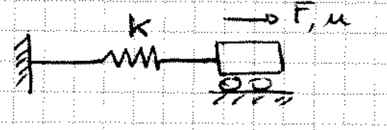
ELEMENTI FINITI

Calcolo matriciale di strutture

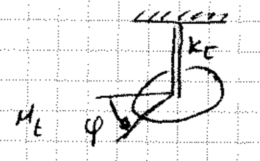
Equilibrio statico

1 grado di libertà:



$F = k\,u$

$k = [N/m]$



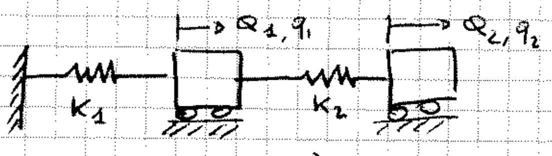
$[k_t] = \left[\frac{Nm}{rad}\right]$ $\quad M_t = k_t\,\varphi$

l'equilibrio di un sistema ad 1 gdl si scrive come

$\boxed{Q = k\,q}$ scrittura di rigidezza

lo stesso equilibrio potrebbe essere scritto $q = \frac{1}{k} Q = a\,Q$ con
a: coefficiente di flessibilità

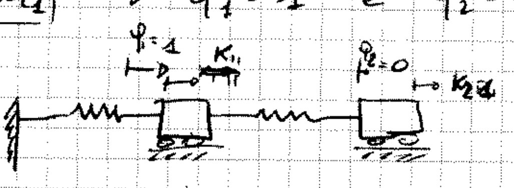
A noi interessa trattare dei sistemi con n gradi di libertà:
esaminiamo un sistema a 2 g.d.l.



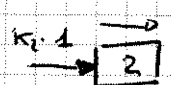
K_{ij}: forza (momento) per unità di lunghezza (rotazione) che nasce nel g.d.l. i-esimo se al sistema sono imposti i seguenti spostamenti:
$q_j = 1$ e $q_{l \neq j} = 0$

In questo caso (gdl sono 2) $i, j \overset{\text{possono essere}}{\sqrt{1\ 0\ 2}}$.

$\boxed{K_{i1}} \rightarrow q_1 = 1$ e $q_2 = 0$

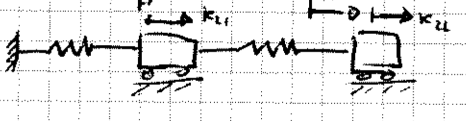


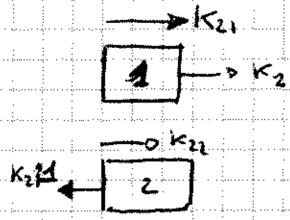
$K_{11} = k_1 + k_2$



$K_{21} = -k_2$

$\boxed{K_{i2}} \rightarrow q_1 = 0 \quad q_2 = 1$





$K_{21} = -K_2$

$K_{21} = K_2$

$$\begin{cases} Q_1 = K_{11}\, q_1 + K_{12}\, q_2 \\ Q_2 = K_{21}\, q_1 + K_{22}\, q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}}_{\text{matrice di rigidezza}} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Se generalizziamo ad n gradi di libertà:

$$\{Q\} = [K]\{q\} \quad \text{con} \quad Q: n \times 1 \;;\; K: n \times n \;,\; q = n \times 1$$

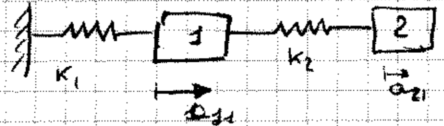
<u>Matrice di flessibilità</u>

a_{ij}: è lo spostamento nel g.d.l. i-esimo quando si impone al sistema

$q_j = 1$ e $q_{e \neq j} = 0$

torniamo all'esempio precedente per ricavare ~~le~~ le flessibilità:

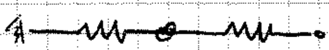
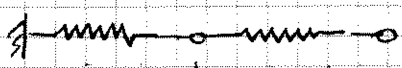
a_{i1}: $Q_1 = 1$ e $Q_2 = 0$



K_1 si allunga, mentre K_2 ~~rimane~~ rimane uguale, ma 2 si sposta.

$$a_{11} = \frac{1}{K_1} \qquad a_{21} = a_{11} = \frac{1}{K_1}$$

$a_{i2} \Rightarrow Q_1 = 0$ e $Q_2 = 1$

 $\Rightarrow$ 

$$a_{12} = \frac{1}{K_1} \qquad a_{22} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$q_1 = a_{11}\, Q_1 + a_{12}\, Q_2$$
$$q_2 = a_{21}\, Q_1 + a_{22}\, Q_2$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

matrice di flessibilità

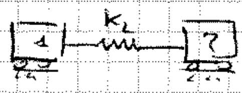
Scrittura generalizzata.

$$\{q\}=[a]\{Q\}$$

Proprietà di $[A]$ e $[K]$:

1) simmetria (teorema di Betti)

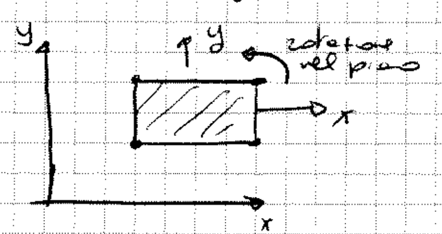
2) $[A]=[K]^{-1}$ $([K][A]=[I])$

3) Se tolgo la molla K_1 () (sistema labile)

$$K=\begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}, \quad \det(K)=0$$ quindi A non esiste e K è singolare

Se non ci sono forze $q_1 = q_2 =$ costante anche $\neq 0$

4) Ogni elemento finito è un sistema labile!!

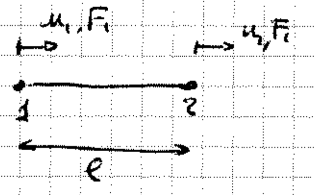


Noi studiamo elementi monodimensionali. Per questi elementi è possibile ricavare K in maniera diretta

i comportamenti di Trazione/Compressione e torsione → Asta

" " " flessione → trave.

ASTA



modulo di Young → E, A ← Area costanti

elemento sicuramente labile

Equilibrio statico

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$K_{i1} \Rightarrow u_1 = 1 \quad u_2 = 0 \qquad K_{11} = \frac{EA}{l} \qquad K_{21} = -\frac{EA}{l}$

trave sottoposta a compressione

$K_{i2} \Rightarrow u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \Rightarrow K_{12} = -\frac{EA}{l} \qquad K_{22} = \frac{EA}{l}$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

L'elemento asta ci permette di descrivere anche la torsione

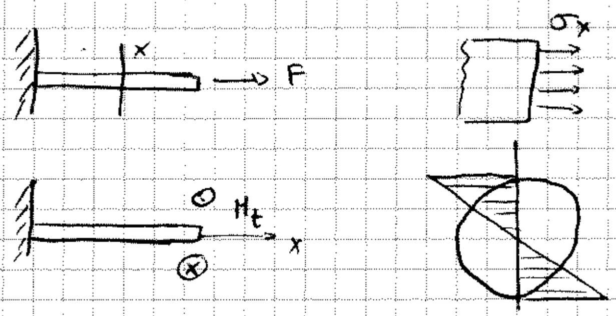
$$u(x) = \frac{F x}{E A} \quad \text{traz. / compressione}$$

$$\varphi(x) = \frac{M_t \, X}{G \, J_p} \quad \text{Torsione (se sez. circolare)}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{sez. circolare}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{t_1} \\ M_{t_2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{G J_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matrice di rigidezza torsionale}} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

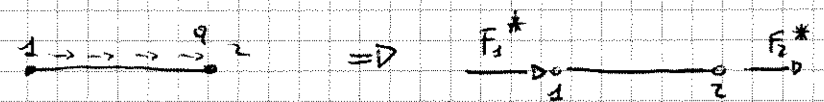
L'analogia tra torsione e compressione/trazione è valida solo per gli spostamenti, ma non per le tensioni!!



$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{J_p} \, r$$

Però capitare che gli alberi non siano sottoposti solo a carichi concentrati, ma anche a carichi distribuiti.



