TEORIA dell' ELASTICITA'

Si ipotizza che: - l'elemento sia continuo. Questa ipotesi è molto importante.

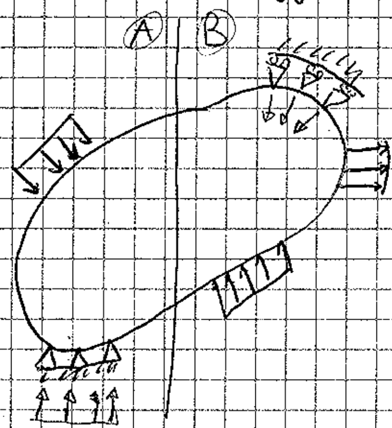
- il materiale deve essere omogeneo ed isotropo (le proprietà non dipendono dalla direzione in cui si studia il materiale)
- i materiali sono perfettamente elastici.

La teoria dell'elasticità si esprime attraverso 3 equazioni differenziali di equilibrio, 6 eq. differenziali di compatibilità più le condizioni al contorno.

Esistono semplificazioni della teoria per:

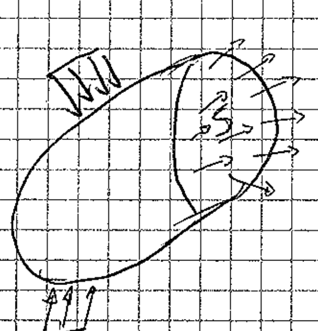
- i solidi assialsimmetrici (dischi rotanti, resistenza dei tubi e recipienti cilindrici)
- piastre
- gusci

La teoria dell'elasticità è basata sui concetti di tensione e deformazione. Le tensioni e le deformazioni sono collegati tra loro attraverso la legge di Hooke

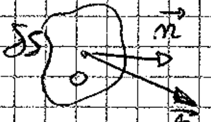


In corrispondenza dei vincoli si possono sostituire i vincoli con le reazioni vincolari.

Per verificare l'equilibrio si seziona il solido in due parti A e B e affermo che ognuna delle due parti è in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne, delle forze di reazione vincolare e delle forze ~~esterne~~ interne agenti sulla superficie di separazione (S). Le forze interne sono l'azione di B su A.

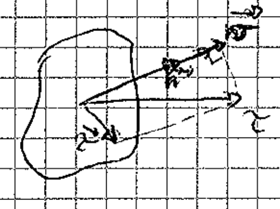


Prendiamo un punto $O \in S$ ed un'area δS contenente O. Prendiamo $\vec{n}$ la normale a δS passante per O.

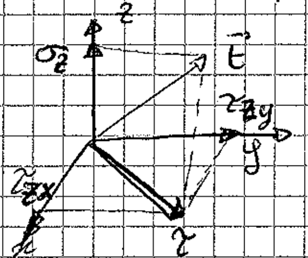


Definiamo $\vec{t} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{\delta P}{\delta S}$. Dove δP è la risultante delle forze interne a δS. Questo è il principio di Eulero - Cauchy.

$\vec{t}$ si scompone in una componente normale $\vec{\sigma}$ ed una tangenziale $\vec{\tau}$
$$(\vec{t}(\sigma, \tau)).$$

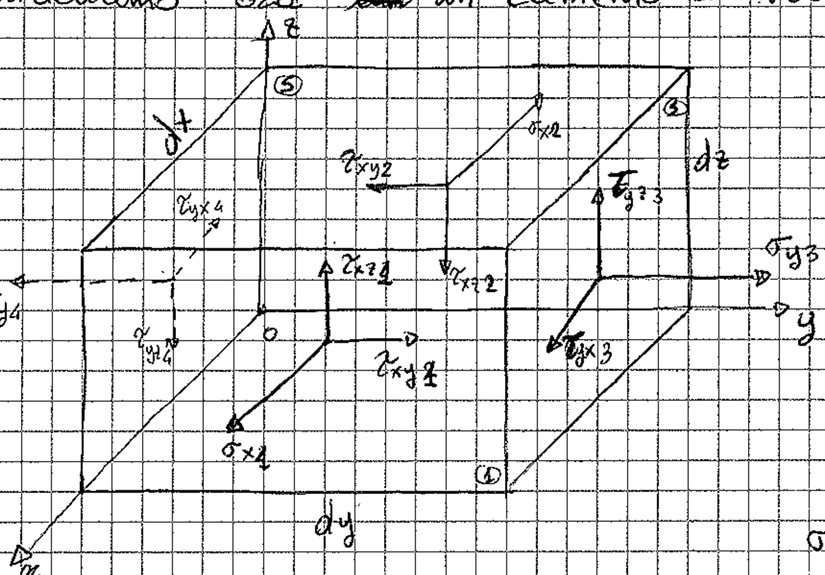


A noi interessa ricavare t in un sistema cartesiano (x, y, z).
Prendiamo il piano (x, y) corrispondente alla superficie δS.



