

POLITECNICO DI TORINO
Facoltà di Ingegneria I



Anno accademico xxxx/xxxx

Corso di COSTRUZIONE DI MACCHINE

Elettrix01

**STUDIO DELLA RESISTENZA DI UN DISCO A
SPESSORE COSTANTE UTILIZZANDO IL
METODO DEGLI ELEMENTI FINITI**

Scopo dell'esercitazione

Lo scopo dell'esercitazione è il calcolo della resistenza di un disco di spessore costante sottoposto a pressione interna, campo centrifugo e gradiente radiale di temperatura.

Ulteriore scopo è la verifica della convergenza dei risultati ottenuti con il modello ad elementi finiti con quanto studiato in teoria.

Descrizione del problema fisico

L'oggetto di analisi è un disco forato di spessore costante, i cui dati geometrici sono:

- spessore $h = 20\text{mm}$
- raggio interno $r_i = 50\text{ mm}$
- raggio esterno $r_e = 200\text{ mm}$

Il materiale con cui è costruito il disco è l'acciaio ed ha le seguenti caratteristiche:

- densità $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$
- modulo elastico $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$
- coefficiente di Poisson $\nu = 0,3$
- coefficiente di dilatazione termica $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Inoltre il disco è sottoposto ai seguenti carichi:

- pressione interna $p_i = 10\text{ Mpa}$
- velocità angolare $\omega = 100\text{ giri/s}$
- gradiente di temperatura avente equazione $T = b_0 + b_1 \cdot \chi = 6,67 + 293,33 \cdot \chi$, con $\chi = r/r_e$

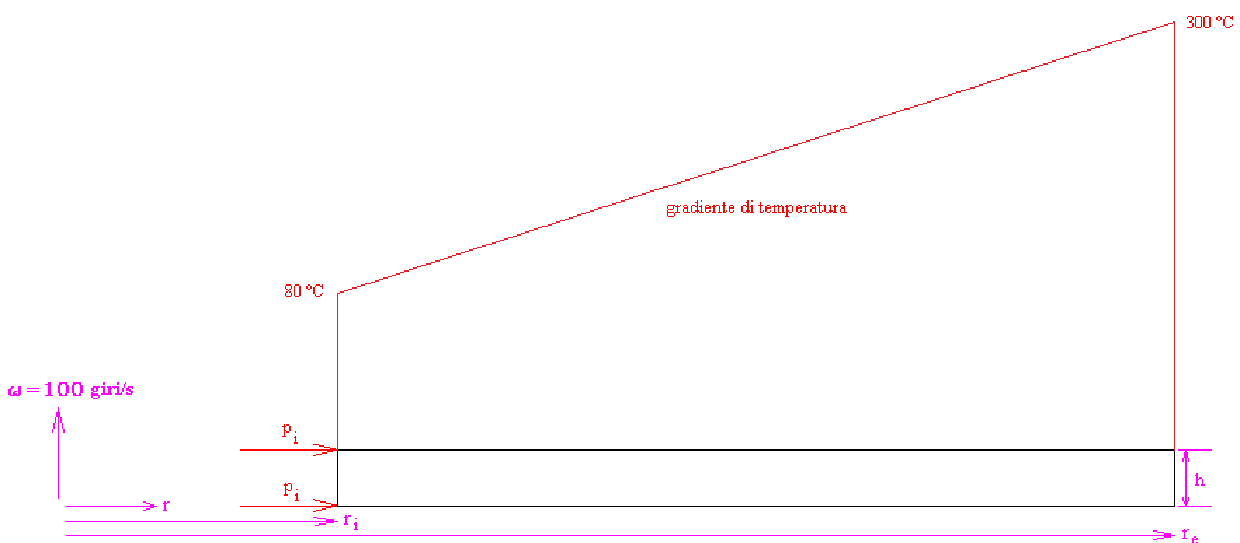


Figura 1 : sezione del disco con indicate le dimensioni ed i carichi a cui è sottoposto il disco

Calcolo teorico delle tensioni radiale, circonferenziale e ideale.