Si sostituisce il carico distribuito con due carichi distribuiti equivalenti. Le condizioni sono:

- i due sistemi abbiano la stessa risultante

$$F_1^* + F_2^* = q l$$

- voglio che l'allungamento della barra prodotto da q sia equivalente a quello prodotto da F_1^* e F_2^*

$$u_2 - u_1 = \frac{q l^2}{2 E A}$$

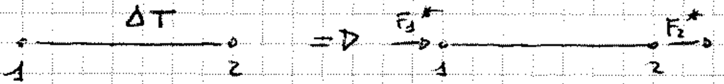
$$u_2 - u_1 = \frac{F_2^* l}{E A}$$

Si ottiene che $F_1^* = F_2^* = ql/2$

Equilibrio elemento asta:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{q\ell}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Può essere presente anche una variazione di temperatura. In questo caso trasformiamo il salto termico in due carichi meccanici



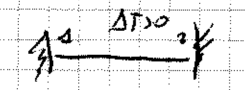
le condizioni sono:

- $F_1^* + F_2^* = 0$ equilibrio
- $$\left.\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \alpha \ell \Delta T \\ u_2 - u_1 &= F_2^* \ell / EA \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_2^* = -F_1^* = EA\alpha\Delta T$$

  congruenza

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + EA\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

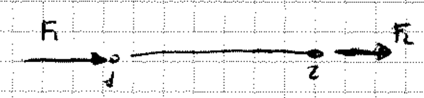
<u>Esempio</u>:



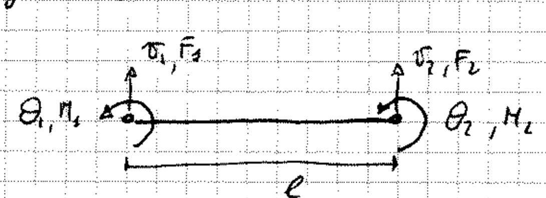
$u_1 = u_2 = 0$

$F_1 = EA\alpha\Delta T > 0$ $\qquad F_2 = EA\alpha\Delta T < 0$

Reazioni vincolari F_1 e F_2

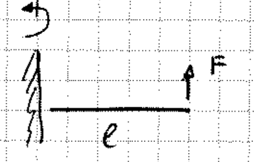


<u>TRAVE</u>: solido di Saint-Venant con unica sollecitazione la flessione

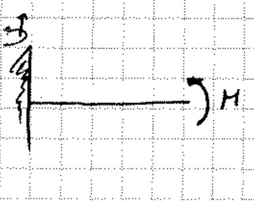


2 gdl per nodo: cioè 4 gradi di libertà.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix}_{4\times4}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

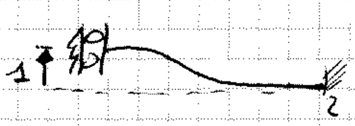


$$v(\ell) = \frac{F\ell^3}{3JE} \qquad \theta(\ell) = \frac{FL^2}{2EJ}$$



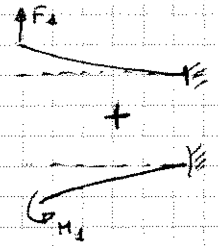
$$v(\ell) = \frac{M\ell^2}{2EJ} \qquad \theta(\ell) = \frac{M\ell}{EJ}$$

$\underline{K_{i1}}$ $\qquad v_1 = 1 \qquad \theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$



$$\left.\begin{aligned} &\uparrow \quad F_1 + F_2 = 0 \\ &\circlearrowleft_2 \quad M_1 + M_2 = F_1 \ell \end{aligned}\right\} \text{equilibrio}$$

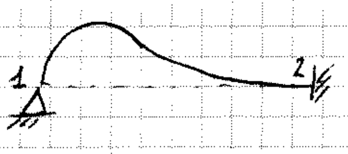
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{3}\frac{F_1 \ell^3}{EJ} - \frac{1}{2}\frac{M_1 \ell^2}{EJ} = 1 \\ \theta_1 &= -\frac{F_1 \ell^2}{2EJ} + \frac{M_1 \ell}{EJ} = 0 \end{aligned}\right\} \text{congruenza}$$



$$F_1 = 12\,\frac{EJ}{\ell^3} \qquad M_1 = 6\,\frac{EJ}{\ell^2}$$

$$F_2 = -12\,\frac{EJ}{\ell^3} \qquad M_2 = 6\,\frac{EJ}{\ell^2}$$

$\underline{K_{i2}}$: $\qquad \theta_1 = 1 \qquad v_1 = v_2 = \theta_2 = 0$



$$\left.\begin{aligned} &\uparrow \quad F_1 + F_2 = 0 \\ &\circlearrowleft_2 \quad M_1 + M_2 - F_1 \ell = 0 \end{aligned}\right\} \text{eq.}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{3}\frac{F_1 \ell^3}{EJ} - \frac{1}{2}\frac{M_1 \ell^2}{EJ} = 0 \\ \theta_1 &= -\frac{F_1 \ell^2}{2EJ} + \frac{M_1 \ell}{EJ} = 1 \end{aligned}\right\} \text{congr.}$$

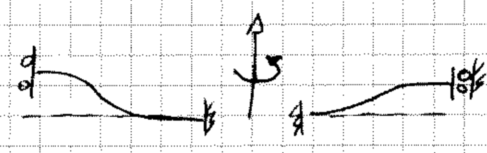
$$\boxed{\begin{aligned} F_1 &= 6\,\frac{EJ}{\ell^2} \qquad & M_1 &= \frac{2}{3}F_1\ell = 4\,\frac{EJ}{\ell} \\ F_2 &= -6\,\frac{EJ}{\ell^2} \qquad & M_2 &= F_1\ell - M_1 = 2\,\frac{EJ}{\ell} \end{aligned}}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & \cdot & \cdot \\ 6\ell & 4\ell^2 & \cdot & \cdot \\ -12 & -6\ell & 12 & \cdot \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \frac{EJ}{\ell^3}$$

Analizziamo i tre elementi riquadrati

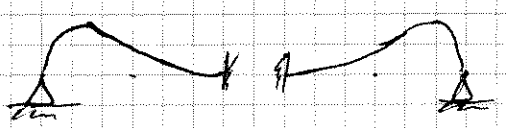
$\underline{12}$: $\quad \dfrac{F_1}{v_1} = \dfrac{F_2}{v_2}$

$\Rightarrow$



$\underline{-6\ell}$: $\quad \dfrac{M_2}{v_2} = -\dfrac{M_1}{v_1}$

$\underline{4\ell^2}$: $\quad \dfrac{M_1}{\theta_1} = \dfrac{M_2}{\theta_2}$



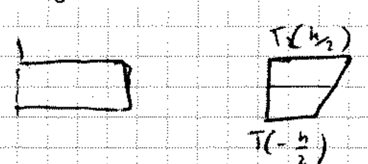
Poiché per sua natura K è simmetrica si ottiene

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \frac{EJ}{\ell^3}$$

Con carichi concentrati

$$F_1^* = F_2^* = \frac{q\ell}{2} \qquad M_1^* = -M_2^* = \frac{q\ell^2}{12}$$

Con gradiente di T

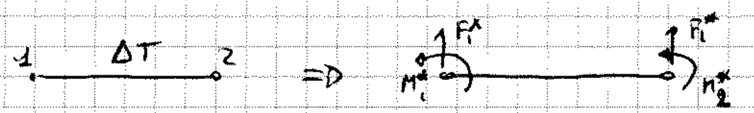


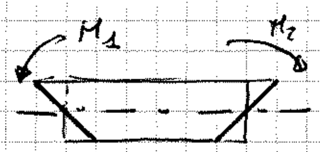
$$\Delta T = \frac{1}{2}\left(T(h/2) - T(-h/2)\right)$$

$$T_m = \frac{1}{2}\left(T(h/2) + T(-h/2)\right)$$

T_m : produce lo spostamento assiale (asta)

ΔT : produce flessione (spostamento trasversale)





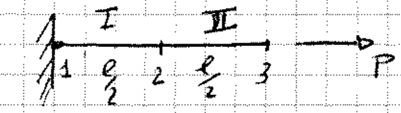
$$F_1^* = F_2^* = 0 \qquad M_1^* = -M_2^* = \frac{2\alpha EJ\Delta T}{h}$$

Scrittura di equilibrio per asta e trave

$$\{F_N\} + \underbrace{\{F_q\} + \{F_{\Delta T}\}}_{\text{vettori di carichi equivalenti}} = \underbrace{[K]\{f_N\}}_{\text{"MOLLA"}}$$

