Accoppiamento elastico

Tutti gli accoppiamenti tra motore e carico (o sensore) non sono perfettamente rigidi, ma elastici.
In generale tra gli alberi del motore e del carico si ha un giunto, quest'ultimo è la principale causa di accoppiamento elastico. Per limitare i danni di accoppiamento elastico esistono vari metodi che verranno analizzato nel corso di questo breve paragrafo.
In generale il tachimetro può essere collegato al motore o al carico, può essere calettato all'albero mediante un giunto oppure calettato direttamente (soluzione usata tipicamente con encoder rotativi).

Notazioni

D'ora in poi useremo le seguenti notazioni:

- Pedice m, t, g e c per indicare rispettivamente motore, tachimetro, giunto e carico
- θ, ω per indicare la posizione e la velocità
- T e J per indicare coppia e momento d'inerzia
- k per indicare la rigidezza del giunto elastico

Accoppiamento motore – tachimetro

Supponiamo che l'accoppiamento tra motore e tachimetro sia elastico. Ne segue che il moto sarà governato da queste due leggi:

$$T_g = k(\theta_m - \theta_t)$$
$$T_g - T_t = J_t \frac{d\,\omega_t}{dt}$$

Supponiamo che il tachimetro abbia T_t nulla:

$$\begin{matrix} T_g = k(\theta_m - \theta_t) \\ T_g = J_t s^2 \theta_t \end{matrix} \quad \rightarrow \quad J_t s^2 \theta_t = k(\theta_m - \theta_t) \quad \rightarrow \quad \frac{\theta_t}{\theta_m} = \frac{\omega_t}{\omega_c} = \frac{k}{k + s^2 J_t} = \frac{1}{1 + s^2 \frac{J_t}{k}}$$

Supponendo che il rapporto $(T_m - T_g) / \omega_m$ sia pari a $1/(sJ_t)$ otteniamo il seguente schema a blocchi:

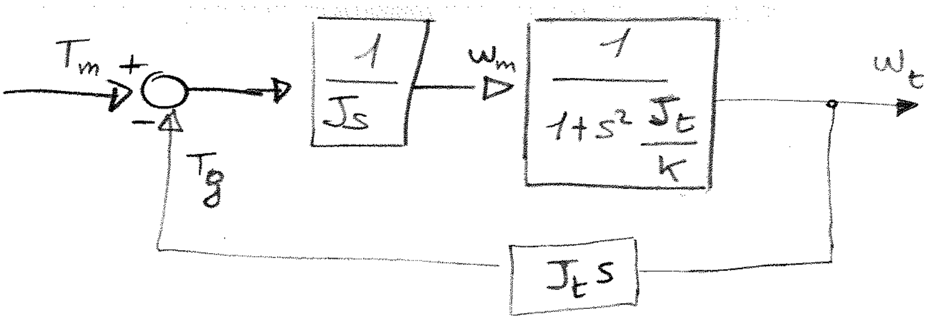

Figura 1

Se, come accade spesso nei moderni encoder, $J_t << J_m$ allora può essere trascurato l'effetto di J_t e si ottiene:

$$\frac{\omega_t}{T}=\frac{\frac{1}{Js}}{1+s^2\frac{J_t}{k}+\frac{J_t}{J_m}}\approx\frac{\frac{1}{Js}}{1+s^2\frac{J_t}{k}}$$

Il trascurare J_t è un ipotesi cautelativa in quanto avvicina i poli all'origine del luogo delle radici.

