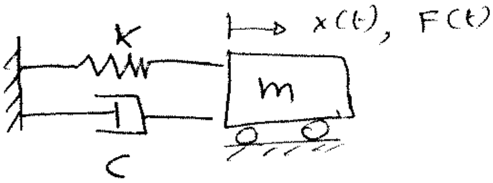
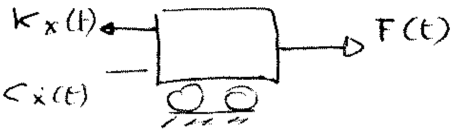
DINAMICA



$$m\ddot{x}(t)=\sum_i F_i$$



$$m\ddot{x}(t)=F(t)-kx(t)-c\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)+c\dot{x}(t)=F(t)$$

Se $F(t)\neq 0$ oscillazioni forzate

Se $F(t)=0$: oscillazioni libere.

· Noi consideremo sistemi non smorzati

Per sistemi vibranti a n gdl in generale si scompone

$m \to [M]$
$c \to [C]$
$k \to [K]$

$[C]$ in $\alpha[M]+\beta[K]$ cioè si fa scomparire C e lo si incorpora in $[M]$ e $[K]$.

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$$

$$x(t)=Xe^{st} \Rightarrow (ms^2+k)X=0 \Rightarrow s=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,j$$

$$x(t)=X_1e^{j\sqrt{\frac{k}{m}}t}+X_2e^{-j\sqrt{\frac{k}{m}}t}=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)=$$

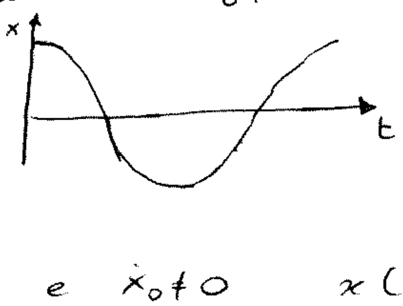
$$=C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)$$

La Pulsazione $\sqrt{\frac{k}{m}}$ è la pulsazione (o freq.) naturale del sistema e la indichiamo con λ_n

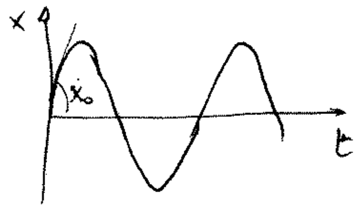
Condizioni iniziali:

$$x(0)=x_0=A$$
$$\dot{x}(0)=\dot{x}_0=B\lambda_n$$

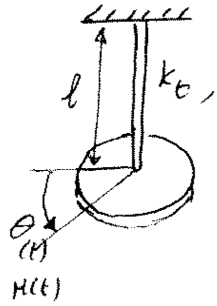
Casi particolari: - $x_0\neq 0$ e $\dot{x}_0=0$ $\quad x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$



- $x_0=0$ e $\dot{x}_0\neq 0$ $\quad x(t)=B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$



Oscillatore torsionale

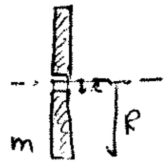


k_t, $[k_T] = \frac{Nm}{rad}$

$k_t = \frac{G J_p}{\ell}$

Si ha anche il momento d'inerzia di massa che sostituisce (m) dell'oscillatore armonico

$$I_p = m \frac{r^2 + R^2}{2}$$



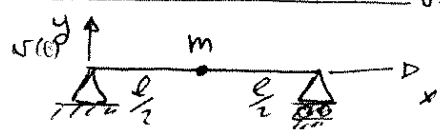
Oscill. armonico: $m \ddot{x}(t) + k x(t) = \begin{cases} F(t) \\ 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

Oscillatore torsionale $I_p \ddot{\theta}(t) + k_t \theta(t) = \begin{cases} M_t(t) & \text{oscill. forzate} \\ 0 & \text{oscillaz. libere} \end{cases}$

$\lambda_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_p}}$

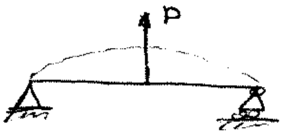
Oscillatore armonico flessionale



forzante (eventuale) $F(t)$ lungo asse y.