ASSEMBLAGGIO degli ELEMENTI FINITI

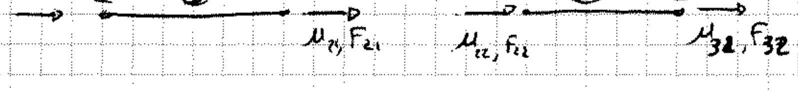
caso 1:



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA}$$

$$u = \int_0^\ell \frac{P}{EA}\,dx$$

studiamo i due elementi separati



$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_{32} \end{Bmatrix}$$

Cond. Compatibilità: $\boxed{u_{21} - u_{22} = u_2}$

$u_{11} = u_1$

$u_{32} = u_3$

Cond. Equilibrio: $\underbrace{F_{21} + F_{22}}_{F_2} = 0$ (devono eguagliare la forza esterna eventualmente caricate in 2 altrimenti deve essere 0)

$F_1 = F_{11}$

$F_{32} = F_3$

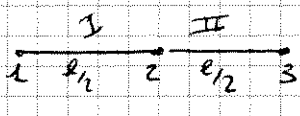
Ora possiamo scrivere le equazione di equilibrio. Ci aspettiamo che $[K]$ sia una 3×3

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{21} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{2EA}{L}(u_1 - u_2) \\ F_{21} = \frac{2EA}{L}(u_2 - u_1) \\ F_{22} = \frac{2EA}{L}(u_2 - u_3) \\ F_3 = \frac{2EA}{L}(u_3 - u_2) \end{cases}$$

Ora imponiamo ~~l'equazione~~ cond. di equilibrio al nodo comune

$$F_2 = \frac{2EA}{L}\left(u_2 - u_1 + u_2 - u_3\right) = \frac{2EA}{L}\left(2u_2 - u_1 - u_3\right)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{2EA}{L}}_{K \text{ del sistema}}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$



Regola per l'assemblaggio:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \mathrm{I} & 0 \\ \cdot & \overset{\circ}{\times}+ & \overset{\mathrm{II}}{\times} \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Condizioni di vincolo: $u_1 = 0$

Condizioni di carico: $F_2 = 0$, $F_3 = P$

Poiché $u_1 = 0$ al momento netto da parte la prima riga e la 1ª colonna di K e ignoro F_1

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{2EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \frac{l}{2EA} \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{PL}{EA} \qquad u_2 = \frac{1}{2} \frac{PL}{EA}$$

Ora calcolo $F_1 = -\frac{2EA}{L} \frac{1}{2} \frac{PL}{EA} = -P$

Manca solo il calcolo delle tensioni

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Considero elemento I:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = -\frac{P}{A}$$

$$\sigma_{21} = \frac{F_{21}}{A} = \frac{P}{A}$$

$$F_{21} = \frac{2EA}{L} u_2 = P$$

Considero elemento II:

$$\sigma_{22} = \frac{F_{22}}{A} = -\frac{P}{A}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_3}{A} = \frac{P}{A}$$

$$F_{22} = \frac{2EA}{L}(u_2 - u_3) = -P$$

caso 2

compatibilità: $v_{21} = v_{22}$, $\varphi_{21} = \varphi_{22}$

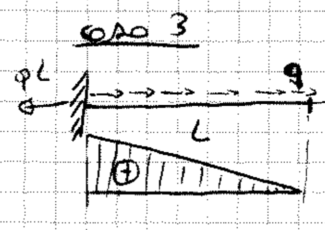
equilibrio: $F_{21} + F_{22} = 0$ (o Fext se c'è)

$M_{21} + M_{22} = 0$ (o Mext se c'è)

Regole di assemblaggio

$$\mathrm{I}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot+\cdot & \cdot+\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot+\cdot & \cdot+\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}$$

caso 3



$$[q] = \frac{N}{m}$$

$$N(x) = q(l - x) \qquad \sigma_x = \frac{N(x)}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{EA}$$

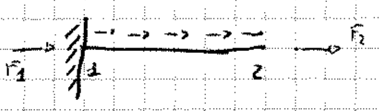
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \Big\}$$ CINEMATICA della DEFORMAZIONE

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA}$$

$$u(l) = \int_0^L \frac{N(x)}{EA}dx = \frac{q}{EA}\int_0^L (l-x)\,dx =$$

$$= \frac{q}{EA}\left[-\frac{1}{2}(l-x)^2\right]_0^l = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{EA}$$

Possiamo trattare il problema anche in questo modo:



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overset{=0}{\cancel{u_1}} \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_2 = \frac{EA}{l}u_2 - \frac{ql}{2}, \quad F_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{EA} = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{EA}$$

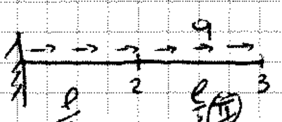
$$F_1 = -\frac{ql}{2} - \frac{EA}{l}\cdot u_2 = -\frac{ql}{2} - \frac{1}{2}\frac{ql^2}{\cancel{EA}}\cdot\frac{\cancel{EA}}{l} = -ql$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = -\frac{ql}{A} \Rightarrow |\sigma_1| = \frac{ql}{A}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A} = 0$$

questa risposta in termini di tensione non è molto soddisfacente perchè fornisce la tensione solo all'inizio e alla fine della barra.

L'unico metodo che possiamo usare è aumentare il numero di elementi. Ad esempio possiamo considerare 2 elementi invece di 1



elem. I:
$$\begin{Bmatrix} F_{1_1} \\ F_{2_1} \end{Bmatrix} + \frac{ql}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{21} \end{Bmatrix}$$

elem II:
$$\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_3 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{22} \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Componiamo le due equazioni

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$u_1 = 0$$
$$F_2 = F_3 = 0$$

$$\frac{ql}{4}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

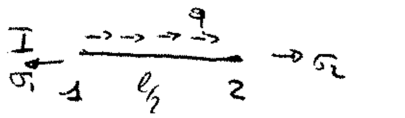
$$u_2 = \frac{3}{8}\frac{ql^2}{EA}, \quad u_3 = \frac{ql^2}{2EA}$$

$$F_1 + \frac{ql}{4} = \frac{2EA}{l} * u_2 \Rightarrow -ql = F_1$$

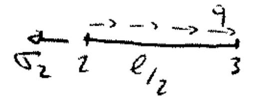
Calcolo delle tensioni:

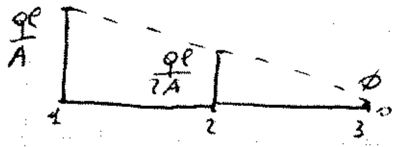
$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{F_1}{A} = -\dfrac{q\ell}{A} \\ \sigma_{21} = \dfrac{F_{2I}}{A} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q\ell}{A} \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\begin{cases} \sigma_{22} = \dfrac{F_{22}}{A} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q\ell}{A} \\ \sigma_3 = \dfrac{F_3}{A} = 0 \end{cases} \quad \text{II}$$



II





se io dividessi la barra in 4 elementi invece di 2 otterrei ulteriori soluzioni. Continuando ad infittire otterrei il risultato trovato prima.
Questo procedimento si chiama $\dot{H}$-convergenza.
Dove con h si intende una dimensione generica dell'elemento.

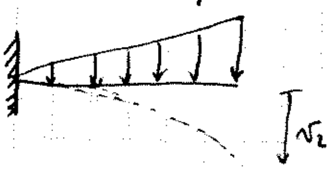
VINCOLI ELASTICI

Nella realtà non esistono i vincoli rigidi, è necessario passare al concetto di vincolo elastico:

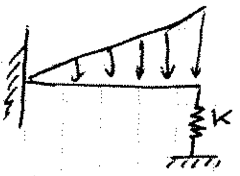
vincolo rigido: ~~$u_x = u_y = 0$~~ $u = v = 0$

$\Rightarrow$

Altro esempio:



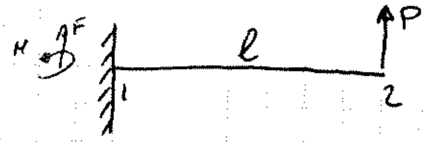
$\Rightarrow$



aggiungo vincolo elastico per ridurre la deformazione del sistema.

