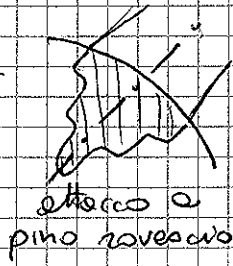
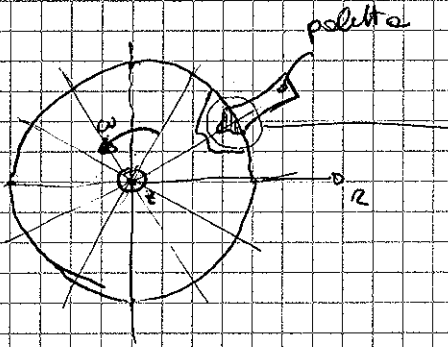
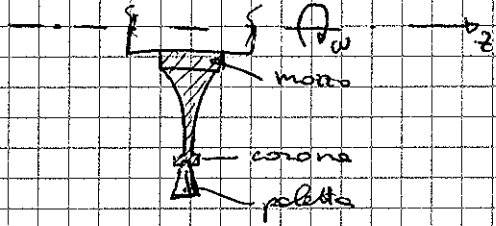


# I DISCHI



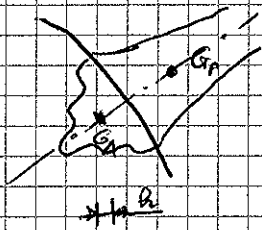
Il disco è formato da  
N palette

Le palette e l'attacco sono sregolate & non sono simmetriche



Ogni paletta genera una forza centrifuga che genera una distribuzione non assial simmetrica.

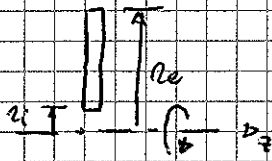
Sappiamo che le palette e l'attacco con una parte di superficie sull' bordo del disco. Noi conosciamo il baricentro dell'attacco ( $G_A$ ) e delle palette ( $G_P$ ). Noi conosciamo quindi  $R_{GA}$  e  $R_{GP}$  sono molte note & note.



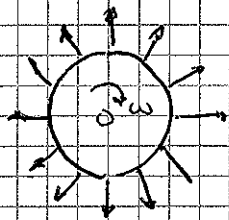
$$P_c = (m_A R_{GA} + m_P R_{GP}) \omega^2$$

$$T_{ce} = \frac{N P_c}{2\pi R_2 h_0}$$

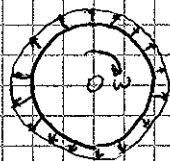
h è lo spessore del disco (ipotizzando che il disco abbia spessore costante).



Abbiamo telefonato

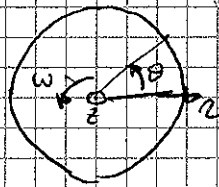
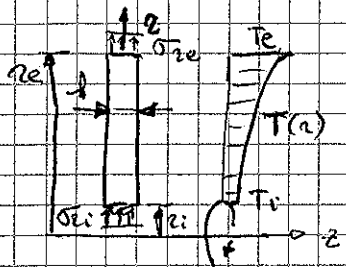


in



# DISCHI ROTANTI

Sistema di coordinate cilindrico  $(r, \theta, z)$



Condizioni di carico:

- 1) Forze di superficie:  $\sigma_{ri}$  (legato alla pressione di foramento  $p_i$  che esercita l'albero sul disco),  $\sigma_{re}$  (tiro centrifugo delle palette)
- 2) forze corrispondenti alle velocità  $\omega$
- 3) gradiente radiale di temperatura.

Per noi il disco è:

- in stato di tensione piana
- assialsimmetrico  $\rightarrow$  torsionless (senza torsioni)
- $\rightarrow$  torsion-like

Possiamo dire che sulle facce che delimitano il disco mi aspetto che

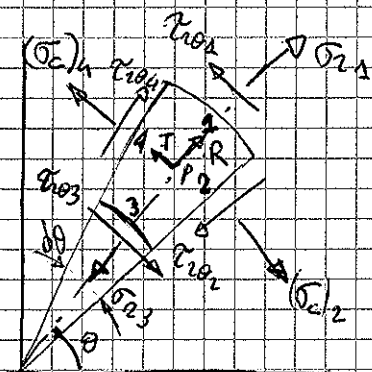
$$\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$$

lo stato di tensione piana si esprime con  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$