Per poter calcolare i valori delle tensioni è necessario risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\sigma_r}{d\chi^2} + \frac{3}{\chi} \frac{d\sigma_r}{d\chi} + (3+\nu)\rho\omega^2 r_e^2 + \frac{\alpha E}{\chi} \frac{dT}{d\chi} = 0, \text{ con } \sigma_r \text{ tensione radiale}$$

Per risolvere facilmente l'equazione ed ottenere l'andamento teorico delle tensioni è stato scomposto il problema in due casi distinti:

- disco rotante con velocità angolare ω e pressione interna p_i
- disco fermo soggetto al solo gradiente di temperatura

Successivamente, per il principio di sovrapposizione degli effetti, sono stati sommati i due risultati e si sono ricavate le tensioni radiale, circonferenziale e ideale.

Disco rotante con velocità angolare ω e soggetto a pressione interna p_i

In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale è data da:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{\chi^2} - \rho\omega^2 r_e^2 \frac{3+\nu}{8} \chi^2$$

da cui imponendo le condizioni al contorno è possibile ricavare le costanti A e B che consentono il calcolo della tensione circonferenziale mediante la formula:

$$\sigma_c = \chi \frac{d\sigma_r}{d\chi} + \sigma_r + \rho\omega^2 r_e^2 \chi^2 = A + \frac{B}{\chi^2} - \rho\omega^2 r_e^2 \frac{1+3\nu}{8} \chi^2.$$

In questo caso le condizioni al contorno sono:

- $\sigma_r(\chi=r_i/r_e=\beta) = -p_i$
- $\sigma_r(\chi=1) = 0$

Da cui si ottiene che

$$A = \rho\omega^2 r_e^2 \frac{3+\nu}{8} (\beta^2 + 1) - p_i \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = 54,65 \text{ MPa}$$

$$B = \rho\omega^2 r_e^2 \frac{3+\nu}{8} \beta^2 - p_i \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = 3,84 \text{ MPa}$$

Ne risulta che le due tensioni hanno andamento come in figura ed in particolare $\sigma_c(\chi=\beta) = 114,30$ MPa e $\sigma_c(\chi=1) = 29,24$ MPa

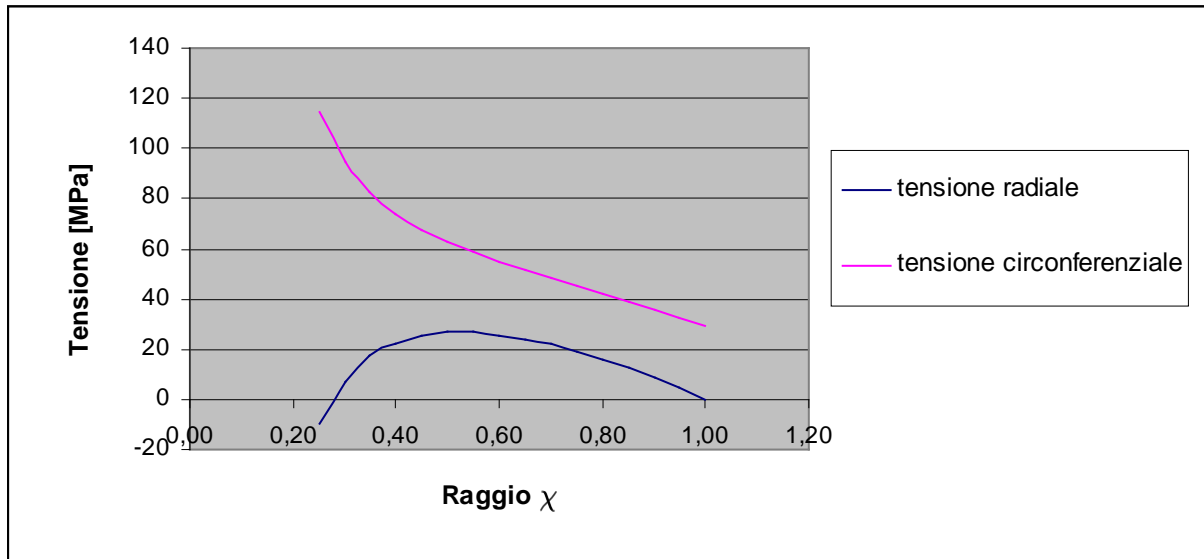


Grafico 1: andamento delle tensioni radiale e circonferenziale disco in rotazione con pressione interna