Nota: aggiungere rigidezza implica:
- STATICA: riduce la flessibilità del sistema.
- DINAMICA: aumenta le frequenze proprie del sistema.

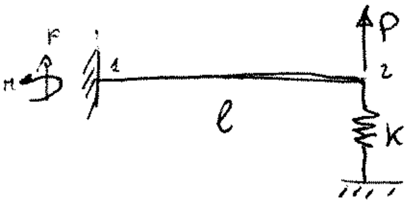
esempio:



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4\times4 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{\ell^3}\begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ \emptyset \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{3}\dfrac{P\ell^3}{EJ} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{P\ell^2}{EJ} \end{Bmatrix}$$

Supponiamo v_2 sia eccessivo e vogliamo limitare la deformabilità del sistema.



$$[K] = \frac{N}{m}$$

Prima $F_2 = P$; ora $F_2 = P - K v_2$

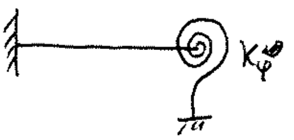
il sistema risulta essere

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} \left(12 + \frac{K\ell^3}{EJ}\right) & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

il segno "+" significa che è aumentata la rigidezza del sistema

Si può anche avere un caso del genere:



$$[K_\varphi] = \frac{Nm}{rad}$$

In questo caso il sistema diventa

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & -6\ell \\ -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

il modello del generico elemento

$$\underset{n \times 1}{\begin{Bmatrix} \vdots \\ F_i \\ M_i \\ \vdots \end{Bmatrix}} = \underset{n \times n}{\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & +K & \\ & & +K_\varphi \\ & & & \ddots \end{bmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{Bmatrix} \vdots \\ v_i \\ \varphi_i \\ \vdots \end{Bmatrix}}$$

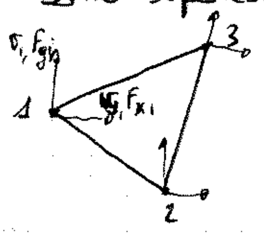
Nota: nei cuscinetti ~~ad olio~~ idrodinamici sono presenti i termini fuori diagonale:

$$\begin{bmatrix} -K & K_{xy} \\ K_{yx} & -K_\varphi \end{bmatrix}.$$

FORMULAZIONE GENERALE degli ELEMENTI FINITI

$$\{Q\} = [K]\{q\}$$

Sotto ipotesi di Plane Stress



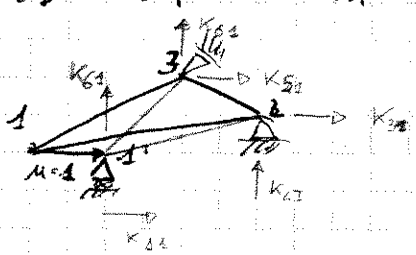
Non riusciamo a calcolare i coefficienti di $[K]$ in maniera diretta.

Possiamo dire che

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{6\times 6} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Proviamo a ricavare dei coefficienti in maniera diretta

K_{i1}: $u_1 = 1$ $\quad v_1 = u_2 = \dots = v_3 = 0$



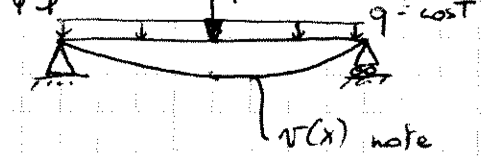
Non siamo in grado di calcolare tutti questi coefficienti. Dobbiamo trovare un altro metodo.

Per ricavare i coefficienti di $[K]$ dobbiamo usare il PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI.

Principio dei lavori virtuali: la condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico sia in equilibrio è che:

$$\delta \mathcal{L}_{ext} + \delta \mathcal{L}_{int} = 0$$

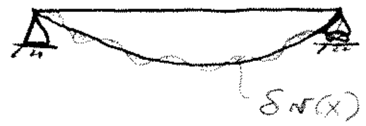
lavori virtuali esterni ed interni



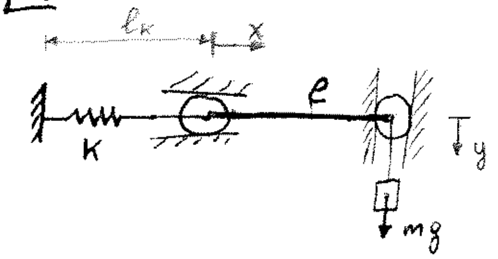
Gli spostamenti virtuali:

1) Non esistono forze esterne che causano gli spostamenti
2) Devono ~~ero~~ rispettare i vincoli

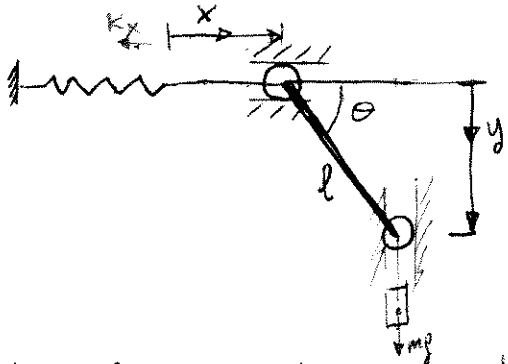
3) Devono essere piccoli



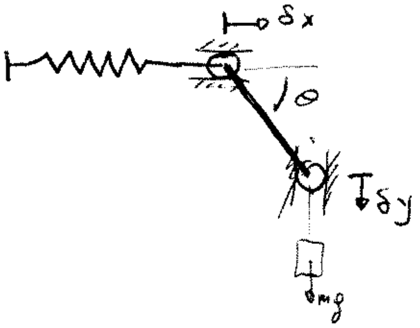
Esempio



Posizione iniziale



Proviamo a scrivere le equazioni basandoci sul principio dei lavori virtuali: Imprimiamo una δx e una δy.



Poiché la barra è rigida $\delta \mathcal{L}_{int} = 0$

$x = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$

$y = l\sin\theta$

$\delta\mathcal{L}_{ext} = mg\,\delta y - K_x\,\delta x = 0$

x è noto. Dobbiamo trovare δx e δy

$$\begin{aligned}\delta y &= l\cos\theta\,\delta\theta \\ \delta x &= l\sin\theta\,\delta\theta\end{aligned} \Rightarrow mgl\cos\theta\,\cancel{\delta\theta} - Kl(1-\cos\theta)l\sin\theta\,\cancel{\delta\theta} = 0$$

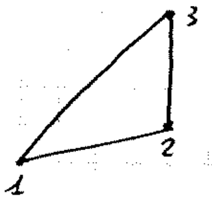
$$mg\cos\theta - Kl(1-\cos\theta)\sin\theta = 0$$

$$(1-\cos\theta)\tan\theta = \frac{mg}{Kl}$$ da cui si ricava θ_0 di equilibrio.

Noti gli spostamenti $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ tutte le altre variabili sono note: deformazioni e tensioni. Le deformazioni si ottengono dalla cinematica delle deformazioni, mentre le tensioni si ricavano attraverso le leggi di Hooke.

Definiamo $\{f(x,y,t)\}$ il campo degli spostamenti. La sua dimensione è $f \times 1$ dove f è il n° degli spostamenti presenti nel sistema:

esempio: caso in PLANE STRESS.



In questo caso gli spostamenti possibili sono 2: $u(x,y)$ $v(x,y)$. Quindi $g=2$

$\{f_N\}$ vettore degli spostamenti nodali. Se si indica con N il numero dei nodi dell'elemento. Allora $\{f_N\}$ ha dimensione $N \cdot g$.

(nell'esempio precedente $\{f_N\}$ è un vettore 6×1)

$\{\varepsilon(x,y,z)\}$: campo delle deformazioni. Nell'esempio è identificato con $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \gamma_{xy}(x,y) \end{Bmatrix}$ ed ha dimensione h. Il vettore delle deformazioni può essere scritto:

$$\underset{h \times 1}{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}} = \underset{h \times g}{\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}} \underset{g \times 1}{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}$$ nel caso di Plane Stress.

$\{\sigma(x,y,z)\}$: campo delle tensioni. Ha h componenti.