Si definiscono così: ~~le~~
nel piano (x, y) le σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}
nel piano (y, z) le σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}
nel piano (x, z) le σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}

Quindi possiamo scomporre $\vec{t}$ in 9 componenti di tensione.
Consideriamo ora ~~un~~ un elemento di volume.



Definiamo facce positive le facce ~~po~~ 1, 3 e 5. Mentre le facce 2, 4 e 6 sono negative.
Le tensioni sulle facce positive e su quelle negative NON sono uguali. Infatti

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dx ,$$

~~$\sigma_{y3} = \sigma_{y4} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\, dy$ e~~

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy2} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dx \quad \text{e} \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\, dx .$$ Idem per le altre coppie di facce.

$$\sigma_{y3} = \sigma_{y4} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\, dy \qquad \tau_{yx3} = \tau_{yx4} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\, dy \qquad \tau_{yz3} = \tau_{yz4} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\, dy$$

$$\sigma_{z5} = \sigma_{z6} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\, dz \qquad \tau_{zx5} = \tau_{zx6} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\, dz \qquad \tau_{zy5} = \tau_{zy6} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\, dz$$

Gli oggetti sono in equilibrio. ~~Scriviamo~~ Sono inoltre presenti delle forze di volume $(X, Y \text{ e } Z)$
Scriviamo l'equilibrio di rotazione intorno all'asse x:

$$\overset{\curvearrowleft}{X}: -\left[\left(\sigma_{y_3} - \cancel{\sigma_{y_4}}\right) dx\,dz\right]\frac{dz}{2} + \left[\cancel{\left(\sigma_{z5} - \sigma_{z6}\right)} dx\,dy\right]\frac{dy}{2} +$$

$$+ \boxed{\tau_{zy5}\,dx\,dy\,dz + \tau_{yz3}\,dx\,dy\,dz +} \quad 3^\circ \text{ ordine}$$

$$+ \left(\tau_{xz1} - \cancel{\tau_{xz2}}\right) dy\,dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy1} - \cancel{\tau_{xy2}}\right) dy\,dz \frac{dz}{2} +$$

$$+ Z\,dx\,\cancel{dy}\,dz \frac{dy}{2} - Y\,dx\,\cancel{dy}\,dz \frac{dz}{2} = 0$$

4° ordine 4° ordine 4° ordine 4° ordine

Ne segue che: $\tau_{zy5}\,\cancel{dx\,dy\,dz} = \tau_{yz3}\,\cancel{dx\,dy\,dz}$ quindi

$\tau_{zy} = \tau_{yz}$

Le condizioni di equilibrio intorno ~~all' all~~ agli assi y e z forniscono

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Ne segue che le componenti delle tensioni ~~solo~~ sono solo 6.

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{Simmetrico}$$

$[T]$ è il tensore delle tensioni

Bisogna studiare l'equilibrio alla traslazione

$$X \rightarrow: \quad (\sigma_{x1} - \sigma_{x2})\,dy\,dz + (\tau_{yx3} - \tau_{yx4})\,dx\,dz + (\tau_{zx5} - \tau_{zx6})\,dx\,dy +$$

$$X\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Analogamente con gli equilibri alla traslazione lungo gli assi Y e Z si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

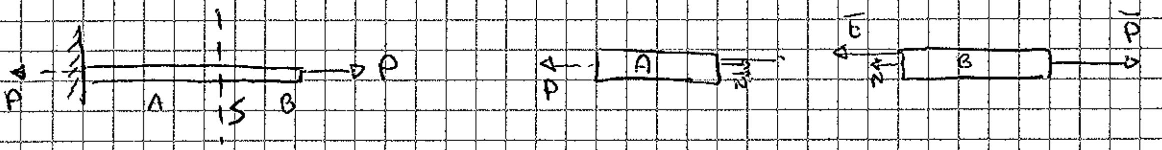
Queste sono le equazioni differenziali da risolvere.