- $(r, \theta, z)$
- $(r, \nu, w)$  spostamenti
- $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$
- $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{r\theta})$  definizione 3D in coordinate cilindriche
- o sta per unconfondibile

- $(r, \theta)$
- $(u, v, w)$
- $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$
- $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta})$  con  $\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta)$

INDIZI



Equazioni di equilibrio radiale:

$$\sigma_{r1} r_1 d\theta - \sigma_{r2} r_2 d\theta - \sigma_\theta (r_1 - r_2) \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta (r_1 - r_2) \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{\theta r1} (r_1 - r_2) \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{\theta r2} (r_2 - r_1) \cos \frac{d\theta}{2} + R r_2 d\theta \sin \theta = 0$$

$$R = \overline{\sigma_r}$$

$$\frac{(\sigma_r r)_1 - (\sigma_r r)_3}{dr} - \frac{1}{r} [(\sigma_\theta)_1 + (\sigma_\theta)_3] + \frac{(\tau_{r\theta})_1 - (\tau_{r\theta})_3}{d\theta} + Rr = 0 \quad dV \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + Rr = 0 \quad \text{dividendo per } r$$

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + R = 0}$$

Equilibrio circonferenziale

$$\tau_{r\theta 1} r_1 d\theta - \tau_{r\theta 3} r_3 d\theta + (\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}) \cos \frac{d\theta}{2} dr + (\tau_{r\theta 1} + \tau_{r\theta 2}) \sin \frac{d\theta}{2} dr + T r d\theta dr = 0$$

$$\frac{(\tau_{r\theta} r)_1 - (\tau_{r\theta} r)_3}{d\theta} + \frac{\sigma_{\theta 1} - \sigma_{\theta 2}}{d\theta} + \frac{1}{r} (\tau_{r\theta 1} + \tau_{r\theta 2}) + T r = 0$$

$$dV \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial(\tau_{r\theta} r)}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} + T r = 0$$

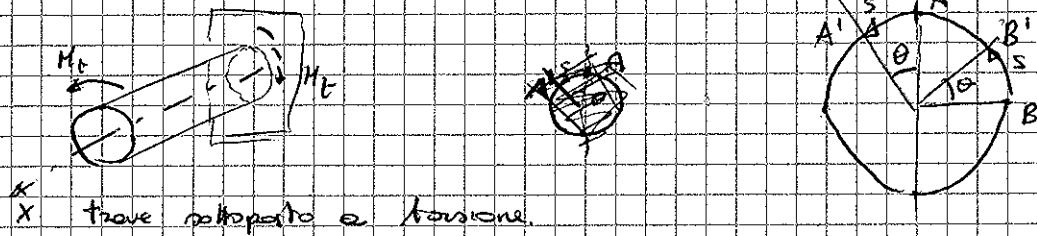
$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + T = 0}$$

NB: 1) notare la corrispondenza con le equazioni'

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

2) notare la generalità delle tensioni in coordinate polari

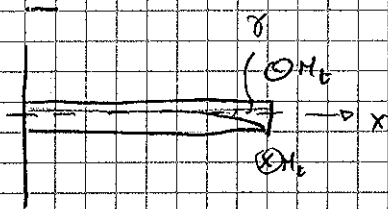
ipotesi di assiale simmetria



Ricordiamo che l'andamento delle  $\tau$  è lineare

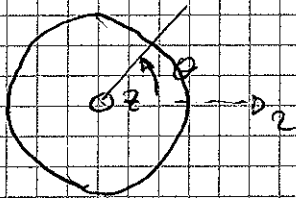


Se prendiamo un altro elemento di  $\tau$  relativo ad un altro raggio si nota che si ha assiale simmetria in presenza di torsione infatti si può notare che  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$



Tuttavia a noi non interessa che il disco sia interessato da torsione. Noi consideriamo il disco senza fenomeni di torsione, cioè consideriamo un'assiale simmetria senza torsione.

Questo implica che per noi non esistono spostamenti circonferenziali.