$y = v(t)$

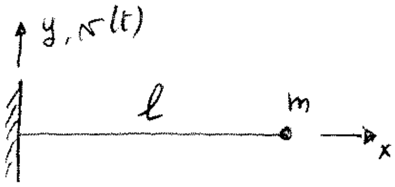
$m \ddot{y}(t) + k_f y(t) = \begin{cases} 0 \\ F(t) \end{cases}$ $\quad [k_f] = \frac{N}{m}$



$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{P \ell^3}{E J \cdot 48}$$

$$k_f = \frac{P}{v\left(\frac{\ell}{2}\right)} = \frac{E J \cdot 48}{\ell^3}$$

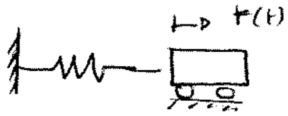
$$\lambda_n = \sqrt{\frac{k_f}{m}}$$



$m \cdot \ddot{y}(t) + k_f y(t) = \begin{cases} F(t) \\ 0 \end{cases}$

$v(\ell) = \frac{P \ell^3}{3 E J}$ $\quad k_f = \frac{P}{v(\ell)} = \frac{3 E J}{\ell^3}$

Oscillazioni forzate



$F(t) = \begin{cases} F_0 \cdot e^{j \lambda t} \\ F_0 \cdot \cos \lambda t \quad \leftarrow \lambda \text{ è nota!} \\ F_0 \cdot \sin \lambda t \end{cases}$

$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F_0(t)$

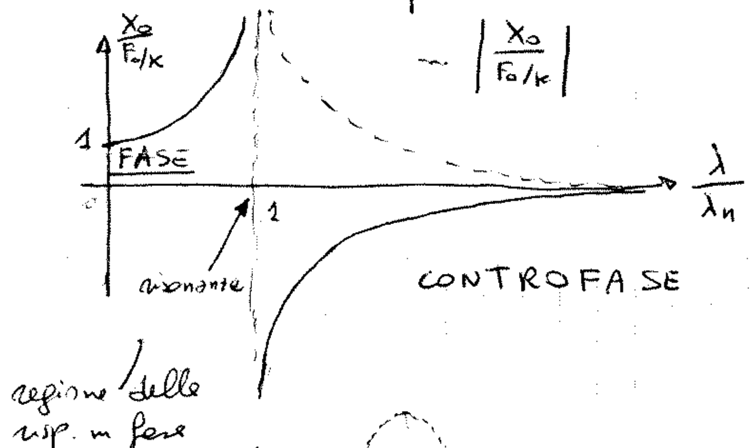
$x(t) =$ SOL. LIBERA $+$ INT. PARTICOLARE

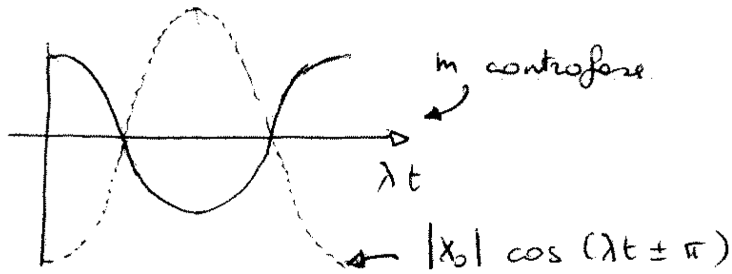
$$x(t) = \overbrace{A\cos(\lambda_n t) + B\sin(\lambda_n t)} + \overbrace{X_0\cos(\lambda t)}$$

La risposta libera è destinata ad estinguersi perché ~~e~~ nella realtà esiste lo smorzamento.

