08-05-17

FINITE ELEMENT MODELING

È necessario fare un modello per usare gli elementi finiti

protesi → è necessario dimostrare che è stata progettata: prove → sperimentali
↘ calcoli, modello teorico

Si possono fare anche dei calcoli + semplici, a mano (senza usare gli elementi finiti)

nel campo biomedico → geometrie complesse, non si può semplificare.
↳ ma anche i materiali sono complessi: osso corticale, spongioso

(si fanno processi di omogenizzazione: → distinzione tra corticale e spongioso, considerato omogeneo ed isotropo, lineare, → non ho direzioni preferenziali → non è vero)

↳ x semplificare, anche se non è così (es. spongioso = corticale + aria)

↳ le condizioni di carico sono complicate, dove andarli a posizionare

GLI ELEMENTI FINITI:

- sono un'approssimazione numerica → l'approssimazione può essere buona o pessima (es. eq. elastiche, di Navier-Stokes)
  ↳ si divide in volumetti

1. PRE-PROCESSING: creare il modello
   (sfruttare le simmetrie per ridurre il calcolo → + veloce)
2. DISCRETIZZARE: faccio diventare il disegno una mesh ↳ = insieme degli elementi
3. Applico forze esterne e i vincoli
4. Risolvo
5. POST-PROCESSING

Per ogni elemento si guardano le equazioni che lo descrivono → si trova la matrice di rigidezza

Fare bene la mesh: più fitta dove i gradienti sono più elevati, e più fine dove ci sono poche variazioni.

→ la soluzione è conosciuta in tutto l'elemento, anche se solo approssimata

Differenze finite = ...

Multifisica = gestiscono diversi 'argomenti' (es. fluidodinamica,...)

→ lineare: scrivere la matrice ed invertirla → è semplice (lungo, ma semplice)
↘ non lineare: impone una soluzione iterativa (es. fino a quando l'errore è piccolo)

- materiale: non è elastico σ / ε

Normalmente si ipotizza linearità, e poi si modifica dove ci sono gli errori maggiori

- geometriche: ci sono spostamenti e modifiche della struttura grandi → si modifica → NON LINEARE

(è lineare se gli spostamenti sono trascurabili → non si modifica la struttura)

↳ non bisogna dirgli nulla: poi la risolve lineare, poi sovrappone alla struttura di prima. se l'errore è > di quanto voglio itero finché

A1

la struttura risultante è uguale a quella di partenza (il risultato dell'iterazione di prima).

• di contatto : possono esserci compenetrazioni → se non lineare : iterativo

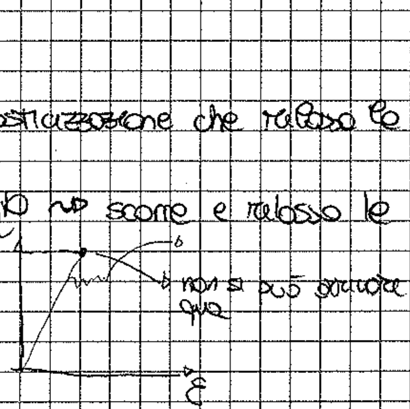
Ogni dettaglio può essere ottenuto, usando mesh sufficientemente piccole
(es. l'elemento rettangolare è migliore di quello triangolare ; il mattoncino (brick, parallelepipedo) è + potente del tetraedrico)
(tetraedrico) ↳ il triangolare all'interno sono costanti, non hanno variazioni → tensione e deformaz. variano in modo discreto da uno all'altro → ma sono + facili da generare mesh con questi (è + complicato usare i parallelepipedi/quadrati in modo automatico) ↳ tipo esa

Ci sono molti elementi
↳ a parità di forma è possibile aumentare i g.d.l. → + potente, studiare cose + complesse → aumento i nodi
(se aumentano i nodi e non varia il risultato → è probabile che la mesh sia giusta)
↳ aumento i nodi → aumento la potenza senza toccare la mesh

09-05-2012

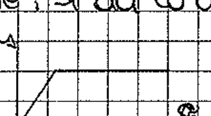
L'esaedro a otto nodi può descrivere campi di tensione lineari
Dove ci sono concentrazioni di tensione bisogna infittire.
Spigolo vivo : in teoria c'è una tensione infinita. (→ nella realtà ci sarà cmq un raccordo) ↳ si cercano di evitare
↳ se si infittisce la mesh, la tensione aumenta.
nella realtà non avviene una tensione infinita → un po' di raccordo c'è
↳ il materiale è un po' duttile, e c'è una plasticizzazione che rilassa le tensioni (se invece è fragile, si rompe subito)

su un materiale duttile, non si può superare il carico di snervamento → scorre e rilassa le tensioni. ⇒ il modello lineare mi da un risultato sbagliato