$N=0$

Se  $N=0$  allora anche  $\tau_{rc}=0$ . Questo implica che  $\tau_{rc}=0$

Ne segue che in TORSIONLESS ( $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$ )  
assiale simmetria

- (2) Problema 1D geometricamente
- $(\sigma_r, \sigma_\theta)$
- $(\sigma_r, \sigma_c)$  fisicamente il problema è 2D
- $(E_r, E_c, E_z)$

Per l'ipotesi di assiale simmetria  $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} = 0$

Ora dobbiamo imporre l'effetto dell'elemento di spessore. cioè  $\tau_{rz} = 0$  e  $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0$  di conseguenza

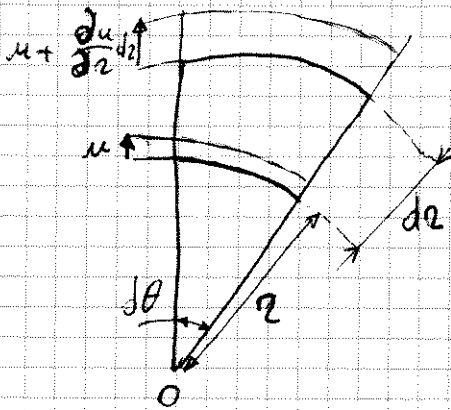
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_c}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + R = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\rho \dot{w} r = 0 \Rightarrow \dot{w} = 0 \Rightarrow w = \text{costante}$$

Questo significa che non studiamo i transienti.

Poiché siamo in plane stress l'equazione di compatibilità è solo una -



$$\epsilon_r = \frac{r + \frac{\partial u}{\partial r} dr - r}{dr} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial r} - \epsilon_r}$$

Lo spostamento radiale porta ad una deformazione circonferenziale.

$$\epsilon_c = \frac{(r+u)d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \boxed{\frac{u}{r} - \epsilon_c}$$

l'equazione di compatibilità risulta essere

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{d}{dr} (r \epsilon_c)}$$

Scriviamo le leggi di Hooke

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_c) + \alpha T$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r) + \alpha T$$

gradiente di temperatura è causa di deformazione

Da cui otteniamo

$$\boxed{(1+\nu)(\sigma_r - \sigma_c) + r \frac{d\sigma_c}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} + \alpha E r \frac{dT}{dr}}$$

$\sigma_c = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2$  e sostituisco nell'equazione di compatibilità e trova l'equazione di governo:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{2} \frac{d\sigma_r}{dr} + (3+\nu) \rho \omega^2 r + \frac{\alpha \epsilon}{2} \frac{dT}{dr} = 0$$

sostituisco  $X = \frac{r}{r_e}$ ,  $\frac{d}{dr} = \frac{1}{r_e} \frac{d}{dX}$

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dX^2} + \frac{3}{X} \frac{d\sigma_r}{dX} + \rho^* \omega^2 r_e^2 (3+\nu) + \frac{\alpha \epsilon}{X} \frac{dT}{dX} = 0$$

Per risolvere il problema è necessario scomporre il problema in 3 casi:

- disco fuso e freddo (no gradiente di T) Me con  $\sigma_r$  ai bordi.
- disco che ruota ma  $\sigma_r = 0$  al bordo interno ed al bordo esterno.
- solo gradiente di T. ( $\sigma_r = 0$  ai bordi e  $\omega = 0$ )

La soluzione è la somma dei tre casi.

Caso a:  $\frac{d^2 \sigma_r}{dX^2} + \frac{3}{X} \frac{d\sigma_r}{dX} = 0$

soluzione:  $y = \frac{d\sigma_r}{dX}$   $y = C X^{-3} \Rightarrow$

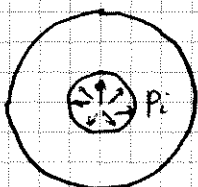
$$\Rightarrow \sigma_r(X) = C - \frac{1}{2} X^{-2} + A \Rightarrow \boxed{\sigma_r(X) = A - \frac{B}{X^2}}$$

$$\sigma_c(X) = \sigma_c(\sigma_r(X)) = A + \frac{B}{X^2}$$

Note  $\sigma_r$  e  $\sigma_c$  con la legge di Hooke trova le deformazioni. Dalle deformazioni nuovo  $u = \epsilon_c \cdot r = r_e X \epsilon_c$

$$u(X) = \frac{r_e X}{E} \left[ A(1-\nu) + \frac{B}{X^2} (1+\nu^2) \right]$$

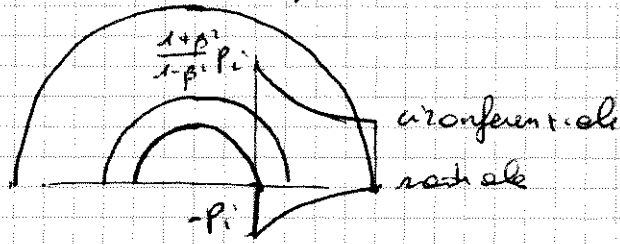
Se il disco è forato e abitato su un albero



