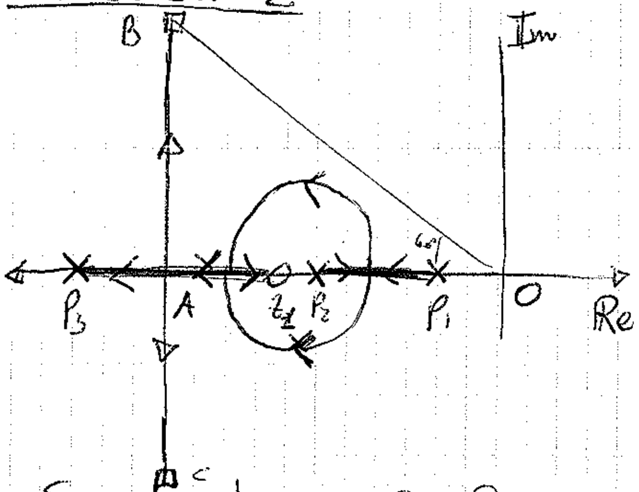
K'p ha senso farlo grande, ma non troppo (altrimenti i poli sono sottosmorzati). Conviene cercare di raggiungere uno smorzamento di 0,5 ($\varphi = 60°$)

I poli dominanti avranno $\omega_0 = p_1 + p_2$.
Quindi il sistema anello chiuso si comporta approx. come un sistema del 2° ordine con poli complex coniugat con $\omega_0 = p_1 + p_2$ e $\zeta = 0{,}5$

Nota: questo è un sistema di tipo zero (non ha poli nell'origine), questo comporta un errore a regime (per $t \to \infty$). Quindi la risposta non tende a 1, ma al $\lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{\frac{K_p (s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}}{1+\frac{K_p (s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}}$

$$= \frac{K_p z_1}{p_1 p_2 p_3 + K_p z_1} < 1$$

Situazione 2



il polo p_2 e lo zero sono vicini, mentre p_3 è lontano ~~sto~~ dall'origine.

Se consideriamo la funzione anello aperto il polo dominante è p_1.

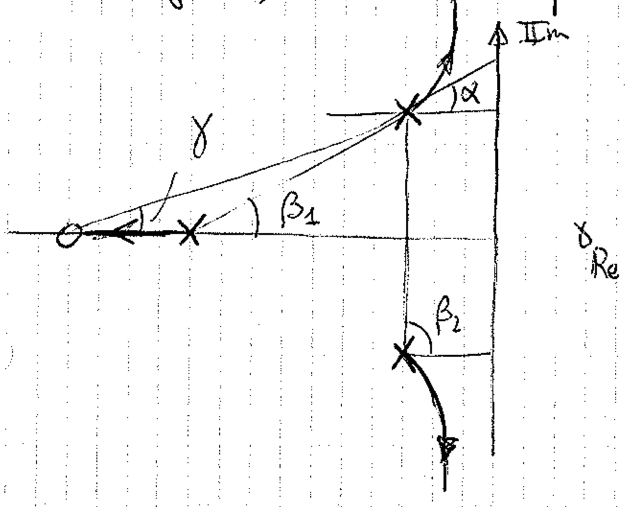
Se consideriamo la fdt anello chiuso i poli dominanti sono i quadratini del disegno. (B e C)

In questo caso

$z_3 + 2\,AO = p_1 + p_2 + p_3 \qquad p_2 \simeq z_3$

$\omega_0 \simeq BO = p_1 + p_3$

Regola 10: consideriamo un sistema con 2 poli complessi coniugati, un altro polo ed uno zero (come in figura)



Noi ci chiediamo quanto vale α.

La regola dice che

$$\alpha = 180° - (\beta_1 + \beta_2) + \gamma$$