Nel caso di Plane Stress:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{[D]=[C]^{-1}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Per noi $\{\sigma(x,y,z)\} = [D]\{\varepsilon(x,y,z)\}$

NOTA: il vettore $\{f(x,y,z)\}$ NON è noto in maniera esatta. Dobbiamo sostituire il vettore con una sua approssimazione polinomiale. Cioè $\{f\}$ ha andamento polinomiale rispetto alle variabili x, y, z.

ELEMENTI FINITI

$$\underset{g\times 1}{\{f(x,y,z)\}} = \underset{g\times N_g}{[\phi(x,y,z)]} \underset{N_g \times 1}{\{\alpha\}}$$

α: coefficienti incogniti dell'andamento polinomiale
ϕ: matrice i cui coefficienti sono i termini del polinomio $(x, x^2, y, ...$

$$\{f_N\} = [\phi_N]\{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [\phi_N]^{-1}\{f_N\}$$ in questo modo ricavo il vettore $\{\alpha\}$

Noto $\{\alpha\}$ posso ricavare $\{f(x,y,z)\}$

$$\{f(x,y,z)\} = [N(x,y,z)]\{f_N\}$$

$\downarrow$ matrice delle funzioni di forma

$$[N(x,y,z)] = [\phi(x,y,z)][\phi_N]^{-1}$$ la matrice delle funzioni di forma ci conoscere gli spostamenti da cui posso ricavare tutto quello che mi serve. Infatti

$$\{\varepsilon(x,y,z)\} = [\partial]\{f(x,y,z)\} = \underbrace{[\partial][N(x,y,z)]}_{[B(x,y,z)]}\{f_N\} = [B(x,y,z)]\{f_N\}$$

$$\{\sigma(x,y,z)\} = [D]\left(\{\varepsilon(x,y,z)\} - \{\varepsilon_T(x,y,z)\}\right) =$$

$\downarrow$ deformazioni di natura termica.

$$= [D]\left([B]\{f_N\} - \{\varepsilon_T\}\right)$$

ricordiamo che $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x - E\alpha T = E(\varepsilon_x - \alpha T) =$
$= E(\varepsilon_x - \varepsilon_T)$

Per ottenere le equazioni di equilibrio facciamo ricorso al PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI. $(\delta \mathcal{L}_{ext} + \delta \mathcal{L}_{int} = 0)$

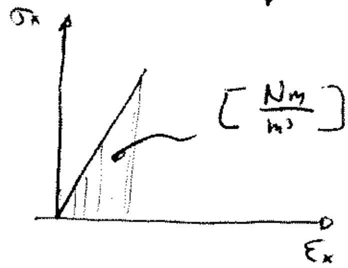
Il lavoro virtuale esterno è prodotto dalle forze esterne:
- forze applicate nei nodi $\{F_N\}$
- carichi di volume $\{q(x,y,z)\}$

$$\delta \mathcal{L}_{ext} = \{\delta f_N\}^T\{F_N\} + \int_V dV \{\delta f(x,y,z)\}^T\{q(x,y,z)\} =$$

Poichè $\{\delta f(x,y,z)\}^T = \{f_N\}^T [N(x,y,z)]^T$ quindi

$$\delta\mathcal{L}_{ext} = \{\delta f_N\}^T \left[\{F_N\} + \int_V dV\, [N(x,y,z)]^T \{q(x,y,z)\} \right]$$

$$\delta\mathcal{L}_{INT} = -\int_V dV\, \{\delta\varepsilon(x,y,z)\}^T \{\sigma(x,y,z)\} = -\int_V dV\, \{\delta f_N\}^T [B(x,y,z)]^T [D] \left([B(x,y,z)]\{f_N\} - \{\varepsilon_T\} \right)$$



$\left[\frac{Nm}{m^3}\right]$ cioè energia per unità di volume

Ricordiamo che

$$\{\delta\varepsilon_*\}^T = \{\delta f_N\}^T [B(x,y,z)]^T$$

$$\mathcal{L}_{INT} = -\{\delta f_N\}^T \left[\int_V dV\, [B]^T[D][B]\{f_N\} - \int_V dV\, [B]^T[D]\{\varepsilon_T\} \right]$$

Ora $\mathcal{L}_{ext} = -\mathcal{L}_{INT}$

$$\{F_N\} + \underbrace{\int_V [N]^T \{q\}\, dV}_{\{F_q\}} = \overbrace{\left[\int_V [B]^T[D][B]\, dV\right]}^{[k]} \{f_N\} - \overbrace{\int_V [B]^T[D]\{\varepsilon_T\}\, dV}^{\{F_T\}}$$

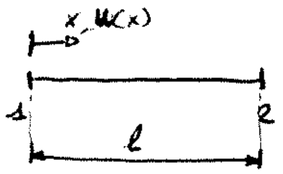
$$\{F_N\} + \underbrace{\{F_q\} + \{F_T\}}_{\text{carichi trasformati in nodali}} = [k]\{f_N\}$$

$\{F_N\}$: carichi nodali

$[k]$: matrice di rigidezza

$\{f_N\}$: spostamenti nodali

Elemento asta



$g = 1$, $N = 2$, $h = 1$

$$\{f(x,y,z)\} \to u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \;\; x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

I coefficienti α sono Ng

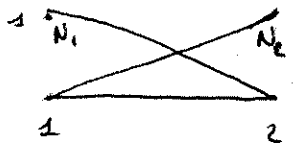
$$[\phi(x,y,z)] \to [\phi(x)] = [1 \;\; x]$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \qquad [\phi_N]^{-1} = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} \ell & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

scriviamo tante volte la $\phi(x)$ quanti sono i nodi (sostituisco x con il valore in cui si trova u_1 o u_2) caso u_1 si mette 1 e a x si sostituisce 0.

$$u(x) = [1 \quad x] \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{\ell} & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{\ell} \quad , \quad N_2 = \frac{x}{\ell}$$



$$u(x) = N_1^{(x)} u_1 + N_2^{(x)} u_2$$

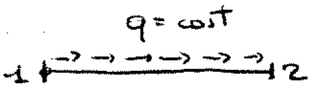
$$\{\varepsilon(x,y,z)\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad [\partial] = \frac{d}{dx}$$

$$\{\sigma(x,y,z)\} = E \{\varepsilon(x)\}$$

Possiamo quindi ricavare $[K] = \int_V dV \, [B]^T [D] [B] = \int_0^\ell A\,dx \begin{Bmatrix} -1/\ell \\ 1/\ell \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} =$

$$= \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Carico di volume</u> per elemento asta



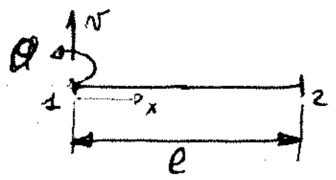
$$\{F_q\} = \int_V^\ell dV \, [N]^T \{q\} \qquad \{q\} = \frac{q}{A}$$

$$\{F_q\} = \int_0^\ell \cancel{A}\,dx \begin{Bmatrix} 1-\frac{x}{\ell} \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} \frac{q}{\cancel{A}} = \frac{q\ell}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

<u>carico termico</u> elemento asta

$$\{F_T\} = \int_V dV \, [B]^T [D] \underbrace{\{\varepsilon_T\}}_{\alpha \Delta T} = \int_0^\ell A\,dx \begin{Bmatrix} -1/\ell \\ 1/\ell \end{Bmatrix} E \alpha \Delta T = E \alpha A \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

<u>Elemento trave</u>



$$g = 2 , \; N = 2 , \; h = 1$$

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

ho assegnato tutte le variabili a v perché la rotazione di flessione è tale che $\tan\varphi = \frac{dy}{dx}$, ma le nostre deformate sono piccolissime!! Quindi $\tan\varphi \simeq \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{dy}{dx}$

In questo caso $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$

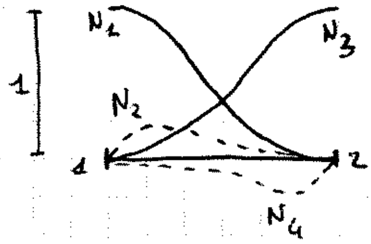
$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

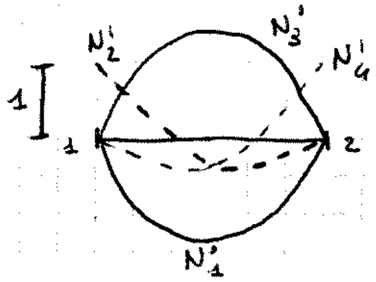
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix}}_{[\phi_N]} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [\phi_N]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} v(x) = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \\ \theta(x) = N_1' v_1 + N_2' \theta_1 + N_3' v_2 + N_4' \theta_2 \end{cases}$$

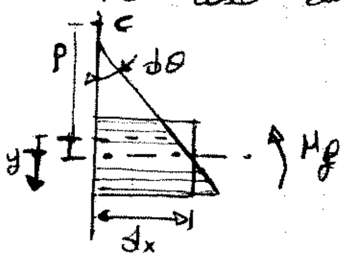
$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{\ell^2} + 2\frac{x^3}{\ell^3} \qquad N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}$$

$$N_3(x) = 3\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3} \qquad N_4(x) = -\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}$$





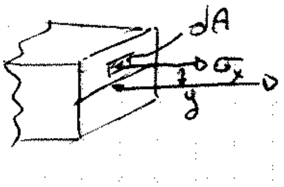
Nel caso di elementi flessionali la scrittura della legge di Hooke non è molto utile.