A  $X=1$   $\sigma_r = 0$

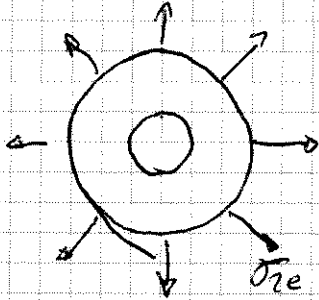
m  $X=\beta$   $\sigma_r = -p_i \Rightarrow A - \frac{B}{X^2} = -p_i$

$$m \quad X=1 \quad A - \frac{B}{X^2} = 0 \Rightarrow A = B = \frac{\beta^2}{1-\beta} P_i$$



La max tensione circonferenziale si ha al mezzo

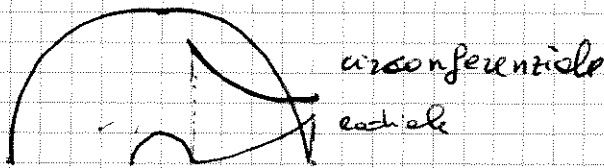
Alcun caso solo con forze di superficie al raggio esterno



$$X = \beta \quad \sigma_r = 0 \quad A = \frac{B}{\beta^2}$$

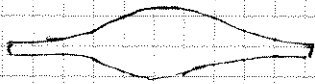
$$X = 1 \quad \sigma_r = \sigma_{2e} \quad A - B = \sigma_{2e}$$

$$A = \frac{\sigma_{2e}}{1-\beta^2}; \quad B = \sigma_{2e} \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

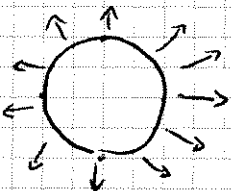


Osservazione:

Sezione disco <sup>gola</sup>: la sezione segue una legge gaussiana di resistenza ma ~~non~~ uniforme resistenza. Cioè  $\sigma_r = \sigma_c = \text{cost.}$



Disco pieno con  $\sigma$  esterna



$$\left. \begin{array}{l} X=1 \quad \sigma_{2e} = A - B \\ X=0 \Rightarrow B=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \sigma_{2e}$$



## b) Campi centrifughi

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d\sigma_r}{dx} \rightarrow \underbrace{\rho \omega^2 r e^t (3+\nu)}_{\text{forante}} = 0$$

Le soluzioni saranno: sol omogenea + sol particolare.

La soluzione particolare sarà  $\sigma_r(x) = Cx^2$

$$2C + 6C + \rho \omega^2 r e^t (3+\nu) = 0$$

$$C = - \underbrace{\rho \omega^2 r e^t}_{\sigma_0} \frac{3+\nu}{8}$$

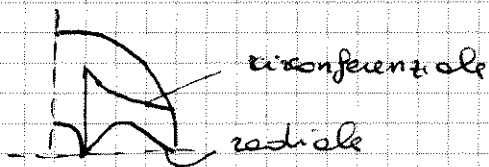
Soluzione generale:

$$\sigma_r(x) = A - \frac{B}{x^2} - \sigma_0 \frac{3+\nu}{8}$$

Da questo si possono ricavare  $\sigma_c$  e  $u$ .

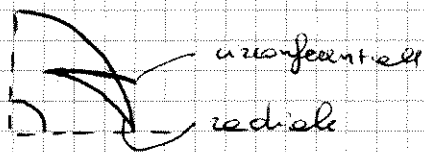
## c) Disco forato

$$\begin{aligned} X = \beta \Rightarrow \sigma_r = 0 &\Rightarrow A = \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} (1 + \beta^2) \\ X = 1 \Rightarrow \sigma_r = 0 &\Rightarrow B = \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2 \end{aligned}$$



## Disco pieno

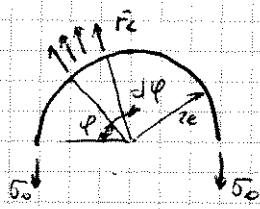
$$\begin{aligned} B = 0 \\ X = 1 \Rightarrow A = \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \end{aligned}$$



## Parametro $\sigma_0$

Tensione meccanica che si produce in un anello istante di raggio  $R_e$ .