Consideriamo ora l'intero anello di velocità supponendo:

- di poter considerare il regolatore come un semplice blocco proporzionale
- di poter rappresentare l'anello di corrente come $\frac{T_m^x}{T_m}=\frac{1}{(1+s\tau)^2}$

Lo schema considerato è il seguente:

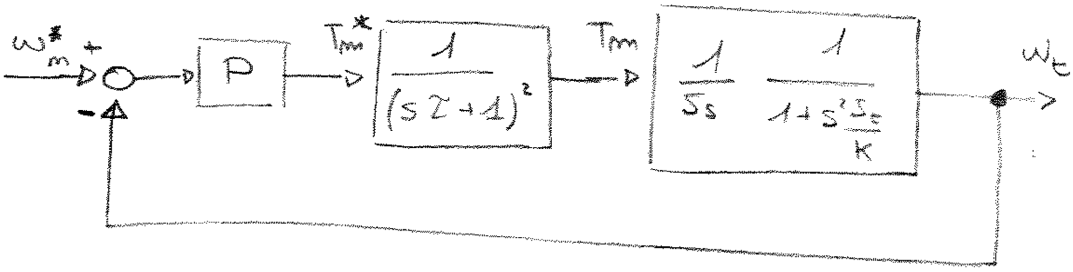

Figura 2

Ne segue che il luogo delle radici risulta essere:

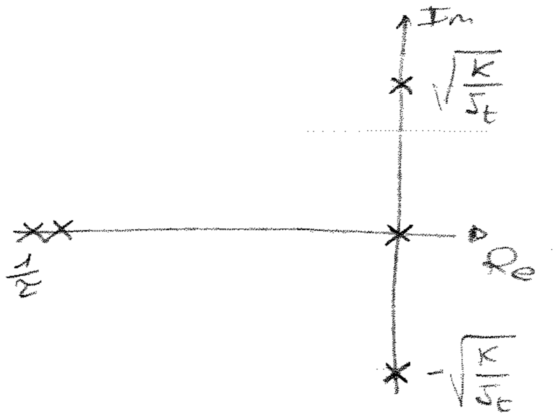

Figura 3

Come si può notare se si aumenta, anche di poco, il guadagno proporzionale il sistema diventa instabile. E' per tanto necessario inserire un filtro Notch che consente di rendere maggiormente stabile il sistema.

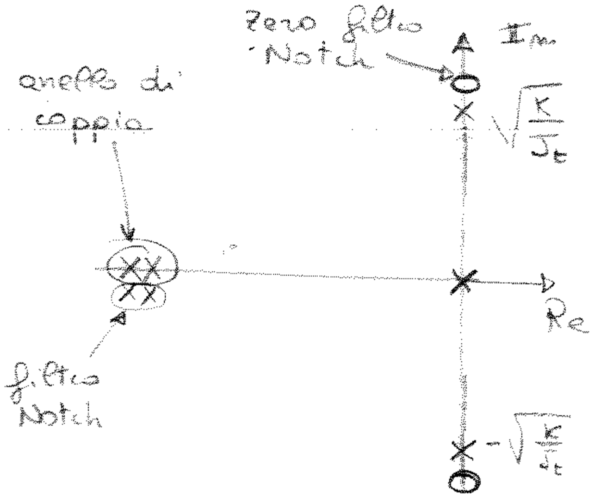

Figura 4

Accoppiamento elastico verso il carico

Per poter analizzare l'accoppiamento elastico verso il carico è necessario scrivere le equazioni meccaniche che governano il sistema. Per ipotesi supponiamo che l'accoppiamento motore-tachimetro (o carico-tachimetro) sia ideale. Inoltre supponiamo, per ora, che il tachimetro sia collegato direttamente all'albero del motore.

Le equazioni meccaniche di nostro interesse sono le seguenti:

$$T_m - T_g = J_m \frac{d\omega_m}{dt}$$
$$T_g - T_c = J_c \frac{d\omega_c}{dt}$$
$$T_g = k(\theta_m - \theta_c)$$

Da cui si ottiene il seguente schema a blocchi:

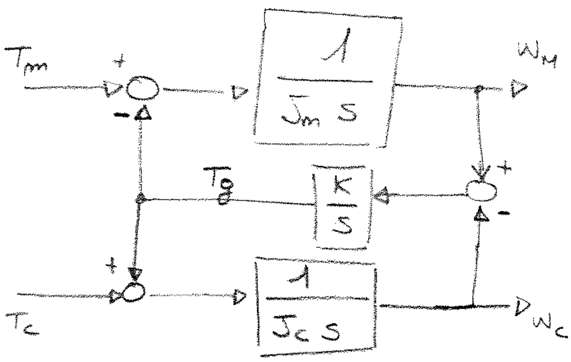

Figura 5

A noi interessa conoscere il rapporto ω_m / T_m .