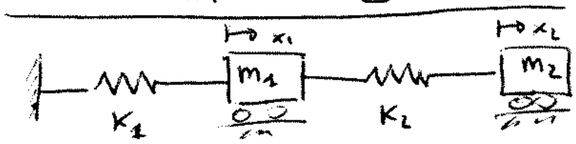
$$(-\lambda^2 m + k)X_0 = F_0 \qquad X_0 = \frac{F_0/k}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}$$

F_0/k è uno spostamento statico

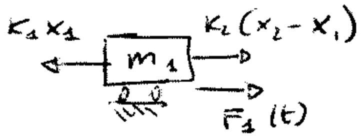




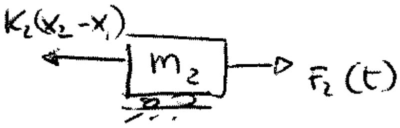
SISTEMA a 2 GDL



$x_2 > x_1 > 0$



$$m_1\ddot{x}_1 = F_1(t) + K_2(x_2 - x_1) - K_1(x_1) \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + K_1(x_1) + K_2(x_1 - x_2) = F_1(t)$$



$$m_2 \ddot{x}_2 = -K_2 (x_2 - x_1) + F_2(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_2 (-x_1 + x_2) = F_2(t)$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & +K_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ oppure } \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

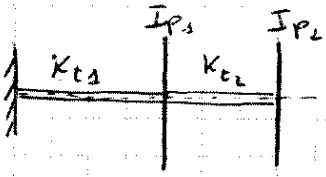
matrice delle masse è diagonale nell'approccio a param. concentrati (Lumped Approach)

Esistono due casi significativi:

1) 2 volani che oscillano ~~flessionalmente~~ torsionalmente

2) albero con due masse che oscillano flessionalmente

1)

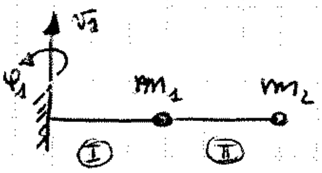


Per un albero $k_t = \dfrac{G\, J_p}{\ell}$ $\quad [K_t] = \dfrac{Nm}{rad}$

$I_p = m \dfrac{r^2 + R^2}{2}$ $\quad [I_p] = kg\,m^2$

$$\begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & I_{p_2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_{t_1}+K_{t_2} & -K_{t_2} \\ -K_{t_2} & K_{t_2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ oppure } \begin{Bmatrix} M_{t_1} \\ M_{t_2} \end{Bmatrix}$$

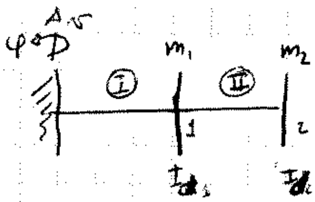
2)



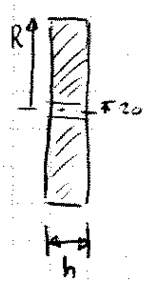
albero che oscilla flessionalmente

matrice delle masse $\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si hanno anche delle inerzie (sostituiamo alle masse dei dischi)



$$I_d = m \frac{r^2 + R^2 + \frac{h^2}{3}}{4}$$

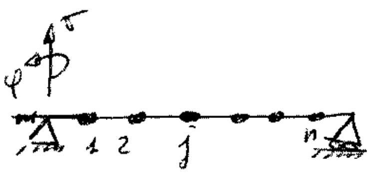


Noi consideriamo disco sottile $(h \ll r,\ h \ll R)$

$$I_p = 2 I_d$$

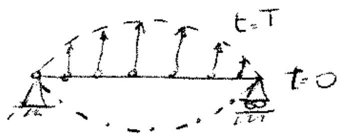
in questo caso $[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{J_2} \end{pmatrix}$

Sistema a N gradi di libertà



$$\overset{2n\times 2n}{[M]}\{\ddot{x}(t)\} + \overset{2n\times 2n}{[K]}\{x(t)\} =$$

oscillazioni libere bisogna cercare i moti sincroni



il moto avviene così:

$$\{x(t)\} = \{X\} f(t)$$

$x_j(t) = X_j\, f(t)$ con $f(t)$ non cambia con j.

$$[M]\{X\}\ddot{f}(t) + [K]\{X\} f(t) = 0$$

$$\sum_j (m_{ij} X_j)\ddot{f}(t) + \sum_j k_{ij} X_j\, f(t) = 0$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_j k_{ij} X_j}{\sum_j m_{ij} X_j} = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0$$

$f(t) = Fe^{st}$, $s^2 + \lambda = 0$

se $\lambda > 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{\lambda}$ $\quad f(t) = F_1 e^{j\sqrt{\lambda}t} + F_2 e^{-j\sqrt{\lambda}t} =$

$= A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,t) = C\cos(\sqrt{\lambda}t + \alpha)$

se $\lambda < 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{\lambda}$ $\quad f(t) = F_1 e^{\sqrt{|\lambda|}t} + F_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}t}$

$f(t) \to \infty$ per $t \to \infty$. Quindi $\lambda < 0$ non può verificarsi.