Disco fermo soggetto al solo gradiente di temperatura

In questo caso la soluzione dell'equazione differenziale è data da:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{\chi^2} - \frac{\alpha E b_1}{3} \chi$$

da cui imponendo le condizioni al contorno è possibile ricavare le costanti A e B che consentono il calcolo della tensione circonferenziale mediante la formula:

$$\sigma_c = \chi \frac{d\sigma_r}{d\chi} + \sigma_r + \rho \omega^2 r_c^2 \chi^2 = A + \frac{B}{\chi^2} - \frac{2}{3} \alpha E b_1 \chi$$

In questo caso le condizioni al contorno sono:

- $\sigma_r(\chi=r_i/r_e=\beta) = 0$
- $\sigma_r(\chi=1) = 0$

Da cui si ottiene che

$$A = \frac{\alpha E b_1}{3} \left[1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} (1-\beta) \right] = 258,72 \text{ MPa}$$

$$B = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\alpha E b_1}{3} (1-\beta) = 12,32 \text{ MPa}$$

Ne risulta che le due tensioni hanno andamento come in figura ed in particolare $\sigma_c(\chi=\beta) = 332,64$ MPa e $\sigma_c(\chi=1) = -221,76$ MPa

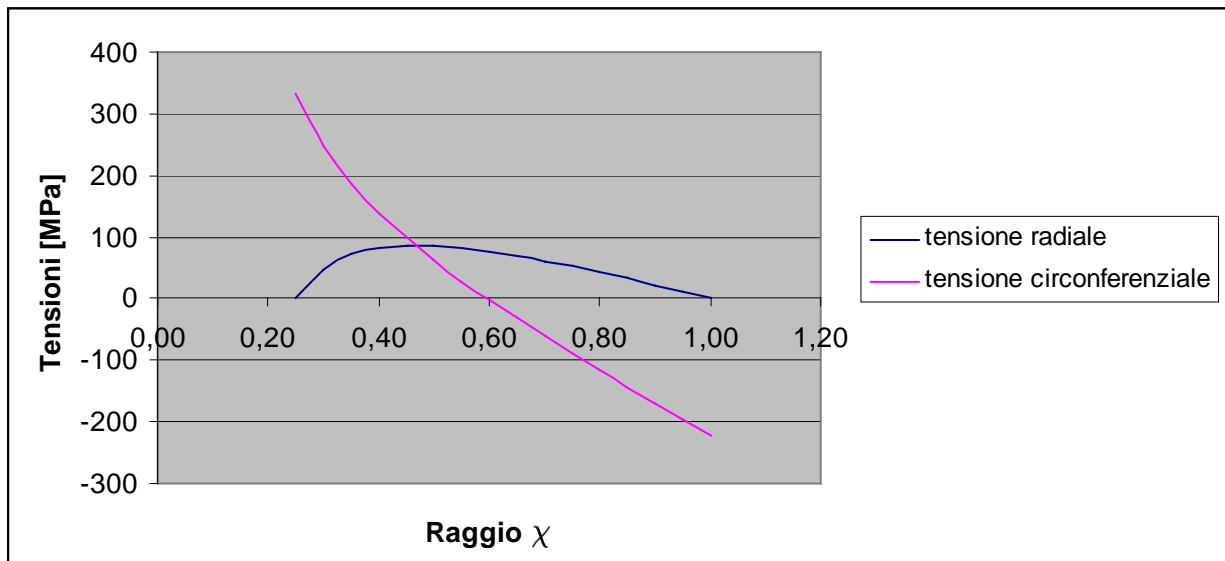


Grafico 2: andamento delle tensioni radiale e circonferenziale con solo gradiente di temperatura

Calcolo delle tensioni radiale, circonferenziale e ideale secondo Tresca.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che le tensioni radiale e circonferenziale totali sono la somma di quelle ricavate nei casi precedenti.