Possiamo vedere il sistema in questo modo:

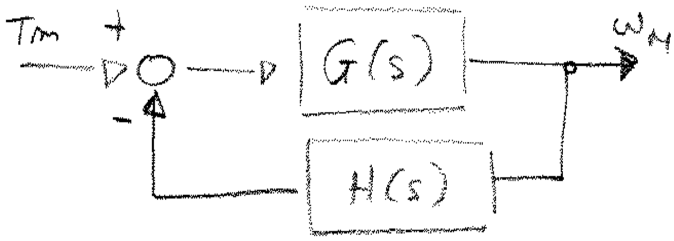

Figura 6

dove $G(s)=\frac{1}{J_m s}$ e $H(s)=\frac{T_g}{\omega_m}=\frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}\frac{1}{J_c s}}=\frac{sJ_c}{1+s^2\frac{J_c}{k}}$

Ne segue che :

$$\frac{\omega_m}{T_m}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\frac{1}{J_m s}}{1+\frac{1}{J_m s}\left(\frac{sJ_c}{1+s^2\frac{J_c}{k}}\right)}=\frac{1+s^2\frac{J_c}{k}}{J_m s\left(1+s^2\frac{J_c}{k}\right)+sJ_c}=\frac{1+s^2\frac{J_c}{k}}{s(J_m+J_c)\left(1+\frac{s^2}{k}\frac{J_m J_c}{J_m+J_c}\right)}$$

Definiamo $J_{eq} = J_m J_c / (J_m + J_c)$ e otteniamo:

$$\frac{\omega_m}{T_m}=\frac{1}{s(J_m+J_c)}\frac{1+s^2\frac{J_c}{k}}{1+s^2\frac{J_{eq}}{k}}$$

Si hanno i poli in $\pm\sqrt{(\frac{k}{J_{eq}})}$ e gli zeri in $\pm\sqrt{(\frac{k}{J_c})}$.

In genere $J_c > J_{eq}$ quindi i poli sono più lontani dall'origine rispetto agli zeri. Se J_c aumenta la distanza tra poli e zeri ed in particolare per $J_c \to$ infinito gli zeri tendono a disporsi nell'origine, mentre i poli tendono a $\pm\sqrt{(\frac{k}{J_m})}$.

Invece se $J_c << J_m$ I poli e gli zeri si semplificano.

<u>Misurazione della velocità (o posizione) mettendo il sensore sul carico</u>

Lo schema del controllo sarà

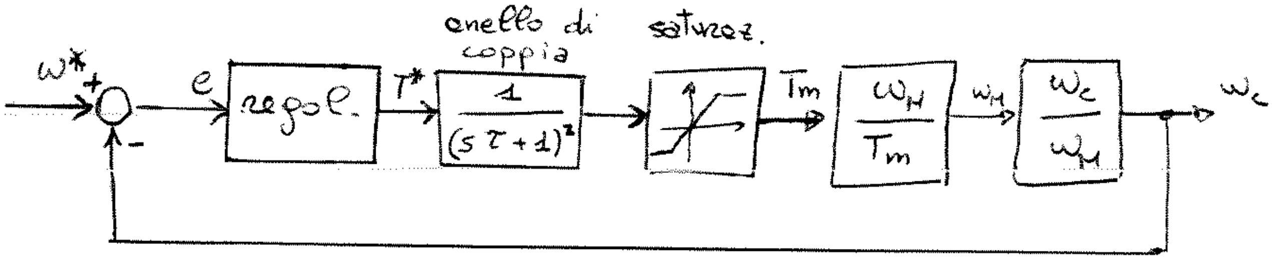

Figura 7

L'unica funzione di trasferimento non ancora nota è ω_c/ω_m

Per calcolarla si considera lo schema a blocchi di figura 5 e lo si rielabora in questo modo:

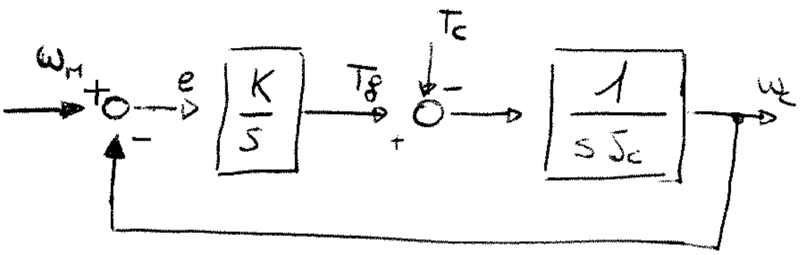

Figura 8

$$\frac{\omega_m}{\omega_c}=\frac{\frac{k}{s^2 J_c}}{1+\frac{k}{s^2 J_c}}=\frac{1}{1+s^2\frac{J_c}{k}}$$

Valutiamo I poli/zeri della funzione di trasferimanto ω/ω^*

- polo in zero e zero in k_i/k_p dovuto al regolatore PI
- due poli dovuti al controllo di macchina
- polo in zero più due poli complessi coniugati dovuti alla funzione di trasferimento ω_c/T_m

Supponendo il regolatore proporizionale avremo:

- polo nell'origine
- poli su asse immaginario in $\pm\sqrt{(k/J_{eq})}$
- poli dovuti al controllo di macchine

Il sistema risulta instabile.

Si possono usare due diversi sistemi per cercare di rendere il controllo stabile:

1) doppia reazione: si misurano la velocità a monte e a valle del giunto e si reatroazionano negativamente

2) misurazione di coppia (o di accelerazione)

Prima di analizzare I due metodi di compensazione è necessario un breve excursus sul luogo delle radici.

Excursus su luogo delle radici

Il luogo delle radici di un sistema è utile per la valutazione della stabilità del sistema stesso. E' possibile studiare il sistema con il luogo delle radici solo se il sistema è in retroazione unitaria, cioè se dato il sistema in figura H(s) = 1

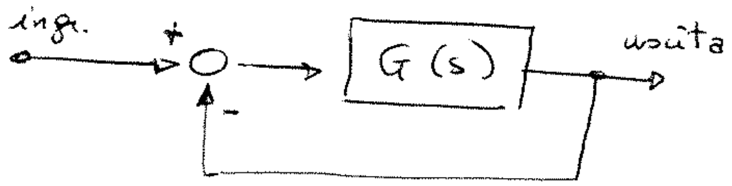

Figura 9

Tuttavia esistono alcuni metodi per studiare il sistema anche se H(s) ≠ 1.
Il metodo più semplice si può notare nella figura successiva: viene inserita H(s) sulla catena diretta e si chiude il sistema in retroazione. Tuttavia in uscita dalla catena diretta non si ha più la grandezza desiderata, per ottenerla è necessario inserire il blocco 1/H(s)

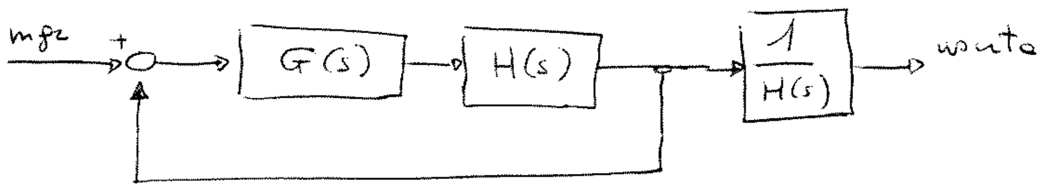

Figura 10

In questo modo si studia il luogo delle radici per il sistema in retroazione unitaria e dopo averlo studiato si riportano sul luogo delle radici i poli/zeri dovuti al blocco “1/H(s)”.