$$dF_c = dm \omega^2 r_e \quad dm = \rho A r_e d\varphi$$

Equilibrio dell'anello  $\int dF_c \sin \varphi = 2\sigma_0 A$

$$\int_0^{\pi}$$

### c) Gradiente di temperatura

$$\frac{d^2 \sigma_z}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d\sigma_z}{dx} + \frac{\alpha E}{x} \frac{dT}{dx} = 0$$

$$T(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

$$\frac{1}{x} \frac{dT}{dx} = \sum_{i=1}^n i b_i x^{i-2}$$

Soluzione è soluzione dell'omogenea + soluzione particolare.

$$\frac{d^2 \sigma_z}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d\sigma_z}{dx} + \alpha E \sum_{i=1}^n i b_i x^{i-2} = 0$$

Integrali particolari

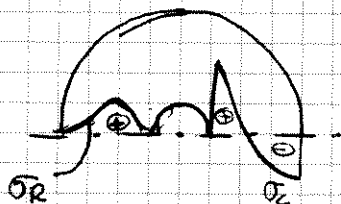
$$\sigma_z(x) = C_i x^i$$

$$i(i-1)C_i x^{i-2} + \frac{1}{x} i C_i x^{i-1} + \alpha E i b_i x^{i-2} = 0$$

$$C_i = - \frac{\alpha E b_i}{i+2}$$

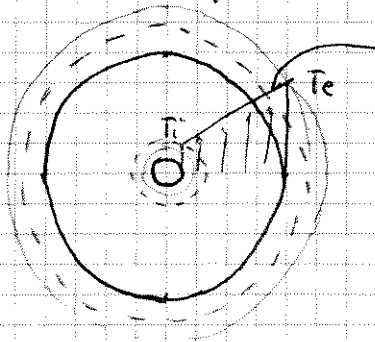
Nota:  $T = \text{costante}$  non produce tensione.

Se disco forato



$\sigma_z$ : parte da tensione all'interno po. diventa di compressione all'esterno.  
Tipico del gradiente termico

discorso qualitativo sul segno di  $\sigma_r$ .



$$T(X) = b_0 + b_1 X$$

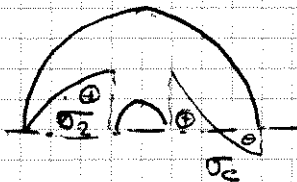
Una fibra interna sottosta  $T_i > T_{amb}$  tende ad espandersi.

Se fosse sola si espanderebbe in una posizione  $r > r_0$ .

Una fibra esterna sottosta  $T_e > T_{amb}$  tende anch'essa ad espandersi. Se fosse sola si espanderebbe in una posizione  $r_{est} > r_0$ .

Ma le fibre non sono indipendenti l'una dall'altra. La fibra interna viene così costretta ad espandersi un po' di più di quanto avrebbe dovuto (perché quella successiva sono + calde). Invece la fibra esterna si espande di meno perché le fibre più interne sono meno calde e le trattengono.

### disco pieno



$$B = 0$$

$$A = \frac{\alpha E b_1}{i+2}$$

Se devo risolvere un esercizio non faccio la sovrapposizione degli effetti, ma uso la soluzione generale.

$$\sigma_r = A - \frac{B}{X^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} X^2 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n X^n; \quad C_n = -\frac{\alpha E b_n}{i+2}$$

Supponiamo di avere un disco rotante collegato su un albero sotto l'azione di temperatura.

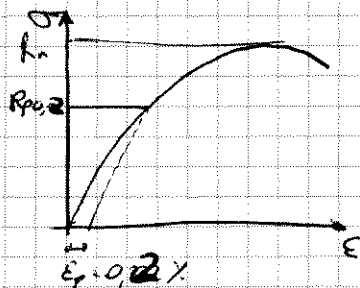
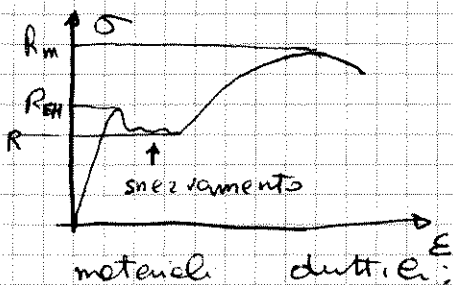
Predo soluzione generale e impiego le condizioni al contorno usuali