La tensione ideale secondo Tresca è data dalla formula $\sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$ dove con σ_1 e σ_3 si intendono rispettivamente il massimo ed il minimo sforzo agenti sulla coordinata di riferimento. Quindi $\sigma_{id} = \max(\sigma_r; \sigma_c; \sigma_z) - \min(\sigma_r; \sigma_c; \sigma_z)$, con σ_z lo sforzo agente lungo l'asse z.

Poiché ci troviamo nello stato di tensione piana $\sigma_z = 0$ Pa su tutto il disco.

Ne risulta che le tensioni hanno andamento come nel grafico sottostante ed in particolare $\sigma_{id}(\chi=\beta) = 456,93$ MPa e $\sigma_{id}(\chi=1) = 192,52$ Mpa

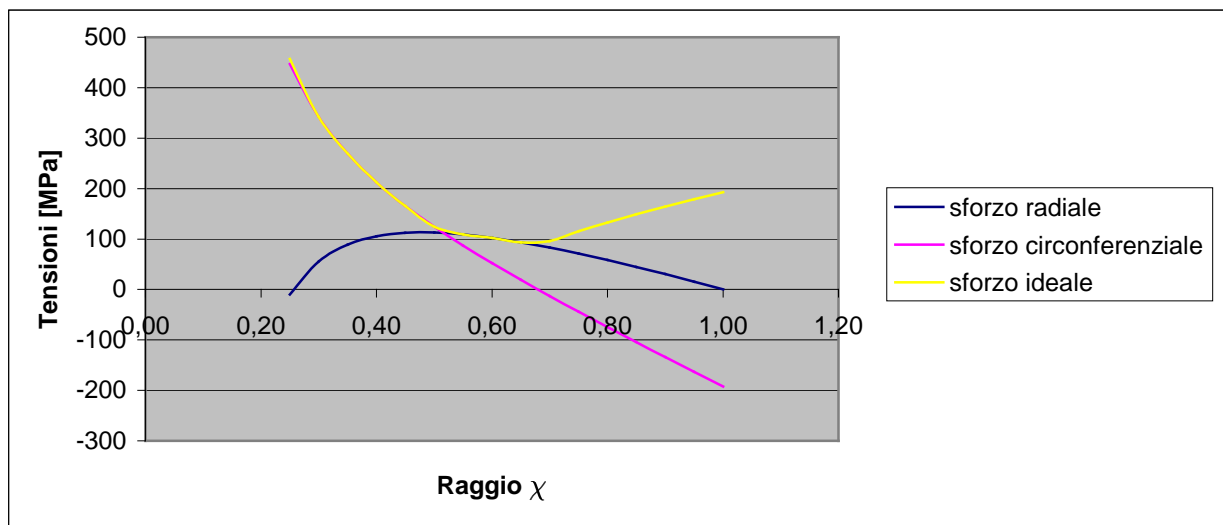


Grafico 3: andamento delle tensioni radiale, circonferenziale ed ideale nel disco

Procedura per la studio del modello con il metodo FEM

E' stato creato il database su Patran ed è stata creata la geometria del disco. Sono stati definiti gli elementi finiti attraverso i quali verranno studiate le tensioni agenti sul disco. In particolare è stato scelto il numero degli elementi all'interno del disco (pari a 2) e la loro geometria (triangolare con 6 nodi).

Sono state definite le proprietà del materiale, tra cui la densità, il numero di Poisson ed il modulo di Young.

Sono stati quindi definiti i carichi agenti sul disco: la pressione interna dovuta alla calettatura del disco su un albero, il gradiente di temperatura ed il carico d'inerzia.

Si è quindi proceduto alla risoluzione delle tensioni e delle deformazioni con il programma MSD Nastran. Quest'ultimo ha restituito un file di estensione "op2" nel quale sono contenuti i risultati dello studio da importare su Patran.

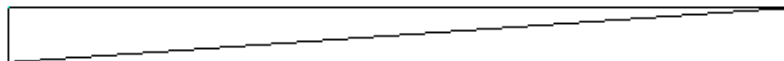
Successivamente si sono visualizzati i risultati ottenuti, in particolare sono stati graficati gli andamenti degli sforzi lungo le coordinate principali (r , θ e z), della tensione principale secondo Tresca e si è stampata a video una mappa della tensione ideale sulla sezione del disco.

