DISTRIBUZIONI TEMPO - FREQUENZA

Se il segnale non è stazionario? Non è WSS? → distribuzioni/trasformate tempo-frequenza

Rappresentazione mista in cui si collega l'info in frequenza a quella del tempo

es. il segnale del pipistrello non è stazionario → lo spettro varia nel tempo

↳ la durata dell'impulso è molto breve a frequenza molto alta (~100ms, 20 kHz)

la trasf. tempo-frequenza riporta istante per istante di tempo quali sono le frequenze

emette 3 impulsi a frequenza crescente in tempi diversi → all'aumentare della frequenza aumenta la risoluzione spaziale; le basse freq. però si propagano di + e ci mettono più tempo (→ le emette prima). Le orecchie ricevono e poi fa la trasformata di Fourier

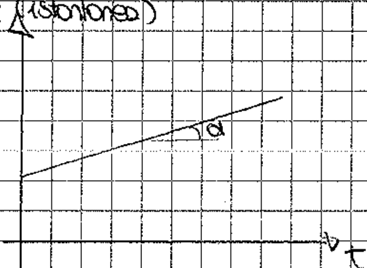
In alcune applicazioni è fondamentale il rapporto tra il tempo e la frequenza.

30-04-2012

Ci sono due classi principali di trasformazioni tempo-frequenza:

- Distribuzioni lineari
- Distribuzioni bilineari.

Segnale CHIRP: modulato in frequenza = parte da una freq. + bassa e poi aumenta
l'ampiezza può essere costante
(usato per modellizzare il canto degli uccelli)



ho una modulazione lineare in frequenza (se misuro la freq. istante per istante ho un andamento lineare)

$$x(t) = \underbrace{a(t)}_{\text{modulante in ampiezza}}\, e^{j\overbrace{\varphi(t)}^{\text{modulante in frequenza}}} = a(t)\left[\cos(\varphi(t)) + j\sin(\varphi(t))\right]$$

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \alpha\cdot t \qquad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \alpha t\, 2\pi \;\rightarrow\; \varphi(t) = \frac{\alpha t^2}{2}\, 2\pi$$

↳ se $\alpha > 0$ la freq. aumenta nel tempo
$\alpha < 0$ " " diminuisce nel tempo

SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM

Segnale $x(t)$ non stazionario → stringo il segnale tanto quanto basta a farlo tornare stazionario (moltiplico per una finestra sufficientemente stretta)

↳ calcolo la trasf. di Fourier e la sposto lungo il segnale → faccio + trasformate
↳ quando la finestra scorre sul segnale → operazione di convoluzione
e le ottengo in modo da leggere l'evoluzione del segnale nel tempo

La finestra γ può essere una qualunque finestra di stima spettrale

$$STFT_x^{\gamma}(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,\gamma(t'-t)\,e^{-j2\pi f t'}\,dt'$$

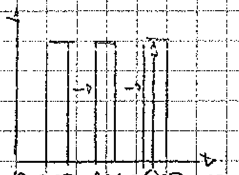
↳ ritardo che va da $-\infty$ a $+\infty$ → è il tempo

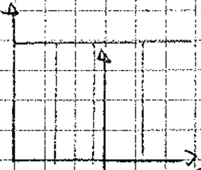
È un primo esempio di trasformata tempo-frequenza:

- $STFT_x^{\gamma}(t,f)$ è un operatore lineare
- è invertibile → conoscendo γ posso riottenere il segnale

- è simmetrica, poiché è una trasf. di Fourier
- non è reale → poiché x(t) è un segnale qualunque moltiplicato per una finestra, non è simmetrica
- non è definita positiva → il segnale è finestrato
- non ha significato di potenza
- presenta perdite di risoluzione a causa della finestratura stretta

Non so che larghezza di finestra usare se non conosco il tipo di segnale → devo andare a tentativi (difficoltà nel dimensionare la finestra) → inoltre non sono sicuro se il segnale è wss all'interno delle finestre.


buona risoluzione


scarsa risoluzione

Risoluzione temporale (localizzazione temporale):

dipende dalla finestra usata → + è stretta meglio è (contrario della freq.)