D'ora in poi λ lo chiameremo λ^2

λ è la frequenza propria.

$\lambda = +\sqrt{\lambda^2}$

$$\Big([K]-\lambda^2[M]\Big)\{X\}=\{0\}$$ Questo è un problema di autovalore.

autovalore (λ^2) — autovettore ($\{X\}$)

$$\det\Big([K]-\lambda^2[M]\Big)=0$$

equazione caratteristica sarà di grado n in λ^2

$$a\lambda^{2n}+b\lambda^{2(n-1)}+\dots+\text{cost}=0$$

esistono n radici, λ^2_K $K=1,\dots,n$

$\lambda_K=\sqrt{\lambda^2_K}$ frequenza propria corrispondente

$$\Big([K]-\lambda^2_K[M]\Big)\{X^{(K)}\}=\{0\}$$

$\{X^{(K)}\}$ sono le ampiezze relative alla frequenza λ_K

$$\{X^{(K)}\}=\begin{Bmatrix}X_1^{(K)}\\ \vdots\\ X_n^{(K)}\end{Bmatrix}=X_1\underbrace{\begin{Bmatrix}1\\ \frac{X_2^{(K)}}{X_1^{(K)}}\\ \vdots\\ \frac{X_n^{(K)}}{X_1^{(K)}}\end{Bmatrix}}$$

questo rapporto deve rimanere costante per la forma.

Quindi esistono n frequenze proprie $\lambda_K=+\sqrt{\lambda^2_K}$. Per ogni frequenza propria corrisponde $\{X^{(K)}\}$ determinato a meno di una costante arbitraria. $\{X^{(K)}\}$ si chiama forma modale o modo proprio di vibrare o modo naturale di vibrare.

$\{X^{(K)}\}$ ha le seguenti proprietà:

1) K e M ortogonalità

2) linearmente indipendenti

(1) $X^{(K)}$ non sono in genere ortogonali, ma sono K e M ortogonali.

$\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$

$$\begin{cases} [K]\{X^{(i)}\} = \lambda_i^2 [M] \{X^{(i)}\} \\ [K]\{X^{(j)}\} = \lambda_j^2 [M] \{X^{(j)}\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \{X_d^{(j)}\}^T [K] \{X^{(i)}\} = \lambda_i^2 \{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(i)}\} \quad * \\ \{X^{(i)}\}^T [K] \{X^{(j)}\}^T = \lambda_j^2 \{X^{(i)}\}^T [M] \{X^{(j)}\}^T \rightarrow \text{Trasposizione} \\ \{X_d^{(j)}\}^T [K]^* \{X^i\} = \lambda_j^2 \{X^{(j)}\}^T [M]^* \{X^i\} \quad ** \end{cases}$$

sottraiamo $*$ e $**$

$$0 = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \{X^{(j)}\}^T [M] \{X^i\} \quad \text{poiché } \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$$

$$\{X^{(j)}\}^T [M] \{X^i\} = 0 \Rightarrow M\text{-ortogonalità}$$

Di conseguenza si ha che

$$\{X^{(j)}\}^T [K] \{X^{(i)}\} = 0 \qquad K\text{-ortogonalità}$$

2) $$c_1 \{X^{(1)}\} + c_2 \{X^{(2)}\} + \dots + c_n \{X^{(n)}\} = 0$$

se e solo se $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Per dimostrare il linearmente indipendenti supponiamo che non sia vera ipotesi. $c_j \neq 0$, $\{X^{(j)}\}^T [M]$

$$c_1 \underbrace{\{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(1)}\}}_{=0} + \dots + c_j \{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(j)}\} + \dots + c_n \underbrace{\{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(n)}\}}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$c_j \{X^{(j)}\}^T [M] \{X^{(j)}\} = 0 \Rightarrow c_j = 0$$