Si sono ripetuti i passi precedenti cambiando il numero degli elementi: per la scelta del numero di elementi con cui è stato analizzato il disco rotante ci si è basati principalmente su due considerazioni:

- per riuscire ad avere dei risultati soddisfacenti anche con pochi elementi si è cercato di ridurre il più possibile la distorsione di questi ultimi.
- Per motivi di tempo si è cercato di non utilizzare troppi elementi e si è scelto di utilizzarne al massimo 160.

Sulla base delle considerazioni precedenti si sono scelti i seguenti numeri di elementi per studiare lo stato di tensione del disco e verificare la convergenza della teoria degli elementi finiti:

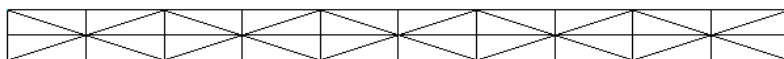
- Disco analizzato mediante due soli elementi



- Disco analizzato mediante otto elementi



- Disco analizzato mediante quaranta elementi



- Disco analizzato mediante centosessanta elementi



Analisi di convergenza della tensione ideale secondo Tresca al bordo interno

N°elementi	σ_{id}	$\sigma_{id}^{fem} / \sigma_{id}^{th}$
2	433,10	94,78%
8	448,16	98,08%
40	449,71	98,42%
160	454,57	99,48%

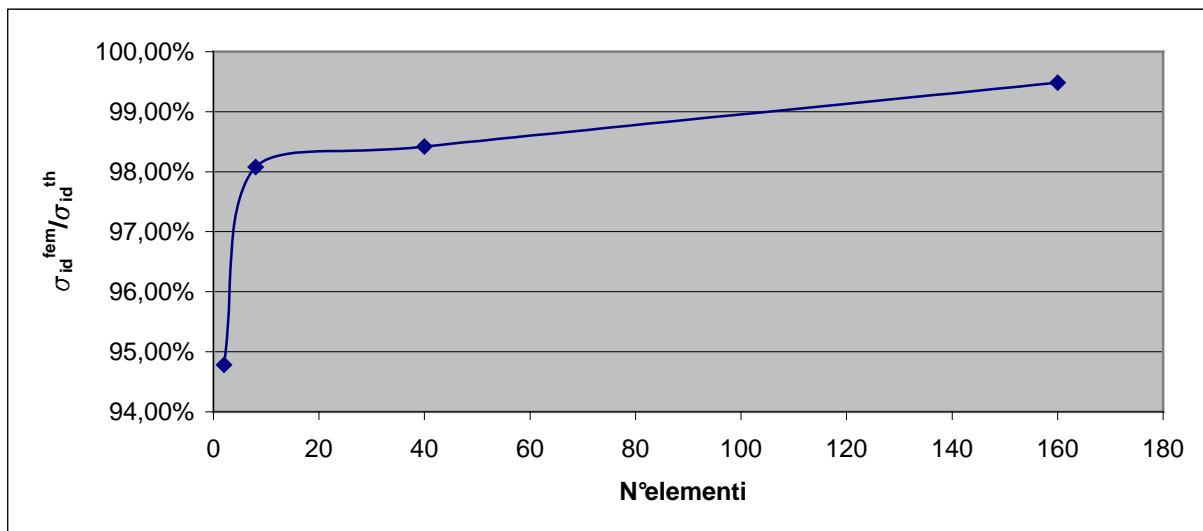


Grafico 4: convergenza del modello agli elementi finiti

Come si può notare all'aumentare del numero di elementi il rapporto tra la tensione ideale fornita dalla teoria degli elementi finiti e quella trovata analiticamente tende sempre più all'unità.