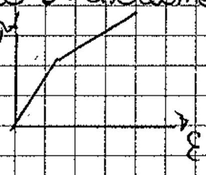
↳ bisogna passare al modello non lineare, si da la curva del materiale

• COMPORTAMENTO ELASTO-PLASTICO IDEALE



bisogna solo dargli modulo elastico e carico di snervamento

• MODELLO ELASTO-PLASTICO IDEALE CON INCRUDIMENTO



↳ se voglio vedere la rottura è + complicato

Lo scopo è identificare la MATRICE DI RIGIDEZZA dell'elemento : quale forza bisogna applicare per ottenere uno spostamento unitario.

I g.d.l. sono relativi ai nodi. 8 nodi con 3 g.d.l. l'uno → 24 g.d.l. ⇒ matrice di rigidezza 24x24
→ il brick è stato pensato con solo 3 gdl : solo le traslazioni e non le rotazioni.

Il calcolo matriciale (che è noto prima degli elementi finiti) ha solo 1D
↳ utilizza dei modelli implementando la teoria di de Saint-Venant → corpo isostatico = corpo iperstatico

isostatico = bisogna di eq. di equilibrio

iperstatico = eq. di elasticità → bisogna tener conto dell'elasticità interna del materiale.

↳ con le matrici o gli elementi finiti non ci sono differenze (in ogni caso la struttura labile non si risolve → caso dinamico)

La differenza tra calcolo matriciale e fem è il concetto → le matrici sono uguali } per l'asta coincidono

↳ astrazione matematica

↳ dal modello fisico, Saint-Venant.

FEM: per ogni elemento si scrive una funzione polinomiale con gli stessi gdl

↳ per la meccanica dei solidi si risolve uno spostamento

ASTA → deformata (spostamento) parabolica

Anche l'elemento + semplice porta al risultato → è sufficiente metterne di più

↳ si ha la convergenza assicurata.

Ogni elemento ha la sua matrice di rigidezza → si uniscono per ottenere una matrice della struttura.

C'è anche l'elemento asta → è una molla

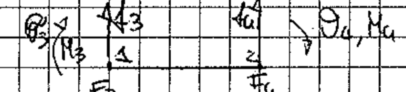
Il problema di non linearità non lo risolvo aumentando gli elementi

PAGINA 21: leggere

matrice di rigidezza 2×2

spostamento in 1 con forza in 2

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

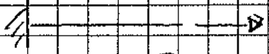


matrice 4×4 → costruita come quella di prima

(spostamento in n quando ho solo la forza/momento in m)

Il calcolo matriciale implementa in una struttura matriciale la teoria di de Saint-Venant

PAG. 52 → matrice 12×12



ricavo lo spostamento $\frac{EA}{l}$

Flessione deviata = la struttura non si inflette nel piano della forza

$$\{F\} = [K]\{f\}$$

CAPITOLO 3

→ bisogna ruotarle

→ ogni matrice è espressa rispetto al proprio sdr

Assemblando insieme gli elementi, ci sono sistemi di rif. locali per ogni elemento, tutti in un sistema di riferimento globale

Si passa da locale a globale con delle matrici di rotazione ($[T]^T = [T]^{-1}$)

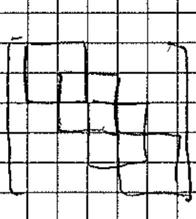
↳ si premoltiplica ogni vettore/matrice per la matrice di rotazione

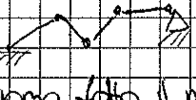
Le pressioni vengono suddivise nei nodi → si sposta tutto nei nodi → forze equivalenti

Per assemblare la matrice:

- congruenza degli spostamenti
- equilibrio delle forze

es. n aste in serie → matrice a bande





a banda

Quando abbiamo fatto il modello, il calcolatore rinumera i nodi cercando di ottenere una matrice

Se conosco tutti gli spostamenti e voglio trovare le forze (o viceversa) → inverto la matrice.
In realtà però conosco un po' di forze e un po' di spostamenti
1. Rotazione
2. Assemblaggio → la matrice di rigidezza rimane quella
3. Imposizione dei vincoli
↳ imponendo situazioni differenti di carico e vincolo studio situazioni diverse
La matrice di rigidezza non dipende da carichi e vincoli
Se [kee] non è invertibile non si risolve il problema
• ho sottovincolato la struttura → è labile → non è invertibile

Le parti incognite possono essere divise in parti che ci interessano o no
↳ condensazione statica della matrice di rigidezza
Si nasconde cosa non ci interessa: vengono delle matrici più piccole, con solo i gdl che interessano
⇒ non si usa perché è molto onerosa anche la condensazione → si usa solo se la matrice condensata si usa più volte