Metodi di compensazione

1. Doppia reazione

Il metodo di compensazione a doppia reazione consiste nel misurare la velocità (o la posizione) a monte e a valle del giunto e poi retroazionare ($\omega_m - \omega_c$) negativamente.
Noi sappiamo dai casi precedenti che

$$\frac{\omega_c}{\omega_m}=\frac{1}{1+s^2\frac{Jc}{k}}\rightarrow\omega_m=\omega_c\left(1+s^2\frac{J_C}{k}\right)$$

$$\omega_m-\omega_c=\omega_c\left(1-1+s^2\frac{J_c}{k}\right)=\omega_c s^2\frac{J_c}{k}$$

Come si nota dalle formule la differenza delle due velocità equivale all'inserimento di due zeri nell'origine.

Ne segue che noi analizziamo lo schema a blocchi:

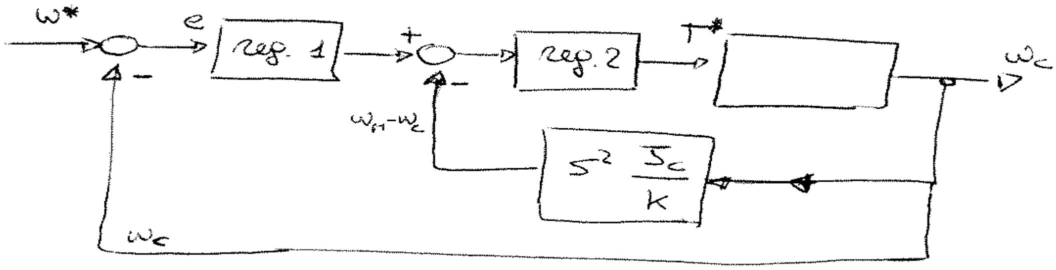

Figura 11

Per quanto visto dall'excursus sui luoghi delle radici si ha che lo schema da analizzare sarà:

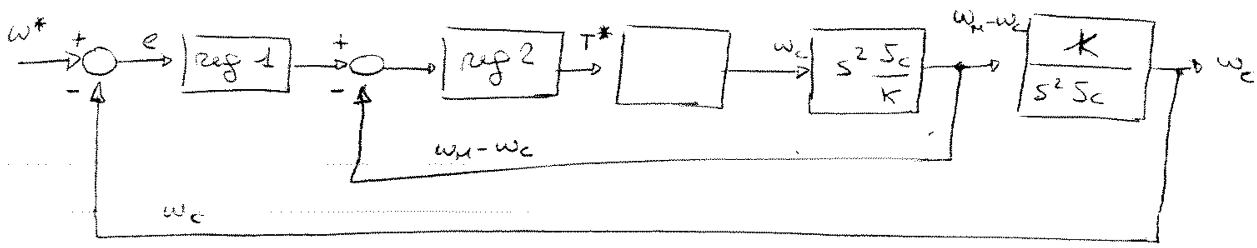

Figura 12

Analizzando questo schema si possono fare le seguenti considerazioni su poli e zeri:

- Si ha un polo nell'origine
- Si hanno due poli complessi coniugati situati in $\pm\sqrt{(k/J_{eq})}$
- Si hanno I due poli dovuti al controllo di macchina
- Si hanno due zeri nell'origine dovuti alla differenza $\omega_m - \omega_c$

Nota: il polo nell'origine si trasforma in uno zero

Il sistema retroazionato avrà comportamento simile a quello in figura:

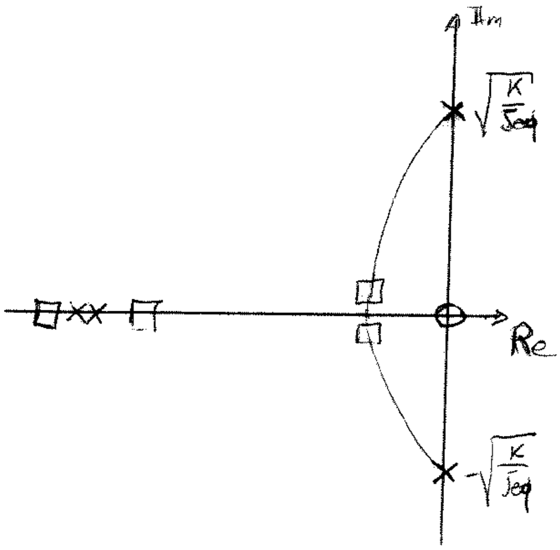

Figura 13

L'intero sistema analizzato avrà pertanto il seguente luogo delle radici:

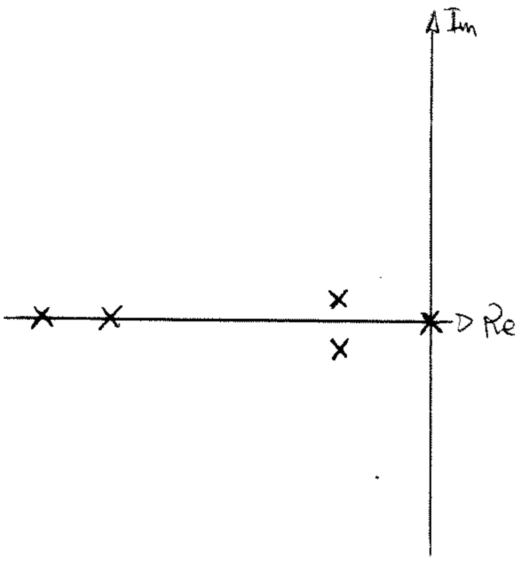

Figura 14

<u>Nota:</u> questo metodo necessita di sensori molto precisi in quanto le variazioni di velocità (o posizione) di valle rispetto al monte del giunto sono molto modeste. Questo sistema può essere utilizzato se l'albero ha elevata elasticità.

<u>2. Misurazione di coppia (o di accelerazione)</u>

Come calcolato in precedenza $\frac{\omega_c}{T_c}=\frac{1}{sJ_c}$ da cui $T_c=\omega_c s J_c$.

Come si nota dalle equazioni appena ricavate la misura della coppia comporta l'aggiunta di uno zero nell'origine del luogo delle radici (stessa cosa se al posto della coppia si misura l'accelerazione in quanto $\dot{\omega}_c = s\omega$)

Ne segue che il sistema da analizzare risulta il seguente:

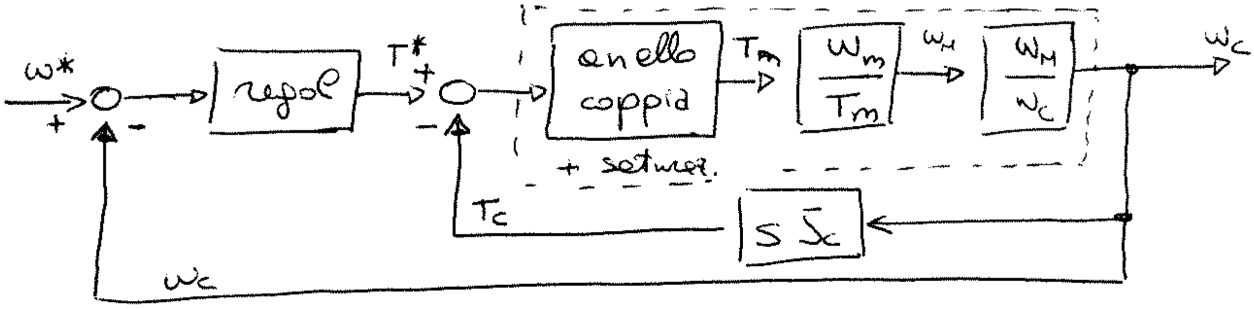

Figura 15

Dalle considerazione fatte nell'excursus sui luoghi delle radici si ha che il sistema che noi analizzeremo è :