$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho\, d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$\sigma_x = E\dfrac{y}{\rho}$ ma non sono molto utili perché non conosciamo y e ρ

Trasformiamo la legge di Hooke in $M_f = ?\, \dfrac{d^2 v}{dx^2}$



$$dF_{int} = \sigma_x\, dA$$

$$\int_A \sigma_x\, dA\, y = M_f \qquad \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2\, dA}_{J_t} = M_f \qquad \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\text{curvatura}} = \frac{M_f}{E J_t}$$

Quindi $M_f = E J_t \dfrac{d^2 v}{dx^2}$

Quindi non usiamo $\{\sigma\} = D\{\varepsilon\}$, ma $M = EJ\dfrac{d^2 v}{dx^2}$

quindi il vecchio $\{\varepsilon\}$ diventa $\frac{d^2v}{dx^2} = [N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4''] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$

$$[K] = \int_V dV\,[B]^T [D][B] = \int_0^\ell dx \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} EJ\,[N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4''] =$$

$$= \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{SIMM} \\ 6\ell & 4\ell^2 & & \\ -12 & -6\ell & 12 & \\ & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

carico distribuito

$$\{F_q\} = \int dV\,[N]^T \{q\} \qquad \{q\} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad q \to \frac{q}{A}$$

$$\{F_q\} = \int A\,dx \begin{bmatrix} N_1 & N_1' \\ N_2 & N_2' \\ N_3 & N_3' \\ N_4 & N_4' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q/A \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\ell/2 \\ q\ell^2/12 \\ q\ell/2 \\ -q\ell^2/12 \end{Bmatrix}$$

carico termico

$$\{F_T\} = \int dV\,[B]^T[D]\,\{\varepsilon_T\} \qquad T = T_m + 2\Delta T \frac{y}{h} \Rightarrow \varepsilon_T = \alpha\, 2\Delta T \frac{y}{h}$$

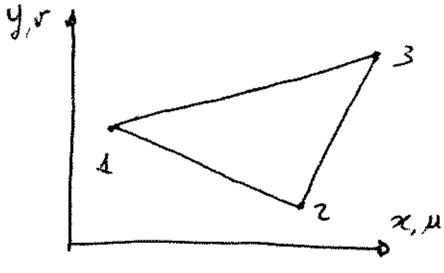
anche $\{\varepsilon_T\}$ è un vettore curvatura perché è del tipo $\frac{y}{\rho}$

curvatura $= -\alpha\, 2\Delta T/h$ (perché se ΔT cresce da $-\frac{h}{2}$ a $+\frac{h}{2}$ la curvatura è <0)

$$\{F_T\} = \int_0^\ell dx \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} EJ \left(-2\alpha \frac{\Delta T}{h}\right) =$$

$$= 2\alpha \Delta T EJ/h \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

elemento piano a 3 nodi



$g = 2$

$N = 3$

$h = 3$

PLANE STRESS: solo $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \neq 0$

PLAIN STRAIN: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z \neq 0$ ma a noi non interessa.

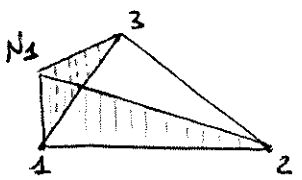
$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}}_{[\phi(x,y)]} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

Ora è necessario scrivere la matrice $[\Phi_N]$

Si ottiene che $[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = [\phi(x,y)][\phi_N]^{-1}$

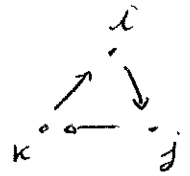
Con $N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2A$ A: area triangolo



$a_i = x_j y_k - x_k y_j$

$b_i = y_j - y_k$

$c_i = x_k - x_j$



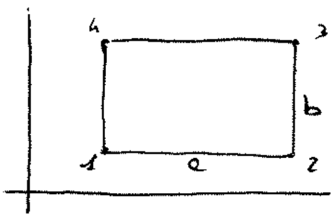
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Questo è un triangolo a deformazione costante (Constant Strain Triangle)

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K] = [B]^T [D] [B] \Rightarrow [K_{ij}] = [B_i]^T [D] [B_j]\, t A = [\text{cost}]$$

<u>elemento a 4 NODI</u>



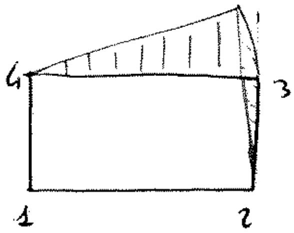
$N = 4$ $g = 2$ $h = 3$

$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$

$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$

Mettiamo xy per l'isotropia dell'elemento

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$



$$\{\varepsilon\} = [\partial][N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} y-b & 0 & -(y-b) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & (x-a) & 0 & -x & 0 & x & 0 & -(x-a) \\ x-a & y-b & -x & -(y-b) & x & y & -(x-a) & +y \end{bmatrix}$$

1ª riga di B non è costante, ma ha un andamento lineare con y

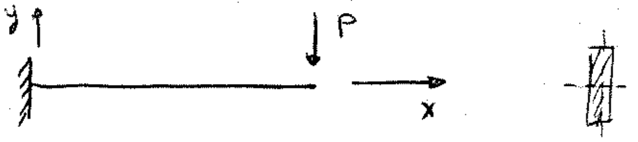
2ª riga di B è lineare con x

3ª riga di B dipende sia da x che da y.

$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ di solito le tensioni sono lineari sia in x che in y

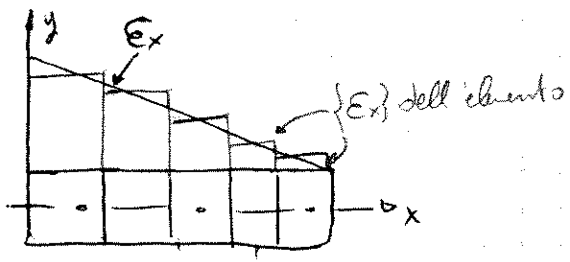
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

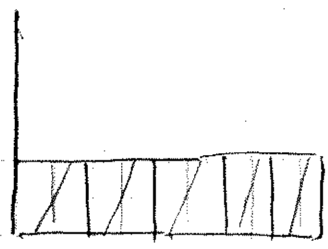
<u>Confronto tra elementi a 3 o 4 nodi</u>



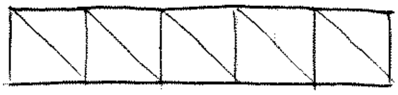
con 4 nodi

5 elementi
12 nodi
24 g.d.l.



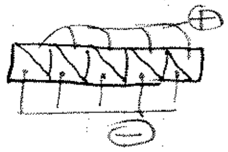


ε_x è costante in x e lineare in y con 3 nodi



10 elementi
12 nodi
24 gdl

Ex



Si hanno zone di trazione dove sicuramente si ha compressione e viceversa.