⇒ o ci guadagno in risoluzione spettrale o in risoluzione temporale

SPETTROGRAMMA

$|STFT_x^{\gamma}(t,f)|^2$ è reale e positivo → è una misura di potenza (come il periodogramma) → versione tempo-frequenza del period. finestrato

→ ha i problemi della STFT e non è + lineare (è quadratico) → come non lo era il periodogramma

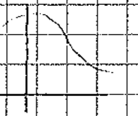
↳ questo operatore ha soprattutto un significato qualitativo

MATLAB: STFT = stft (x, w, fc, NFFT)

segnale; finestra; freq campionamento. la finestra scorre sul segnale spostandosi di volta in volta di un campione

↳ è una matrice: f: righe, t: colonne

STFT = zeros (NFFT/2 + 1, N) → inizializzo, conosco già le dimensioni
INIZIALIZZARE SEMPRE



parto con metà finestra fuori → posso fare zero-padding
→ posso iniziare un po' + avanti (così che la finestra stia dentro)

```
x = zeros(1, 10)      alloco in memoria un vettore di 10 elementi → è + efficiente
for i = 1:10
    x[i] = i;
end
```

```
for i = 1:N                 gestisco con il ciclo for lo spostamento della finestra
    if i < lenght(w)/2       il centro della finestra con il 1° campione del segnale
        faccio zero-padding
    else if i ≥ N - lenght(w)/2
        sono alla fine
    else  xw = w.*x(i-lenght(w)-1 : i+lenght(w)/2-1)
    (sono al centro)          n° totale di campioni dispari (ho simmetria della finestra)
    end(if)
xw = fft(xw, NFFT);
```

$$STFT(:, i) = xw\left(1 : \frac{NFFT}{2} + 1\right)$$

end (for)

$$[STFT, t, f]$$

TRASFORMATA DI GABOR

è un caso particolare in cui $\gamma(t)$ è una gaussiana (devo però limitare il supporto)
↳ da $-\infty$ a $+\infty$ è non reale

$$G_x(t, f) = \int_{-1.1363}^{1.1363} x(t') e^{-\pi(t-t')} e^{-j2\pi f t'} dt'$$

↳ chiudo il supporto

Non è una misura di potenza → dovrei fare il modulo quadro della trasf. di Gabor

03.05.2012

DISTRIBUZIONI BILINEARI

Per risolvere il problema della perdita di risoluzione; ma non devo violare il teorema di Wiener K.

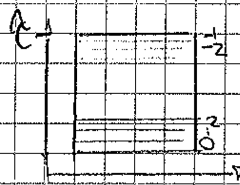
Ridefiniamo la funzione di autocorrelazione: $\left[\begin{array}{l}\cancel{ACF}\\ AFC = \text{funz. di autocorrelazione istantanea}\end{array}\right]$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) x^*(t) dt$$ funz. di autocorrelazione normale
è una misura dell'energia del segnale

Togliamo l'integrale → è cmq una misura di correlazione

$$\underline{R_{xx}(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}$$ FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE ISTANTANEA

↳ va bene per un segnale non stazionario: vedo come evolve nel tempo
↳ calcolo la correl. tra campioni distanti τ → si è reso il ritardo simmetrico



riempiamo la matrice per righe:
- $\tau = 0$ → riempiamo la riga
- $\tau = 1$ → " "
- ...

$$\underline{P_{xx}(t, f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t, \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$ SPETTRO ISTANTANEO

(è la semplice trasf. di Fourier come nel caso stazion.)

$$\underline{P_{xx}(t, f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau} = WV_{xx}(t, f)$$

TRASF. DI WIGNER-VILLE

Esempio: segnale $x(t)$ analitico → ha la stessa trasf. di Fourier ma senza replica spettrale → per non averla deve essere complesso