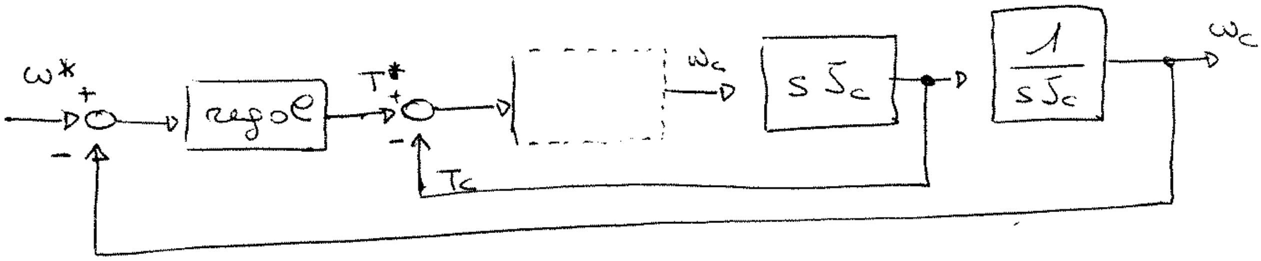

Figura 16

Il cui luogo delle radici risulta essere:

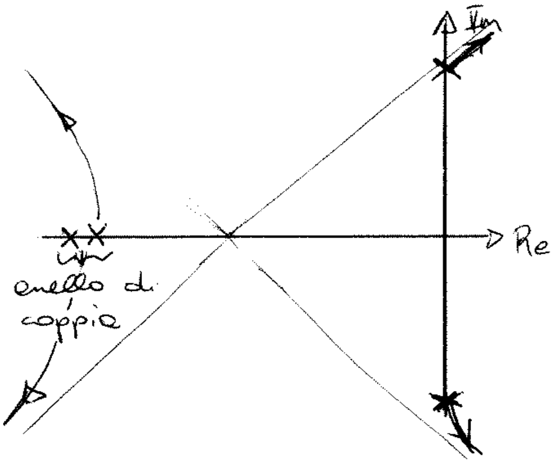

Figura 17

Come si può notare dal luogo delle radici questo sistema con retroazione negativa risulta instabile. Non si riesce a smorzare in quanto l'angolo di partenza dei poli sull'asse immaginario fa si che questi vadano immediatamente nel semipiano di destra del piano di Gauss. Per avere un minimo di smorzamento è necessario inserire una rete derivativa. Tuttavia i risultati ottenuti non sono soddisfacenti e quindi si può affermare che se si effettua una misura di coppia con retroazione negativa non si riesce ad avere un buon risultato.

Per ottenere risultati più soddisfacenti si può fare una retroazione positiva (in genere le retroazioni positive non sono utilizzate). In questo caso lo schema del sistema sarà il seguente:

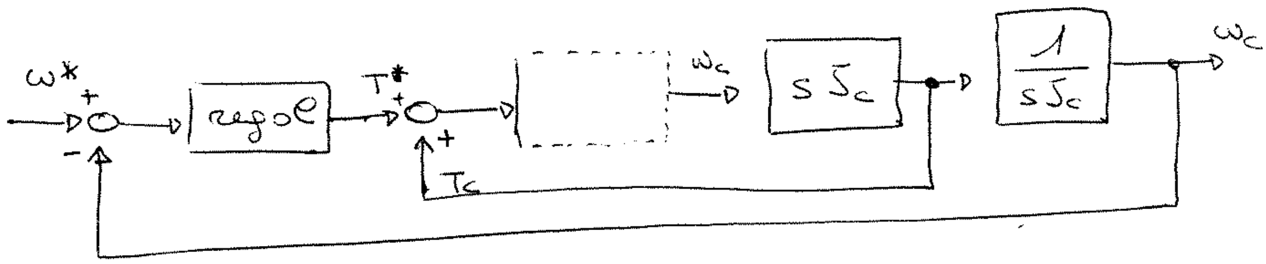

Figura 18

Il luogo delle radici dell'anello interno risulterà:

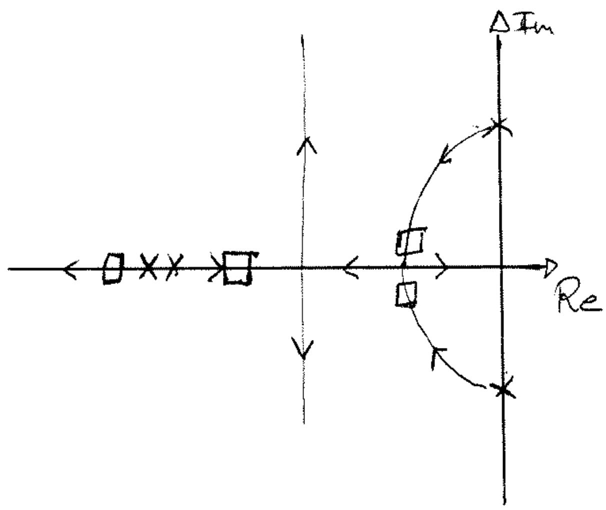

Figura 19

Ne segue che se si suppone un regolatore puramente proporzionale il luogo delle radici dell'anello esterno sarà:

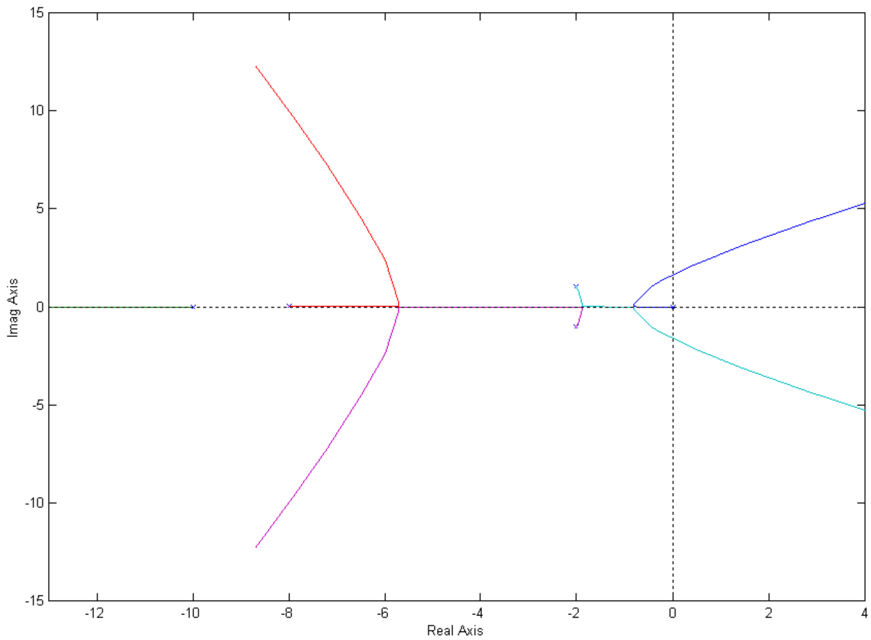

Figura 20

Conclusioni

Se si ha a che fare con un giunto elastico, e con un normale anello di velocità non si riesce ad ottenere la dinamica desiderata si possono usare dei metodi di compensazione.

Nei casi in cui si abbia a disposizione un giunto dotato di rigidezza particolarmente bassa si può misurare la differenza di posizione (o velocità) tra l'albero a valle e quello a monte del giunto.

Nei casi in cui il giunto sia rigido o sia particolarmente difficoltoso misurare due velocità, può convenire misurare la velocità del carico e l'accelerazione retroazionando quest'ultima positivamente.