Si può definire un sistema in cui il tensore delle tensioni diventa

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$ dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le tensioni principali

Esempio:

Consideriamo una barra in trazione:

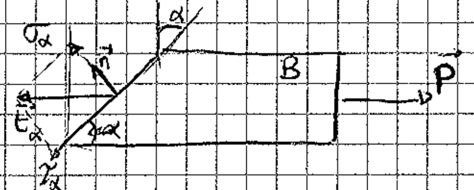


$t \cdot A = P \Rightarrow t = \frac{P}{A}$

$\vec{t} = \sigma \vec{n} \qquad \sigma = \frac{P}{A}$

$\vec{t} = \frac{P}{A} \vec{n}$

ora sezioniamo la barra non in perpendicolare



$t_\alpha \cdot A_\alpha = P \qquad A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}$

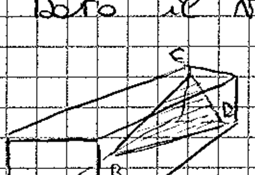
$t_\alpha = \frac{P}{A} \cos\alpha = \sigma \cos\alpha$

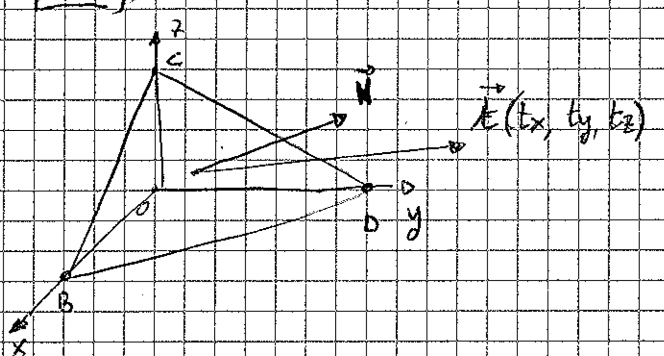
$\sigma_\alpha = t_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha$

$\tau_\alpha = t_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos\alpha \sin\alpha$

$\vec{t} = \begin{cases} \vec{t}\,(\sigma, \tau) \\ \vec{t}\,(\vec{n}) \end{cases}$

Dato il volumetto di cui conosco tutte le tensioni. Supponiamo di sezionarlo a caso. Otteniamo un tetraedro di Cauchy. Le tre facce ortogonali sono le facce negative.





Facciamo l'equilibrio lungo l'asse x.

$t_x\, A_{(BCD)} = \sigma_x A_{OCD} + \tau_{yx} A_{OBC} + \tau_{zx} A_{OBD}$

$t_x = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n$

dove $l = \underbrace{\frac{A_{OCD}}{A_{BCD}}}_{= \vec{N} \cdot \vec{i}}, \quad m = \underbrace{\frac{A_{OBC}}{A_{BCD}}}_{= \vec{N} \cdot \vec{j}}, \quad n = \underbrace{\frac{A_{OBD}}{A_{BCD}}}_{= \vec{N} \cdot \vec{k}}$

$$\boxed{\begin{aligned} t_x &= \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n \\ t_y &= \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n \\ t_z &= \tau_{xz}\, l + \tau_{zy}\, m + \sigma_z\, n \end{aligned}}$$

Vogliamo trovare $\underbrace{\vec{N}}_{l,m,n}$ tali per cui $\vec{t} = \sigma \vec{N}$

$$\begin{cases} t_x = \sigma\, l \\ t_y = \sigma\, m \\ t_z = \sigma\, n \end{cases}$$

Per trovare questi valori è necessario che

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = 0 \\ \tau_{xy}\, l + (\sigma_y - \sigma)\, m + \tau_{zy}\, n = 0 \\ \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + (\sigma_z - \sigma)\, m = 0 \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\left([T] - \sigma[I]\right)\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left|[T] - \sigma[I]\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$ I_1, I_2, I_3 sono gli invarianti dello stato delle tensioni

la soluzione ci permette di trovare le tensioni ed i piani principali (le 3 radici sono le tensioni principali).
Dette $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le tre radici si ha che $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Data una delle 3 tensioni principali σ_j se risolviamo l'equazione

$$\underbrace{\left([T] - \sigma_j[I]\right)}_{\text{NOTO}}\underbrace{\begin{Bmatrix} l_j \\ m_j \\ n_j \end{Bmatrix}}_{\{v_j\}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\{v_j\} \longrightarrow$ coseni direttori (del piano su cui agisce σ_j)