- $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) + j\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$
  $= e^{j2\pi f_0 t}$
  ↓ ha come trasf. di Fourier una delta a f_0 (non c'è la replica spettrale)

$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$
analitico
↳ trasf. di Hilbert della parte reale (scomposizione in coseni del segnale)
↳ annulla il semiasse negativo della $X(f)$

Calcoliamo WV:

$$R_{xx}(t-\tau) = e^{j2\pi f_0 (t + \frac{\tau}{2})} \cdot e^{-j2\pi f_0 (t - \frac{\tau}{2})} = e^{j2\pi f_0 \tau}$$

$$WV_{xx}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t-\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \delta(f - f_0)$$

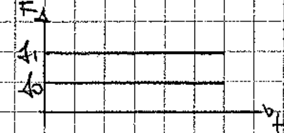
in questo caso non c'è dipendenza dal tempo
è periodico e stazionario

Ottengo $\sqcap$ invece di $\uparrow$ perché ho un secondo di registrazione $\rightarrow \Delta f = 1\,Hz$

(se avessi avuto 10 s $\rightarrow \Delta f = 0{,}1\,Hz$)

- segnale bicomponente : $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_1 t}$ $\rightarrow$ due sinusoidi

  ci aspetteremo una cosa del genere

  $\llcorner\rightarrow$ ma non è quello che otteniamo

facendo la correlazione $\rightarrow$ ho due termini che moltiplicano due termini $\Rightarrow$ 4 termini

$$R_{xx}(t,\tau) = e^{j2\pi f_0\tau} + e^{j2\pi f_1 \tau} + \underbrace{\cos(2\pi(f_0-f_1)t)\, e^{j2\pi\frac{f_0+f_1}{2}\tau}}_{\text{termine interferente!}}$$

$\llcorner\rightarrow$ c'è un termine ad una freq. media con un ampiezza che varia nel tempo $\rightarrow$ modulato in ampiezza

$\llcorner$ dipende dal tempo

$$WV_{xx}(t,f) = \delta(f-f_0) + \delta(f-f_1) + \cos(2\pi(f_0-f_1)t)\,\delta\left(f - \frac{f_0+f_1}{2}\right)$$

$\llcorner$ la trasf. di Fourier la faccio in τ! t non la tocco!!

Nel termine finale $\rightarrow$ termini interferenti $\rightarrow$ localizzato alla metà delle due freq., con ampiezza variabile (è modulato in ampiezza: oscilla come un coseno ad una freq. che è la differenza tra le due freq.)

$\Rightarrow$ in caso di segnali che hanno tante componenti in frequenza (segnali multicomponenti o casuali) i termini interferenziali danno problemi.

I termini misti nascono con il prodotto della correlazione $\rightarrow$ prima di fare il passaggio da $\tau \rightarrow f$ devo rimuoverli / attenuarli (basandomi sulle caratteristiche dell'interferenza)

FUNZIONE DI AMBIGUITÀ

$$\underline{AF_{xx}(\tau,\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t,\tau)\, e^{j2\pi\theta t}\,dt$$

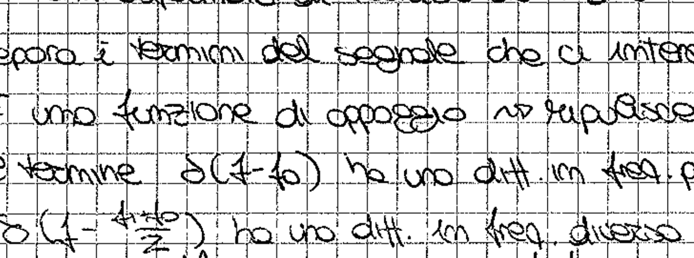
ho il + invece che il −

è l'antitrasformata di Fourier da t a θ ← è una freq.