Quindi $\{X^{(k)}\}$ è un insieme di ~~vettori~~ linearmente indipendenti

$$\{x(t)\} = \sum_{k=1}^{n} \{X^{(k)}\} f^{(k)}(t) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \{X^{(k)}\} C^{(k)} \cos(\lambda_k t + \alpha^{(k)})}$$

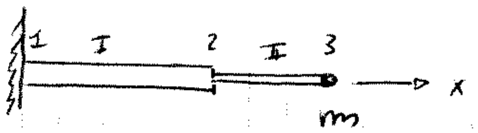
Nella realtà ci interessano gli n modi di vibrare e la frequenza.

Se ho smorzamento

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\}$$

$$\hookrightarrow \alpha[M] + \beta[K]$$

<u>Albero con massa</u>



$$\cancel{\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}} \; K_I \qquad K = \frac{EA}{l}$$

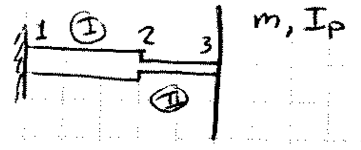
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_I + k_{II} & -k_{II} \\ -k_{II} & k_{II} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Struttura di [m] dipende dalla fisica del problema, ma anche del modello.
Il fatto che ci sia uno 0 implica che il sistema ha 1 sola frequenza propria.

Se l'albero ha massa $M_I = \rho A_I l_I$ e $M_{II} = \rho A_{II} l_{II}$.
La massa M_I si distribuisce a metà tra ~~$M/2$~~ i nodi 1 e 2.
Idem per la massa M_{II} che viene distribuita tra i nodi 2 e 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{M_I + M_{II}}{2} & 0 \\ 0 & m + \frac{M_{II}}{2} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{Bmatrix}$$

Se albero che oscilla torsionalmente



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

se vogliamo tenere conto dei tratti di albero I e II

$$I_{p_I} = M_I \frac{r^2 + R^2}{2} = \rho A_I l_I \frac{R_I^2}{2} = \rho l_I \pi \frac{D_I^2}{4} \cdot \frac{D_I^2}{8} = \boxed{\rho \frac{\pi}{32} D_I^4 l_I}$$

ricordiamo che $\frac{\pi D^4}{32} = J_p$ momento di area polare.

$$I_{p_I} = \rho \, J_{p_I} \, l_I \quad , \quad I_{p_{II}} = \rho \, J_{p_{II}} \, l_{II}$$

la matrice delle masse diventa

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{I_{p_I} + I_{p_{II}}}{2} & 0 \\ 0 & I_p + \frac{I_{p_{II}}}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Studio della risposta forzata</u>

x è grado di libertà generalizzato

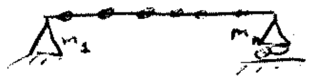
F(t) sono forze generalizzate (forze o momenti)

$$\{F(t)\} = \underbrace{\{F_0\}}_{\text{vettore di ampiezze}} \begin{cases} \cos \lambda t \\ \sin \lambda t \\ e^{+j\lambda t} \end{cases}$$

λ è nota

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{01} \\ \vdots \\ F_{0N} \end{Bmatrix}$$

il nostro sistema è il seguente



$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{F_0\} \cos \lambda t$$

$$\{x(t)\} = \underbrace{\cancel{\{x(t)\}_{libera}}}_{\text{si smorza e va a zero}} \oplus \{x(t)\}_{FORZATA}$$

$$\{x(t)\}_{FORZATA} = \{X_0\} \cos(\lambda t)$$ dobbiamo trovare $\{X_0\}$ ricordandoci che

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\lambda^2 \{X_0\} \cos(\lambda t)$$

Da cui sostituendo:

$$\overbrace{\left([k] - \underset{\text{NOTA}}{\lambda^2 [M]}\right)}^{[A]} \{X_0\} = \underset{\text{NOTA}}{\{F_0\}} \Rightarrow [A]\{X_0\} = \{F_0\}$$

$$\boxed{\{X_0\} = \left([K] - \lambda^2 [M]\right)^{-1} \{F_0\}}$$ Prima tecnica di soluzione (ma poco applicabile).