Per risolvere il problema sappiamo anche che:

$$l_j^2 + n_j^2 + m_j^2 = 1$$

Vogliamo dimostrare che date 2 tensioni principali diverse $\sigma_i \neq \sigma_j$ il piano su cui agisce $\sigma_i \perp$ al piano su cui agisce σ_j

$$\{v_j\}^T[T]\{v_i\} = \{v_j\}^T\sigma_i\{v_i\} \quad (*)$$

$$\{v_i\}^T\{T\}\{v_j\} = \{v_i\}^T\sigma_j\{v_j\}$$

facciamo la trasposta della II equazione

$$(**) \quad \{v_j\}^T[T]^T\{v_i\} = \sigma_j\{v_j\}^T\{v_i\} \qquad [T] = [T]^T$$

Sottraiamo $(**)$ a $(*)$:

$$0 = (\sigma_i - \sigma_j)\{v_j\}^T\{v_i\}$$

Poiché $\sigma_i \neq \sigma_j$ si ha che $\{v_j\}^T\{v_i\} = 0$ cioè i due piani sono ortogonali.
Di conseguenza gli assi principali sono un sistema cartesiano ortogonale

Analizziamo gli invarianti delle tensioni:

$I_1 = tr[T] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

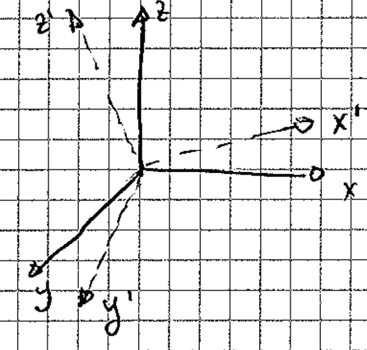
$I_2 = tr[C_T] =$

$I_3 = \det(T)$

dove $C_{ij} = (-)^{i+j} M_{ij}$

$$C_T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} & \vdots \\ & \cdots & \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$ matrice dei cofattori

le tracce ed i determinanti non cambiano per cambiamento di coordinate. ~~Cioè~~ Cioè se cambio sistema di riferimento i valori di I_1, I_2 ed I_3 non cambiano.



$(x\,y\,z) \rightarrow (x'\,y'\,z')$

$[T] \rightarrow [T'] \neq [T]$

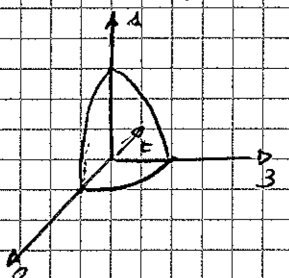
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_1' \\ I_2 &= I_2' \\ I_3 &= I_3' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ le tensioni principali restano le stesse e gli assi principali anche.

$\vec{t} = \sigma \vec{N}$ Formula di Cauchy nel riferimento principale $(1,2,3)$

$\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ con $t_1 = \sigma_1 \ell$ $\quad t_2 = \sigma_2 m$ $\quad t_3 = \sigma_3 n$

Poiché $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ allora

$$\left(\frac{t_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{t_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1$$ è l'ellissoide delle tensioni



$\vec{t}$ è obbligato a muoversi sull'ellissoide, cioè

<u>non</u> esiste $|\vec{t}| > |\sigma_1|$ e $|\vec{t}| < |\sigma_3|$

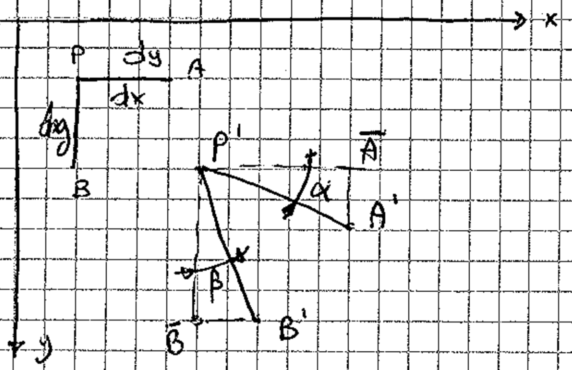
STATO 3D delle TENSIONI Ripasso

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$ tensioni principali: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

3 equazioni differenziali di equilibrio alla traslazione

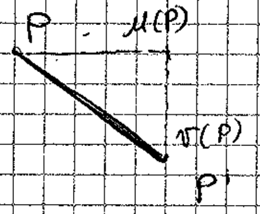
Equazioni alla ~~traslaz~~ rotazione per dimostrare che $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

STATO 3D delle DEFORMAZIONI



Supponiamo di caricare il piano xy. Dopo averlo caricato è ragionevole pensare che i punti A, B e P si siano spostati in A', B' e P'