Analisi di convergenza delle tensioni $\sigma_r(\chi)$, $\sigma_c(\chi)$, $\sigma_z(\chi)$ sulla fibra media

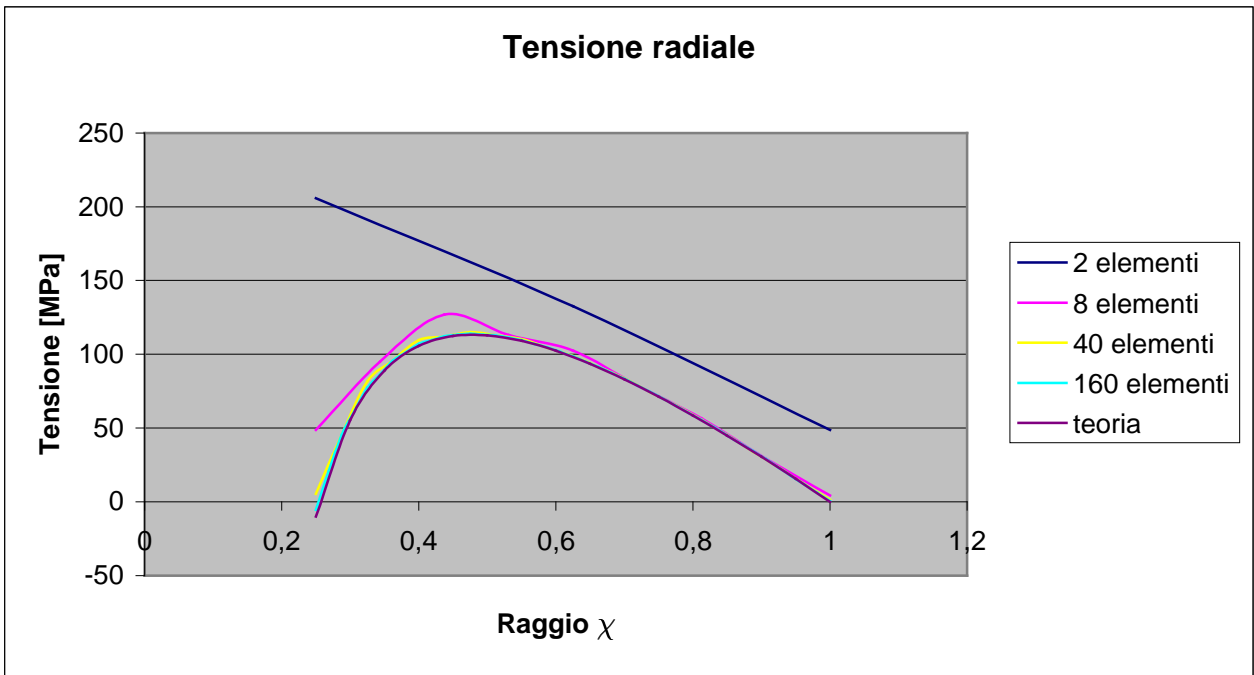


Grafico 5: convergenza della tensione σ_r

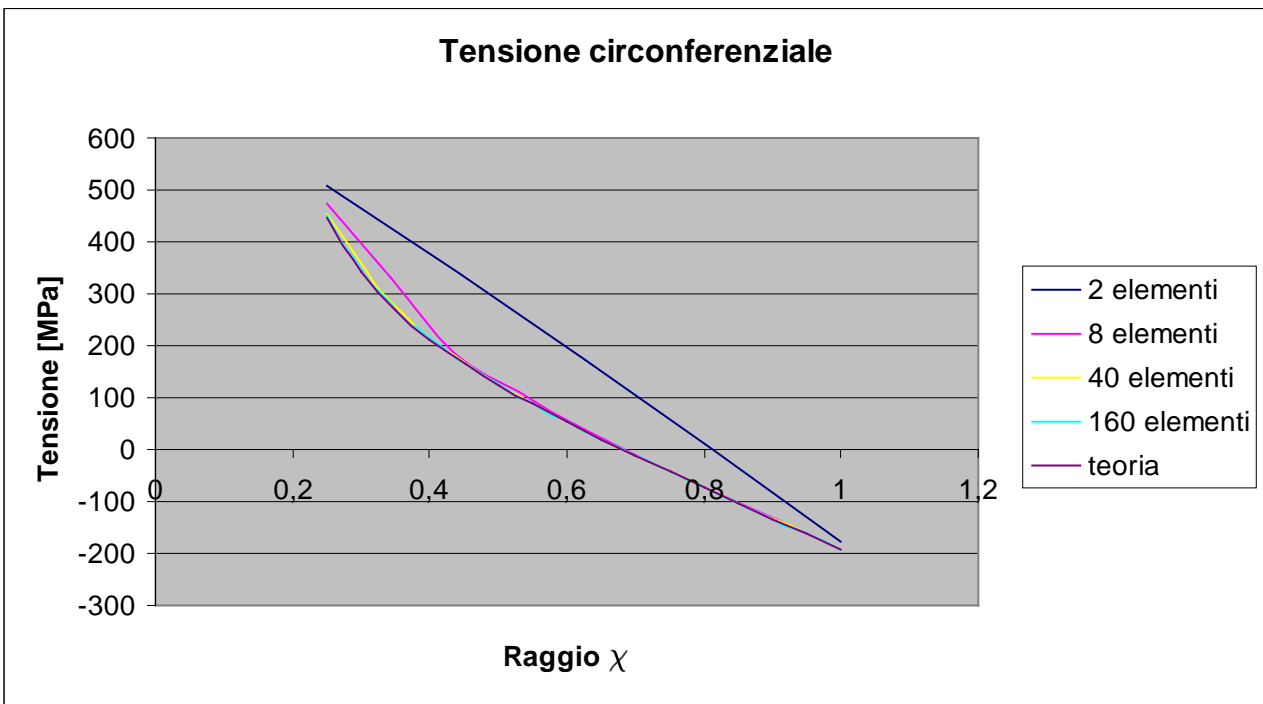


Grafico 6: convergenza della tensione σ_c

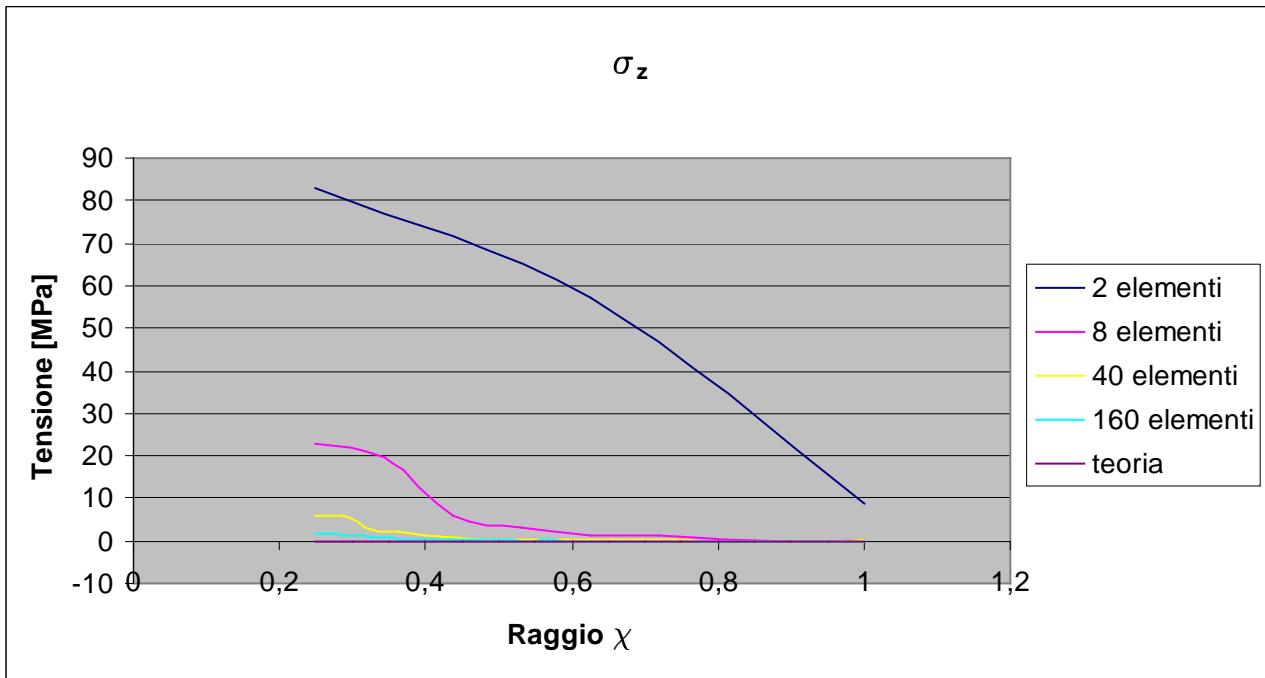


Grafico 7: convergenza della tensione σ_z

Come si può notare dai grafici la teoria degli elementi finiti inizia a convergere al risultato teorico a partire dai 40 elementi. Infatti l'andamento della tensione radiale ricavato per un numero di elementi maggiore di 40 risulta indistinguibile da quello studiato nella teoria. La medesima osservazione può essere fatta per l'andamento della tensione circonferenziale.