Possiamo usare un'altra tecnica che si chiama <u>ANALISI MODALE</u>

Non ragioniamo più su $\{x(t)\}$ ma facciamo una trasformazione di coordinate in modo da semplificare il problema.

$$\{x(t)\} = [\Psi]\underbrace{\{q(t)\}}_{\text{coordinate normali}}$$

$$[\Psi] = \left[\{x^{(1)}\} \ \{x^{(2)}\} \dots \ \{x^{(n)}\}\right] \quad \text{matrice modale}$$

Utilizzando questa ~~metodo~~ trasformazione otteniamo un sistema a n gradi di libertà disaccoppiati (sia matrici di rigidezza che di massa diagonalizzate)

$$\underbrace{[\Psi]^T [M][\Psi]}_{[\bar{M}]} \{\ddot{q}(t)\} + \underbrace{[\Psi]^T [K][\Psi]}_{[\bar{K}]}\{q(t)\} = \underbrace{[\Psi]^T \{F_0\}}_{\{\bar{F}_0\}} \cos \lambda t$$

con

$$[\Psi]^T = \begin{bmatrix} \{x^{(1)}\}^T \\ \{x^{(2)}\}^T \\ \vdots \\ \{x^{(n)}\}^T \end{bmatrix}$$

Otteniamo

$$[\bar{M}]\{\ddot{q}(t)\} + [\bar{K}]\{q(t)\} = [\Psi]^T \{F_0\} \cos \lambda t$$

$$\bar{M}_{ij} = \{x^{(i)}\}^T [M] \{x^{(j)}\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \{x^{(i)}\}^T [M] \{x^{(j)}\} & i = j \end{cases}$$

riga colonna

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \bar{M}_{ii} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{ij} = \{x^{(i)}\}^T [K] \{x^{(j)}\} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases} \qquad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \bar{K}_{ij} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_{ij}]\{\ddot{q}(t)\} + [\bar{K}]\{q(t)\} = \{\bar{F}_0\} \cos \lambda t$$

Si sono ottenuti n oscillatori indipendenti l'uno dall'altro.

il generico oscillatore armonico ha equazione

$$\overline{M}_{ii}\,\ddot{q}_i(t) + \overline{K}_{ii}\,q_i(t) = \overline{F}_{0i}\cos(\lambda t) \qquad \lambda_i^2 = \text{freq. naturale} = \frac{\overline{K}_{ii}}{\overline{M}_{ii}}$$

si ha che

$$q_i(t) = Q_{0_i}\cos\lambda t \qquad \text{con } Q_{0_i} = \frac{\overline{F}_{0i}/\overline{K}_{ii}}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2}$$

Ricordiamo che $\overline{F}_{0i}/\overline{K}_{ii}$ è X_i statico.

Ora dobbiamo tornare indietro:

$$\{z(t)\} = [\Psi]\{q(t)\}$$

Questa è la tecnica usata ~~dal~~ dei codici ad elementi finiti.

MATRICE DELLE MASSE CONSISTENTE

Passiamo dalla matrice delle masse diagonale alla matrice consistente.

Dobbiamo utilizzare il principio dei lavori virtuali.

$$\{f(x,y,z,t)\} = [N(x,y,z)]\{f_N(t)\}$$

$$\{\varepsilon(x,y,z,t)\} = [B(x,y,z)]\{f_N(t)\}$$

$$\{\sigma(x,y,z)\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\})$$

In statica avevamo associato $\delta\mathcal{L}_{ext}$ a $\{F_N\}$, $\{q\}$, mentre $\delta\mathcal{L}_{int}$ a $\{\sigma\}$.