30-05-2017
PARTE TERZA - CAPITOLO 1
Calcolo matriciale → si parte da una realtà fisica: de Saint Venant
Gli elementi finiti arrivano a delle matrici di rigidezza (che possono anche essere uguali a sopra) ma è completamente astratto.
FAMIGLIE DI ELEMENTI
• 1D: hanno solo la lunghezza
• 2D
• 3D
Non so come vanno gli spostamenti: utilizzo delle funzioni per approssimarli
Procedimento:
1. Identificare e descrivere l'elemento: che tipo (1D - 2D - 3D), quanti nodi ha, quanti gdl.
2. Scegliere un'opportuna funzione per approssimare il campo degli spostamenti di ogni punto
↳ progettazione a resistenza (tensione)
a rigidezza (...)
es. la protesi d'anca è molto + rigida dell'osso
nel caso statico non possiamo risolvere strutture labili → si possono risolvere nel caso dinamico (ci sono le forze d'inerzia)
→ uso una funzione polinomiale di grado tale che riesco a calcolare tutti i gdl
3. Legare il campo degli spostamenti dell'elemento agli spostamenti nodali
↳ i nodi identificano i gdl, sono i punti d'interfaccia con il resto
Però voglio conoscere poi gli spostamenti di tutti i punti dell'elemento → lo posso fare se conosco i nodi come si muovono

4. Scrivere le relazioni tra spostamenti e deformazioni
↳ differenziale: derivazione dei campi di spost

5. Intervenire il materiale: legare il campo delle tensioni alle deformazioni

6. Ricavare una relazione tra carichi nodali e spostamenti nodali → trovare la matrice di rigidezza
↳ è un approccio energetico con solo la parte statica

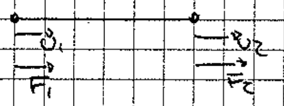
7. Scrivere le relazioni tra il campo delle tensioni dell'elemento e gli spostamenti nodali.

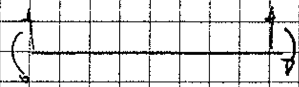
Formulazione isoparametrica → gli elementi sono a distorsione nulla → fare elementi disto

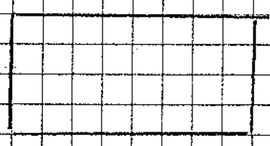
1. δ → campo di spostamenti → è una funzione

δ_i e F_i → spostamenti dei nodi } sono dei vettori con dimensione pari a
→ forze applicate nei nodi } g.d.l. × n° nodi

elemento asta: 2 nodi con 1 gdl/uno   elemento trave: 4 gdl (comportamento assiale e a flessione)







elemento piano → comportamento membranale (non ha rigidezza flessionale)
↳ gli spostamenti sono tutti nel piano

ho due funzioni che descrivono il campo degli spostamenti: per le 2 direzioni

⇒ se identifico 1 gdl suppongo che l'elemento reagisca a quello spostamento

Gli elementi triangolari sono i + facili → la mesh si fa sempre

[manca la rotazione rispetto all'asse z → problema delle shell]

Il brick tipico non reagisce alle rotazioni, solo agli spostamenti → 24 gdl

Il tetraedro ha solo 12 gdl → ho solo 4 parametri per ogni direzione → funzione lineare $u = k + k_1 x + k_2 y + k_3 z$

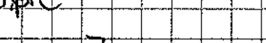
Più nodi abbiamo e più la funzione è complicata → non metto i nodi solo negli spigoli, ma ad es. anche a metà dei segmenti, o al centro delle facce. ⇒ + nodi ho, + ho possibilità di deformare in modo strano.

2) Il continuo può deformarsi in ∞ modi → con gli e.f. mettiamo dei vincoli → + rigido della realtà

ASTA campo degli spostamenti solo assiale

$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x$

con 3 nodi



$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$

↳ spesso conviene mettere elementi + potenti (con + nodi) che più elementi semplici: ho un'approssimazione migliore

Un'asta normale ha un andamento lineare delle deformazioni.