Mapa della tensione ideale sul modello di convergenza

L'andamento della tensione ideale secondo Tresca risulta essere il seguente:

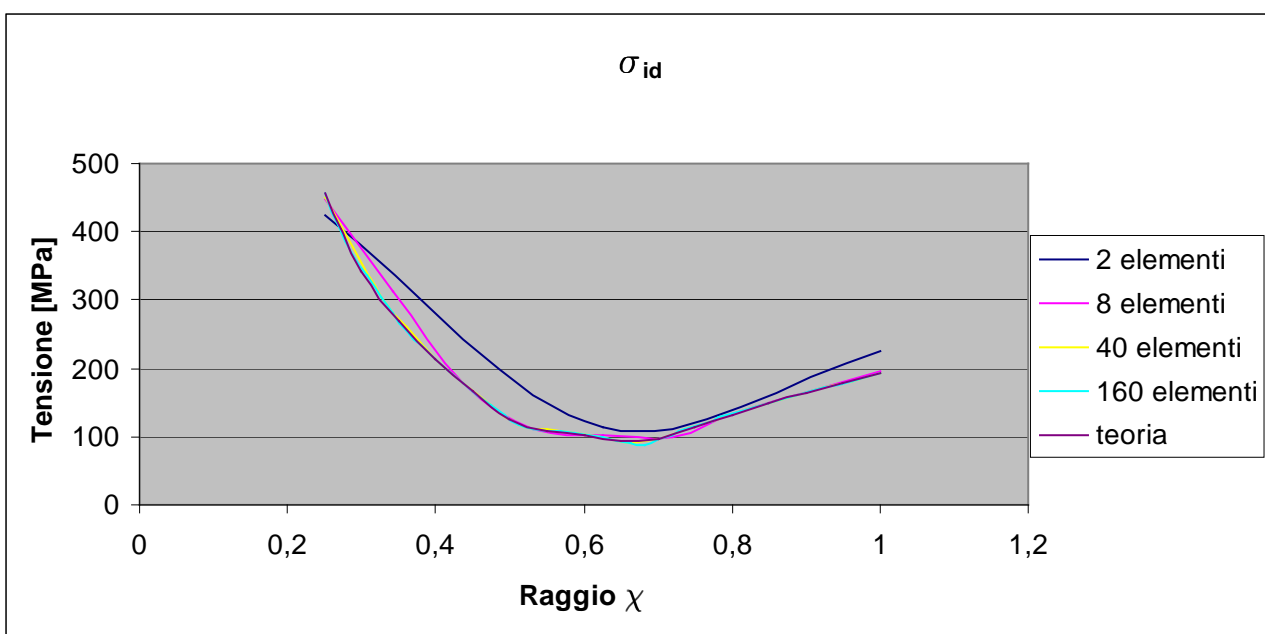


Grafico 8: convergenza della tensione σ_{id}

Come si può notare anche in questo caso l'andamento della tensione diventa indistinguibile dalla curva teorica a partire dallo studio con 40 elementi.

Inoltre è possibile visualizzare una mappa per ogni studio agli elementi finiti su cui è rappresentato l'andamento della tensione ideale secondo Tresca.



Figura 2: mappa dell'andamento di σ_{id} nello studio con 2 elementi



Figura 3: mappa dell'andamento di σ_{id} nello studio con 8 elementi



Figura 4: mappa dell'andamento di σ_{id} nello studio con 40 elementi



Figura 5: mappa dell'andamento di σ_{id} nello studio con 160 elementi

Conclusioni

Dall'analisi effettuata si evince che il modello agli elementi finiti converge alla soluzione analitica all'aumentare del numero degli elementi. Risulta quindi verificata la h-convergenza del metodo agli elementi finiti.