Quindi l'elemento triangolare non è da adoperare!!! Più i gradienti sono rapidi meno l'elemento triangolare è adatto

Requisiti degli elementi finiti:

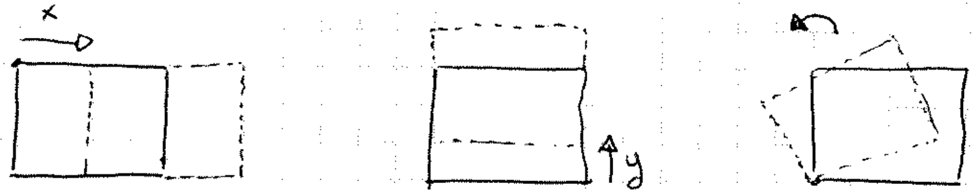
$$\{f(x,y,z)\} = [N(x,y,z)] \{f_N\}$$

Esistono ~~quindi~~ degli errori dovuti sulla formula scritta perché non è per nulla detto che [N] sia polinomiale

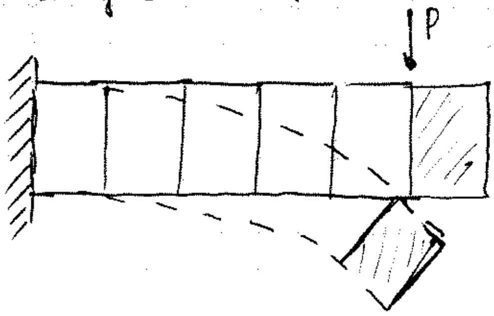
Le condizioni per la convergenza del modello degli elementi finiti:
- Completezza.
- Compatibilità.

Completezza: 1) Moti rigidi dell'elemento.
2) Descrivere moti di deformazione costante.

(1)

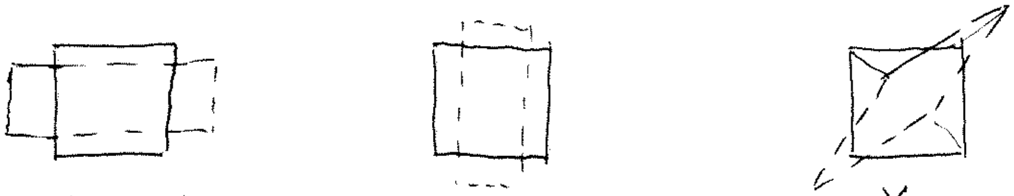


esempio trave:



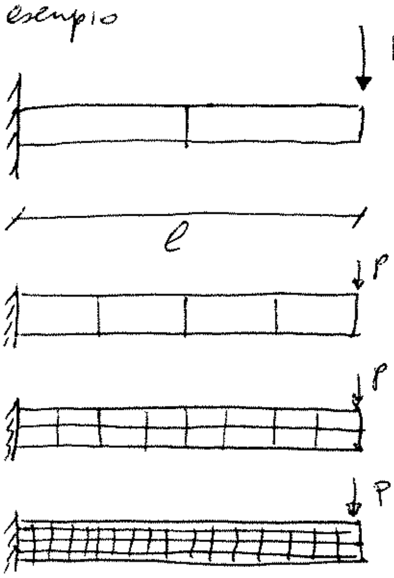
la parte di pannello a dx del carico presenta moto rigido, ma non a deformazione perché non ci sono carichi su di esso.

②



$\varepsilon_x = \text{cost}$ $\varepsilon_y = \text{costante}$ $\gamma_{xy} = \text{costante}$

esempio



		Freccia
	2 elementi	f_1
	4 elementi	f_2
	16 elementi	f_3
	N elementi	f_{conv}

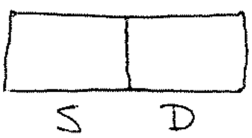
Ci attendiamo che nell'ultimo caso il generico elementino la deformazione sia costante

<u>Compatibilità</u>: 1) continuità sull'elemento

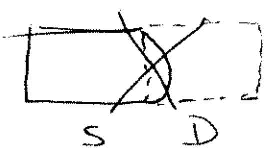
2) continuità sugli elementi adiacenti

1) Continuità dell'elemento sull'elemento: [N] è polinomiale, quindi è per forza continua!!

2)

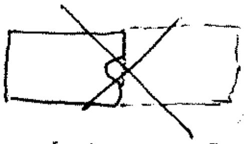


Sull'interfaccia, a deformazione avvenuta, non si deve avere né compenetrazione né distacco.



NO

compenetrazione



NO!

distacco (gap)

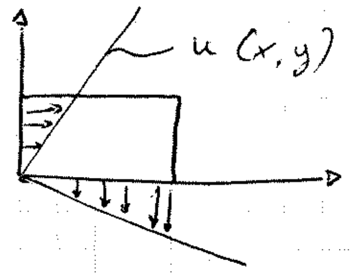
Verifica di completezza e compatibilità

Completezza

1)
$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$
$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

α_5, α_1 : descrive moto rigido in asse x (α_1) e y (α_5)

α_3, α_6 : moto rigido di rotazione



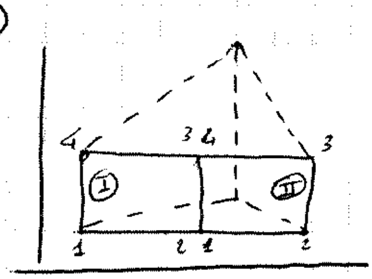
2) stati di def. costante

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_7 + \alpha_8 x$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y$$

Compatibilità

1) sull'elemento: sì perché polinomiali

2)



L'andamento sul lato in comune dell'elemento deve essere lo stesso.

$u_{3_I} = u_{4_{II}}$, $v_{3_I} = v_{4_{II}}$

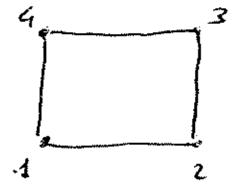
$u_{2_I} = u_{1_{II}}$ $v_{2_I} = v_{1_{II}}$

Sul lato comune $(x = k)$

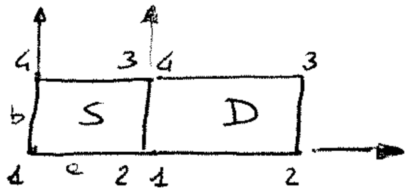
$$\left.\begin{aligned} u(k,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 k + \alpha_3 y + \alpha_4 k y \\ v(k,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 k + \alpha_7 y + \alpha_8 k y \end{aligned}\right\} \text{ andamento lineare}$$

Poiché noi imponiamo che gli spostamenti nei nodi siano gli stessi e per 2 punti passa una sola retta siamo tranquilli che non ci siano né gap né compenetrazioni.

Altro metodo di verifica



$$N_1 = \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$N_2 = \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$N_3 = \frac{xy}{ab} \qquad N_4 = \frac{y}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$



elemento di sinistra $(x=a)$

$$N_1(a)=0 \qquad N_4(a)=0$$
$$u(S) = N_2(a)\,u_2 + N_3(a)\cdot u_3 =$$
$$= \left(1-\frac{y}{b}\right)u_2 + \frac{y}{b}u_3$$

elemento di destra $(x=0)$

$$N_2(0)=0 \quad , \quad N_3(0)=0$$
$$u(D) = N_1(0)\,u_1 + N_4(0)\,u_4 = \left(1-\frac{y}{b}\right)u_1 + \frac{y}{b}u_4$$

Condizione:

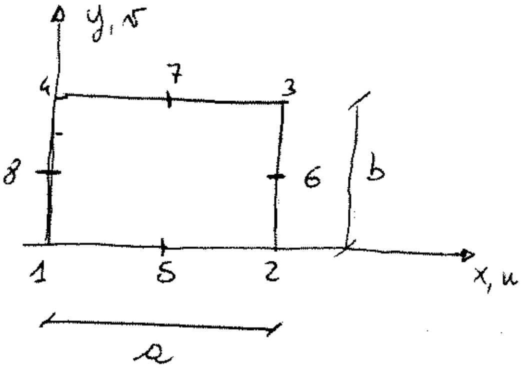
$$\begin{cases} u_1(D) = u_2(S) \\ u_4(D) = u_3(S) \end{cases} \Rightarrow \quad u(S) = u(D)$$

ELEMENTI di ORDINE SUPERIORE

h-convergenza: si aumentano il numero degli elementi fino a quando non si ha convergenza

p-convergenza: scelgo il numero minimo di elementi e poi faccio crescere il numero di gradi delle funzioni di forma (N). Cioè aumento il numero di nodi dell'elemento.