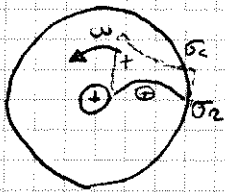
$$\sigma_r(\beta) = -p_i; \quad \sigma_r(1) = 0$$

e ottengo  $A = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} (1+\beta^2)$

$$B = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2$$

### VELOCITA' di inizio PLASTICIZZAZIONE





Disco bruto puramente rotante. Quando il disco inizia a deformarsi plasticamente?

$$\sigma_c = \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \left( 1 + \beta^2 + \frac{\beta^2}{X^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} X^2 \right)$$

Consideriamo un materiale elasto-plastico ideale



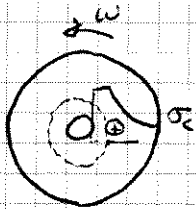
$$R_s = \frac{R_{sm} + R_m}{2} \quad \text{carico di snervamento}$$

La condizione per l'essiccazione è  $\sigma_c(\beta) = R_s$

$$\rho \omega^2 r^2 X \frac{3+\nu}{8} \left( 1 + \beta^2 + \frac{\beta^2}{X^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} X^2 \right) \Big|_{X=\beta} = R_s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4R_s}{\rho R_e^2 [3+\nu + \beta^2(1-\nu)]}}$$

Per trovare la velocità di collasso plastico, ci si pone ad una  $\omega > \omega_{ip}$  e si dice che il disco è diviso in 2 parti una plastica ed una elastica. Il raggio  $R_p$  è il raggio che divide le due zone.



$$\text{Definiamo } X_p = \frac{R_p}{R_e}$$

$\sigma_c = R_s$  e  $\sigma_r$  si ricava dalla equazione di equilibrio radiale

$$\sigma_r(\beta) = 0 \quad \text{in zona plastica}$$

$$\sigma_r(X_p) = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_r(1) = 0 \quad \sigma_c(X_p) = R_s \quad \text{in disco elastico}$$

Da queste equazioni si ottiene

$$\omega(X_p) = \sqrt{\frac{R_s}{\rho R_e^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{(X_p - \beta)(1 + X_p^2)}{X_p(1 - X_p^2)}}{\frac{3+\nu}{4} \left( 1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} X_p^2 \right) + \frac{(X_p^2 - \beta^2)(1 + X_p^2)}{3X_p(1 - X_p^2)}}}}$$

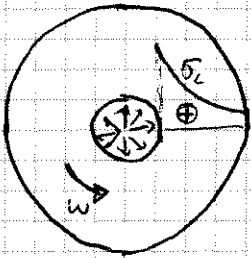
Se  $X_p = \beta$

$$\omega(\beta) = \sqrt{\frac{R_s}{\rho R_e^2} \sqrt{\frac{4}{3+\nu + (1-\nu)\beta^2}}}$$

Per  $\chi_p = 1$  allora

$$\omega_{cp} = \omega(\chi_p = 1) = \sqrt{\frac{R_s}{\rho r e^2}} \sqrt{\frac{3}{1 + \beta + \beta^2}}$$

collegato su un albero,  
Disco che plastifica e ruota



$\sigma_c$  è dovuta alle rot.  $\omega$  + pressione perché disco collegato su un albero.

$$\sigma_r(\beta) > 0 \quad \sigma_c(\beta) < 0 \quad \sigma_z = 0$$

$$\sigma_{id}(\beta) = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{secondo Tresca}$$

tensione ideale

$$\sigma_{id}(\beta) = \sigma_c(\beta) - \sigma_r(\beta)$$

condizioni  $\beta$  cont:

$$\sigma_r(\beta) = -p_i \quad \sigma_c(1) = 0$$

$$\sigma_c(x) = A - \frac{B}{x^2} - \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} x^2$$

$$A = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} (1+\beta^2)$$

$$B = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \sigma_0 \frac{3+\nu}{8} \beta^2$$

Sono note quindi  $\sigma_r(x)$  e  $\sigma_c(x)$  in part.  $\omega$  e  $\beta$

$$\sigma_r(\beta) = -p_i$$

$$\sigma_c(\beta) = p_i \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{\sigma_0}{4} [3+\nu + \beta^2(1-\nu)]$$

$$\sigma_{id}(\beta) = \sigma_c(\beta) - \sigma_r(\beta)$$

$$\sigma_{id}(\beta) = R_s$$

$$\omega_{ip} = \sqrt{\frac{4(R_s - \frac{p_i r}{1-\beta^2})}{\rho r e^2 [3+\nu + \beta^2(1-\nu)]}}$$