In dinamica $\delta\mathcal{L}_{ext}$ sarà riferito $\{F_N(t)\}$ e $\{F_{inerzia}\}$ mentre $\delta\mathcal{L}_{int}$ sarà riferito a $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

$$\delta\mathcal{L}_{ext} = \{\delta f_N(t)\}^T\{F_N(t)\} - \int_V \{\delta f\}^T \underbrace{\rho\, dV}_{dm}\{\ddot{f}(t)\} =$$

$$= \{\delta f_N(t)\}^T\{F_N(t)\} - \{\delta f_N(t)\}^T \int_V \rho[N]^T[N]\,dV\,\{\ddot{f}_N(t)\}$$

$$\delta\mathcal{L}_{int} = -\int_V \{\delta\varepsilon(t)\}\{\sigma(t)\}\,dV = -\{f_N(t)\}^T\int_V [B]^T[D][B]\,dV\,\{f_N(t)\}$$

$\delta \mathcal{L}_{ext} + \delta \mathcal{L}_{int} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\{\delta f_N\}\left[\int_V \rho [N]^T [N]\, dV\right]\{\ddot{f}_N\} + \{\delta f_N\}^T\left[\int_V [B]^T [D] [B]\, dV\right]\{f_N\} = \{\delta f_N\}^T \{F_N(t)\}$$

$$[M]\{\ddot{f}_N(t)\} + [K]\{f_N(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{oscillazioni libere} \\ F_N(t) & \text{oscillazioni forzate} \end{cases}$$

con $[K] = \int_V [B]^T [D] [B]\, dV$

$$\boxed{[M] = \int \rho [N]^T [N]\, dV}$$ matrice consistente di massa (di un qualunque elemento finito)

Si chiama consistente perché la matrice di rigidezza nasce intrinsecamente consistente con la teoria degli elem finiti ed è figlia delle funzioni di forma $[B] = [\partial][N]$. Anche la matrice delle masse è figlia delle funzioni di forma.

<u>elemento asta</u> — assiale / torsionale

<u>assiale</u>

$$N(x) = \left[1 - \frac{x}{\ell} \quad \frac{x}{\ell}\right]$$

$$M = \int_0^{\ell} \rho A \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell} \\ \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell} & \frac{x}{\ell} \end{Bmatrix} dx = \rho A \int_0^{\ell} \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{\ell})^2 & \frac{x}{\ell}(1 - \frac{x}{\ell}) \\ \frac{x}{\ell}(1 - \frac{x}{\ell}) & (\frac{x}{\ell})^2 \end{bmatrix} dx = \ldots$$

$$= \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA con l'approccio a parametri concentrati (LUMPED)

$$M = \frac{\rho A \ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

torsionale

$$[M] = \frac{\rho J_p \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

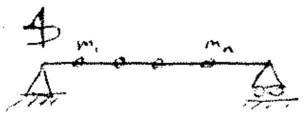
Elemento trave

$$[M] = \frac{\rho A l}{420}\begin{bmatrix} 156 & & \text{simm.} & \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

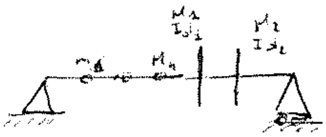
Nel caso di parametri concentrati

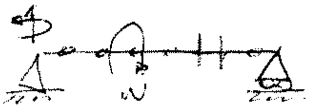
$$[M] = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

DINAMICA dei ROTORI



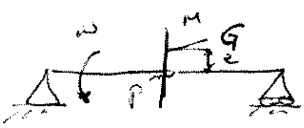
Freq. propria λ_r^2 - Modo di vibrare $\{X^{(r)}\}$





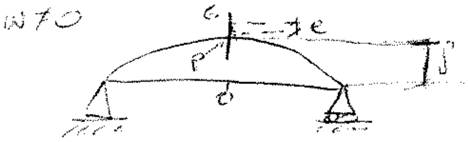
è il problema di dinamica dei rotori.

Rotore di Jeffcott



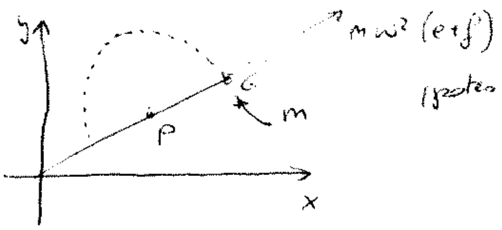
e eccentricità della massa

soluzione elementare



$$m\omega^2(f+e) = Kf$$

$$K = \frac{48EJ}{l^3} \qquad J = \frac{\pi d^4}{64}$$



Ipotesi: rotazione rigida della deformata dell'albero