Separa i termini del segnale che ci interessano dai termini interferenziali

È una funzione di appoggio $\rightarrow$ ripulisce la rappresentazione prima di fare WV

il termine $\delta(f-f_0)$ ha una dtft in freq. pari a 0; il termine d'interferenza $\delta(f-\frac{f_1+f_0}{2})$ ha una dtft. in freq. diverso da 0!



gli in termini di segnale sono separati dai termini interferenti; questi stanno fuori dall'asse $\theta=0$, su cui stanno solo i termini di segnale

$\rightarrow$ cancello solo i termini fuori dall'asse $\theta=0$ ← che sono i segnali

Con una funzione Kernel $\rightarrow g(\tau,\theta)$: 1 dove ho i termini che mi interessano, attenuato negli altri casi

$$\underline{g(\tau,\theta) = e^{\frac{\theta^2\tau^2}{\sigma}}} \qquad \underline{\text{KERNEL DI CHOI-WILLIAMS}}$$

- se σ è grande → scende lentamente
  σ è piccolo → " velocemente
- vale 1 su $\theta = \tau \to 0$
  negli altri punti è < 1, legato a σ (tra 0 e 1)

→ si mette 1 anche l'asse $\theta = 0$ poiché quando delle dette anche delle sinusoidi avremmo avuto i termini importanti su quegli assi.

Ora devo tornare indietro → 2 trasf. di Fourier → $F\theta \to t$ → $F\tau \to f$

trasformata tempo-freq. di Choi-Williams (il kernel usato dà il nome alla trasformata)

$$TF_{xx}(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) g(\tau, \theta)\, e^{-j2\pi\theta(t'-t)}\, e^{-j2\pi f\tau}\, dt'\, d\theta\, d\tau$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi\theta t'} dt'$ → sono nel piano AF
- moltiplico per $g(\tau, \theta)$
- antitrasformo $e^{-j2\pi\theta t}\, e^{-j2\pi f\tau}\, \delta\tau\, \delta\theta$ → passo da $\theta \to t$, $\tau \to f$

è bilineare → perché si basa sulla correlazione istantanea
- anche Wigner-Will è bilineare, solo che il kernel è 1 su tutto il piano
- anche lo spettrogramma è bilineare (con un proprio kernel) infatti con lo spettrogramma la STFT perdeva la linearità

Il kernel fornisce la variabilità tra i vari tipi.

<u>Se voglio che la TF abbia una certa proprietà</u>, <u>devo imporre una certa condizione sul kernel</u>

es. • affinché TF sia positiva → $g(\tau, \theta) = AF_{xx}\{x(t)\}$ deve essere l'antitrasformata da $t \to \theta$ di una funzione $x(t)$ esistente

$$\nexists\, x(t) \xrightarrow[t\to\theta]{F^{-1}} e^{-\frac{\theta^2\tau^2}{\sigma}} \to \text{non è definito positivo la TF}$$

- real distribution ⇒ $g(\tau, \theta) = g^*(\tau, \theta)$ sia WV che CW godono di questa proprietà
  └ la parte immaginaria si annulla
- se sposto τ voglio che anche la trasf. anticipi o posticipi
  stesso discorso se modulo in freq.
  → vale per WV e CW!
- P8 vale per CW, non per WV

Le trasformate di Cohen le abbiamo introdotte per lavorare con il segnale completo; senno per perdere risoluzione e ridurre l'ampiezza del segnale usiamo la STFT
es. utilizzo per valutare sforzi dinamici (fatica muscolare)
es. esercizio isocinetico → aiutati da una macchina isocinetica (fa muovere l'articolazione a velocità angolare costante; varia la resistenza per adeguarsi al carico imposto dal soggetto e mantenere la velocità)

mod. concentrico → lavoro positivo del muscolo → si accorcia
eccentrico → " negativo " " → si allunga

il movimento concentrico è + rapido di quello eccentrico

RF = retto del femore
(estensore ginocchio)

BF = bicipite femorale
(flessore