elemento molto usato: elemento piano a 8 nodi



$g = 2$

$N = 8$

$h = 3$

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 x y^2$$

$$v(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} x^2 + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} y^2 x$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{e}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 - 2\frac{x}{e} - 2\frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \frac{x}{e}\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(-1 + 2\frac{x}{e} + 2\frac{y}{b}\right)$$

$$N_3 = \frac{x}{e}\frac{y}{b}\left(-3 + 2\frac{x}{e} + 2\frac{y}{b}\right)$$

$$N_4 = \frac{y}{b}\left(1 - \frac{x}{e}\right)\left(-1 - 2\frac{x}{e} + 2\frac{y}{b}\right)$$

N_5

N_6

N_7

N_8

Verifichiamo la completezza

Moti rigidi

α_1 traslazione lungo x

α_9 " " " " y

$\alpha_3 = -\alpha_{10}$ rotazione rigida in xy

Deformazioni

ε_x

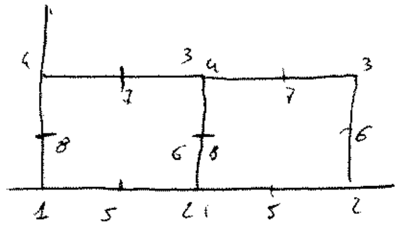
ε_y

γ_{xy}

Compatibilità dell'elemento

continuità sull'elemento   certamente verifica

continuità tra ~~più~~ due elementi



Scelta alternativa per l'elemento a 8 nodi (x^3, y^3)

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha x y + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3$$

isotropia geometrica garantita, ma elemento incompatibile.

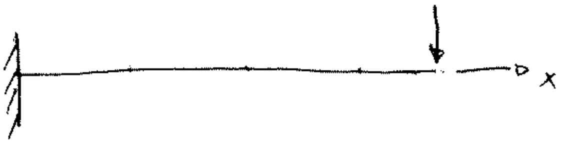
Infatti nella continuità tra elementi si ottiene equazione cubica invece di parabolica. Potendo fissare solo 3 punti della cubica si possono avere penetrazioni o gap.

l'elemento diventa incompatibile.

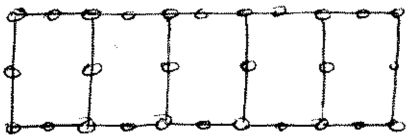
Note: le sollecitazioni di taglio (cioè dovute a F_1, F_2, F_3) sono Trascurabili rispetto a quelle prodotte dalle Tensioni.

$$\left(\tau_{I,MAX} = \frac{3}{2} \frac{F_I}{bh} \right) \left(\tau_{2S} = \frac{3}{2} \frac{F_{2F}}{bh}, \dots \right)$$

Confronto tra elementi a 4 e 8 nodi



modello a 8 nodi

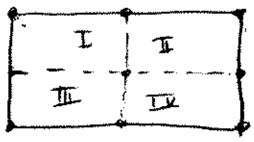


5 elementi.

28 nodi

56 gdl.

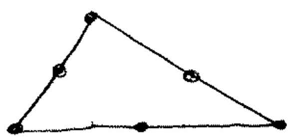
Per l'elemento a 8 nodi ε_x è lineare in x e quadratico in y. Con i 4 nodi non si riesce a riprodurre la soluzione tipo trave, mentre l'8 nodi la include!!



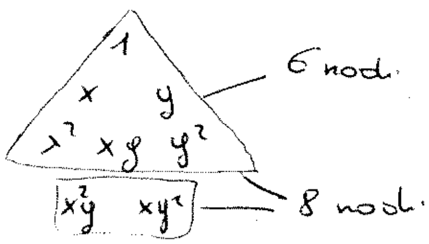
Se uso 4 elementi a 4 nodi invece di uno da 8 in termini di calcolo l'8 nodi fornisce informazioni maggiori di 4 elementi a 4 nodi.

Nella pratica vengono usati maggiormente gli elementi di formulazione quadratica:

Elemento a 6 nodi



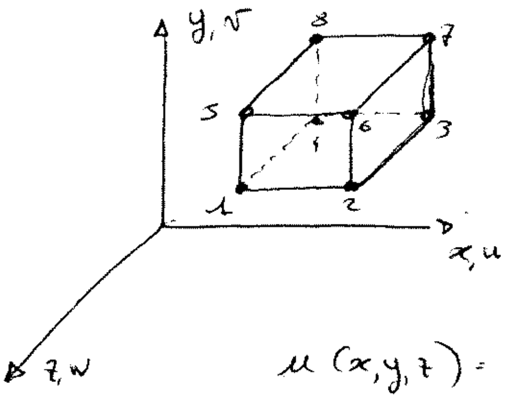
$g = 2$
$N = 6$



L'elemento a 6 nodi è sottocaso dell'8 nodi.

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2$$
$$v(x,y) = \alpha_7 + \dots \qquad + \alpha_{12} y^2$$

<u>Elementi solidi (3D)</u>



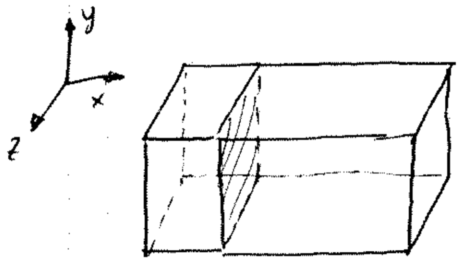
$$\left.\begin{array}{l} g = 3 \\ N = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 24 \text{ coefficienti}$$

$h = 6$

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 xz + \alpha_8 xyz$$
$$v(x,y,z) = \alpha_9 + \dots \qquad + \alpha_{16} xyz$$
$$w(x,y,z) = \alpha_{17} + \dots \qquad + \alpha_{24} xyz$$

Perchè non saturo i termini quadratici ?? Perchè devo avere isotropia

Perchè uso i termini misti? Perchè se usassi x^2, y^2, z^2 scoprirei che l'elemento non è compatibile.



$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xyz$$

Per $x = 0$

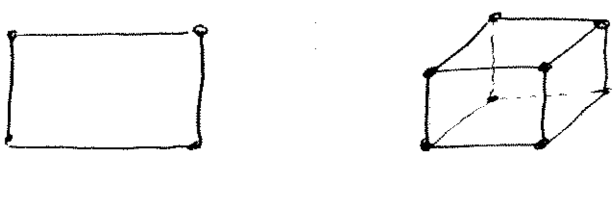
$$= A + By + Cz + Dy^2 + Ez^2 + Fyz$$

$u(x,y,z)$ dipende da 6 costanti, ma ci sono solo 4 condizioni al contorno. Cioè l'elemento non è compatibile.

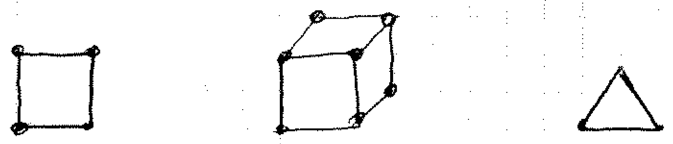
Con le altre scelte

$$u(x,y,z) = A + By + Cz + Dyz$$

Nota: abbiamo sempre rappresentato gli elementi nella forma standard

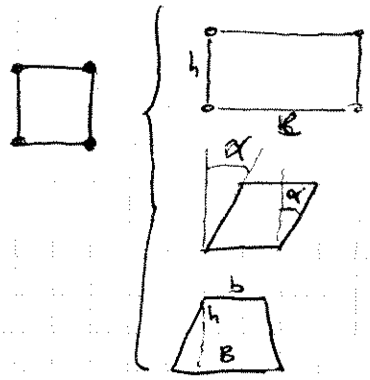


Le forme che ci consentono di avere meno errori sono



quadrato cubo triangolo equilatero

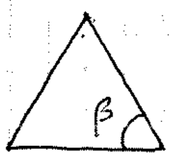
Si è studiato le
Distorsioni della forma ottima



Ci sono limiti alle distorsioni:

- $l/h \leq 2$ se vicino alle ~~tensioni~~ regioni in cui ci interessano le tensioni (zone critiche)
- $\frac{l}{h} \leq 10$ se lontano dalle regioni di interesse
- $\frac{B}{b}$ nelle zone critiche $\lesssim 4$
- $\frac{B}{b} \leq 10$ nelle zone non critiche

- $\alpha \leq 45°$



$\beta \geqslant 15°$