Definiamo $u^{(P)}$ e $v^{(P)}$ gli spostamenti del punto P in orizzontale e verticale



$$u(A) = u(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$v(A) = v(P) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$u(B) = u(P) + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$v(B) = v(P) + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Definiamo deformazione normale lungo x $\varepsilon_x = \dfrac{u(A) - u(P)}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\varepsilon_y = \frac{v(B) - v(P)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ scorrimento angolare

con α: $\bar{A}A' = P'\bar{A}\ \mathrm{tg}\,\alpha$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cancel{dx} = \left[\cancel{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \cancel{dx} \right] \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathrm{tg}\,\alpha$$

poiché usiamo grandezze infinitesime $\mathrm{tg}\,\alpha \simeq \alpha$

Inoltre possiamo trascurare $\frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{tg}\,\alpha$

Quindi $\dfrac{\partial v}{\partial x} \simeq \alpha$

In modo analogo si ha che $\beta \simeq \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Definiamo:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$ il tensore delle deformazioni

Il tensore $[\varepsilon]$ è simmetrico perché $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ in questo caso la simmetria dipende dalla geometria.

Legge di HOOKE per materiali isotropi

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & 0 & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Con E: modulo di Young

ν: coefficiente di Poisson

G: modulo di elasticità tangenziale

con $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

NOTA: le deformazioni devo essere piccolissime.

NOTA: - $\{\sigma, \varepsilon\}$ sono disaccoppiate rispetto alle $\{\tau, \gamma\}$

- il legame $\{\sigma, \varepsilon\}$ è molto diverso dal legame $\{\tau, \gamma\}$ infatti

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right) \quad \text{mentre} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

La linearità non viene meno se si considera un materiale anisotropo, ma la matrice sarebbe composta da 21 coefficienti indipendenti, cioè la matrice sarebbe piena, ma simmetrica.

Per ora abbiamo ricavato le 3 equazioni differenziali di equilibrio. Dobbiamo ancora trovare le 6 equazioni " " di compatibilità.

Abbiamo visto che $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

da cui ~~Sappiamo~~

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}}$$ equazione di compatibilità

Per la legge di Hooke si ha che:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Se analizziamo solo il piano xy si ha che $\sigma_z = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \dfrac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \dfrac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \end{cases} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{E}}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\cancel{E}}\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right) = -\frac{(1+\nu)}{\cancel{E}}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) - \frac{(1+\nu)}{\cancel{E}}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right)$$

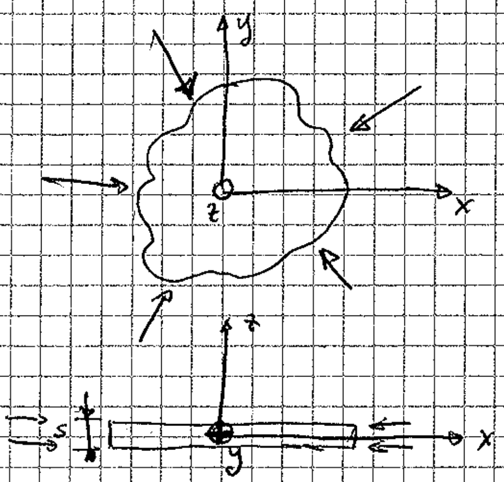
$$\boxed{\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)}$$

<u>Condizioni al contorno</u>

Sono la conoscenza delle forze per unità di superficie in alcuni punti

<u>STATO DI TENSIONE PIANA</u> ... (foglio successivo)

STATO DI TENSIONE PIANA (PLANE STRESS)



s è molto piccolo.

Il corpo caricato solo sul piano xy

Osserviamo le facce superiore e inferiore del corpo. Sulle due facce è corretto assumere che le tensioni lungo z siano 0. Cioè $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ sulle due facce. Poiché s è molto piccolo non mi aspetto che le tre tensioni possano subire grossi cambiamenti.

Cioè $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ su tutto il corpo

Bisogna ancora trovare σ_x, σ_y e $\tau_{xy} \neq 0$. Anche queste qui non ci aspettiamo che subiscano variazioni lungo z. Cioè σ_y, σ_x e τ_{xy} non dipendono da z.

qualunque tipo di variabile.

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ &(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \neq 0 \end{aligned}\right\} \text{STATO DI TENSIONE PIANA} \Longrightarrow \frac{\partial \circledcirc}{\partial z} = 0$$

Per quanto concerne le deformazioni:

$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ per la legge di Hooke

$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \neq 0$ ma indipendenti da z

$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ x legge di Hooke.

Le equazioni di equilibrio risultano

$$\text{EQ. CONT.} \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases}$$

con X e Y forze di volume $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

$$\text{1 EQ COMPAT.} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\right) \end{cases}$$