Se abbiamo scelto bene la funzione, noti gli spostamenti nodali possiamo calcolare quelli di tutto l'elemento → funzioni di forma

(deformazioni costanti → spostamenti lineari)

3) Dati gli spostamenti nodali calcolare la funzione (α_1, α_2)

$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{f\}$
↳ trovo i coefficienti

matrice delle funzioni di forma: $[\phi(x_k)][A]^{-1}$

Moltiplicando le funzioni di forma × gli spostamenti nodali ⇒ spostamenti
↳ tutti gli elementi finiti sono caratterizzati dalle funzioni di forma

4) Legare il campo delle deformazioni al campo degli spostamenti

asta: $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$ → descrive una deformazione costante (spostamento lineare)
↳ $\varepsilon_x = \alpha_2$

$\varepsilon\{x\} = [B]\{f\} = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$

5) Dalle deformazioni vorremmo calcolare le tensioni → interviene la legge costitutiva del materiale
↳ matrice di elasticità

$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$ $\qquad \gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3))$ $\qquad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}$

$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1))$ $\qquad \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}$

$\{\varepsilon\} = [\quad]\{\sigma\}$ → matrice 6×6

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$
↳ se il materiale è isotropo

per l'asta rimane $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1$

Possono esistere delle tensioni interne non equilibrate, e deformazioni senza avere forze (dilatazioni termiche)

6) Che forze ci vanno per causare gli spostamenti nodali
↳ principio energetico (dei lavori virtuali): che forze ci vanno per causare quello stato di deformazione.

Il software ha già tutte le matrici di rigidezza per i vari elementi

PLV: struttura in cui ho spostamenti equilibrati da forze, introduco degli spostamenti virtuali
→ il lavoro forze esterne deve essere uguale a quello delle forze interne
↳ forze che aggiungo io ↳ il problema è integrare il lavoro interno

Si risolve in un'integrazione estesa al volume ⇒ si trova la matrice di rigidezza
→ spostamenti virtuali il lavoro esterno vale $L_{est} = \{f^*\}^T\{F\}$
↳ le forze esistono già

7) $\{\sigma\} = [D][B]\{f\}$

per l'asta è facile perché le 3 matrici sono costanti → integrazione di linea

12-06-2017

Funzione parabolica → 3 parametri - 3 gdl → la deformata varia linearmente

I gdl dei nodi sono gdl traslazionali (vedi elemento asta)

ELEMENTO TRAVE (117)

elemento snell → ho 2 nodi e 2 gdl per nodo : ho 4 gdl

$= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ (ho 4 parametri)

Contano più le def. a flessione: la trave ha lunghezza >> della sezione

→ le def. di taglio sono trascurabili

Lavoro sulle grandezze integrate (la rotazione è la derivata dello spostamento)

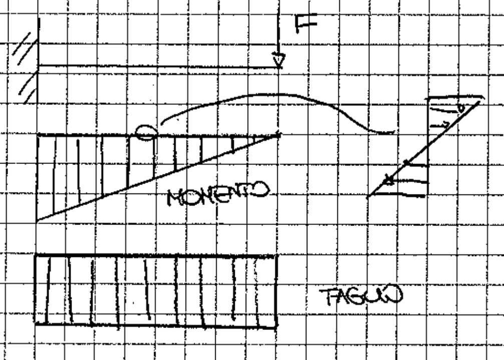
La trave di Timoshenko tiene invece conto delle def. al taglio
(viene messo in evidenza il contributo dello scorrimento a taglio)

PAG. 118-119

1) moto rigido dell'elemento lungo y
2) rotazione
3) lego il campo degli spostamenti dell'elemento al campo degli spostamenti nodali
4) lego il campo delle deformazioni dell'elemento al campo degli spostamenti

PAG. 122-123

DEFORMAZIONE TRAVE INFLESSA



σ_x: lungo l'asse della trave

De Saint-Venant: valido lontano dagli incastri

è sempre una discontinuità

↳ devo aggiungere una dimensione

Curvatura locale → studio quando la curvatura è proporzionale al momento in quel punto

↳ varia linearmente con x

La matrice di rigidezza vale: $[D] = [EJ]$

ELEMENTO PIANO A 4 NODI (143)

es. palloncino → a flessione non ha rigidezza → è solo caricato nel piano

Elemento a 8 gdl

Le funzioni di approssimazione più convenienti per gli spostamenti 'u' e 'v' sono:

$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$

(152)

$v = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$

(158-159)

A due spostamenti nel piano corrispondono 3 deformazioni: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

- ε_x è costante con y e varia linearmente con x
- ε_y è costante con x e varia linearmente con y

ELEMENTO PIANO A 3 NODI pag 170-171

Gli spostamenti devono essere continui, ma non necessariamente le deformazioni

L'elemento quadrato vede solo def. costanti

Sui nodi ho errori maggiori (fig 6.4 pag 164)

Il diagramma lineare della deformazione risulta approssimato a scalini

Il diagramma a scalini interseca il diagramma lineare a valori dell'ascissa x che corrispondono alle posizioni dei baricentri dei vari elementi.

In generale, non c'è continuità nel campo delle deformazioni tra elementi contigui → i valori calcolati in corrispondenza del baricentro dell'elemento sono quelli che meglio individuano il valore esatto.