

STIMA SPETTRALE

Processi casuali \rightarrow informazione limitata nel dominio del tempo \rightarrow dominio frequenze
 \rightarrow quanto energia / potenza ho ad una data frequenza

= insieme di tecniche che a partire da $x(t)$ visualizzo il contenuto spettrale del segnale.

PROBLEMA: stima spettrale e trasformata di Fourier nello realtà sono limitate \rightarrow è difficile farlo bene perché bisogna avere esperienza. \Rightarrow i pc lavorano di FINITO (e teoricamente è INFINITO)

Lo stima spettrale si divide in 2 famiglie:

- TRADIZIONALE (NON PARAMETRICA): basata sul segnale e sulla tras. di Fourier
- PARAMETRICA: creano un modello parametrico del segnale \rightarrow stima spettrale del modello (si creano dei parametri che influenzano il risultato finale)

\rightarrow si usa se la tradizionale (che è già provato) è troppo limitativa o non funziona

È molto + antico di Fourier. Spettro = scomposizione (in frequenze)

Newton, Bernoulli (scomporre il segnale in somma di armoniche) \rightarrow generalizzazione di

Fourier per un qualunque segnale nel dominio del tempo. Serie di Fourier \rightarrow Trasformata di Fourier

serie \rightarrow convergere (risponde ad energia finita) 1900 \rightarrow stima spettrale con strumenti di calcolo
 \rightarrow UNICA CONDIZIONE

PERIODOGRAMMA (periodo = frequenza) \rightarrow funziona male con i processi casuali.

Parallelo tra stima spettrale e statistica (Wiener)

1962: FFT \rightarrow algoritmo di calcolo della trasformata di Fourier

(calcolo tutti i coefficienti a_k e b_k) 1867: stima spettrale ad alta risoluzione (parametrica)

• Dato un segnale $x(t)$ la funzione di autocorrelazione è $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) x^*(t) dt$
(di origine?) se casuale

la funz. di autocorrelazione è un operatore quadratico. Misura la correlazione del segnale con

ha sempre un massimo assoluto nell'origine (non è nel caso di segnali periodici)

• VALOR MEDIO $\bar{x}[n] = E\{x[n]\}$ complesso coniugato

• AUTOCORRELAZIONE: $R_{xx}[m_1, m_2] = E\{x[m_1] x^*[m_2]\}$ possa passare da scrittura $R_x(\tau)$

solo se il segnale è stazionario ($\tau = m_1 - m_2$)

I coefficienti di autocorrelazione vanno da -1 a +1

• CROSSCORRELAZIONE: correlazione tra i campioni di un segnale $x(t)$ e i campioni di un segnale $y(t)$

• AUTOCOVARIANZA: rispetto all'autocorrelazione, è centrata rispetto al valor medio

perde alcune proprietà che ha l'autocorrelazione, i coefficienti di autocovarianza non sono limitati (si può normalizzare)

Il segnale deve essere STAZIONARIO IN SENSO LARGO (WSS) \rightarrow requisito fondamentale per effettuare la stima spettrale.

\rightarrow primi due momenti statistici indipendenti dal tempo (valor medio e autocorrelazione) \rightarrow non cambiano nel tempo, costanti nel tempo

È un problema (per i segnali casuali): per il valor medio è facile, per l'autocorrelazione è difficile \rightarrow o meglio si stima della funzione di autocorrelazione (non può fare $\tau \rightarrow \pm \infty$)

limpiamo la STAZIONARIETÀ ad una FINESTRA TEMPORALE (dalla parte di segnale che consideriamo)

TEOREMA DI WIENER-KHINTCHINE

diff (discreto)

La densità spettrale di potenza è la tras. di Fourier della sequenza di autocorrelazione

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T} \quad \text{segnale } x[n] \text{ WSS}$$

Esiste anche questo teorema per segnali di energia

funzioni sia nel discreto (sequenza di autocorrelazione) che nel continuo (funz. di autocorrelazione)

La densità spettrale di potenza è una quantità continua in frequenza

PROPRIETÀ:

- PR è SIMMETRICA: perché è una trasf. di Fourier
 - REALE: la funz. di autocorrelazione è simmetrica rispetto a zero \rightarrow è una funzione pari \rightarrow la trasf. di Fourier di una funzione pari è una quantità reale
 - POSITIVA: perché misura la potenza, che è sempre positiva
 - \rightarrow la funzione di autocorrelazione è quadratica: TEOREMA DI PARSEVAL
 - $\rightarrow F\{|x(t)|^2\} \rightarrow e^{-j2\pi ft}$ base ortogonale
- se scompongo la f. di autocorrelazione con la base ortogonale ottengo autovalori semidefiniti positivi (≥ 0)

Però dato che le serie infinite (infinito) non ci sono \rightarrow non ci sono neanche le proprietà

Densità spettrale di potenza scritta anche da Shuster

\hookrightarrow definizione equivalente (se il segnale è WSS ed ergodico)

Esistono due metodi per calcolare la stima spettrale

\rightarrow diretto: PERIODOGRAMMA (Shuster)

\rightarrow indiretto: CORRELOGRAMMA (passo attraverso la funz. di autocorrelazione)

sono teoricamente equivalenti, ma nello pratico no perché si commette il km per m. $\rightarrow \infty$

22-03-2012

In teoria i due metodi sono equivalenti, ma nello pratico no

metodo diretto: si stima direttamente la densità spettrale di potenza

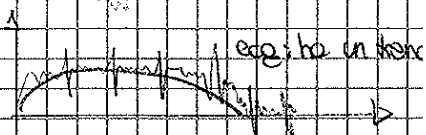
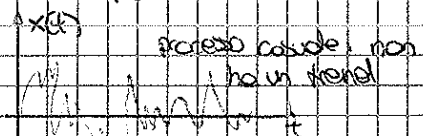
metodo indiretto: si stima la sequenza di autocorrelazione (è uno stima infinito)

METODO DIRETTO

• acquisizione di lunghezza finita (N campioni) \rightarrow devo conoscere la f_c no guardare e capire cosa è

• Rimozione trend: dipende, bisogna vedere se ce l'ha però \rightarrow è un andamento non costante del segnale (es. parabolico)

se il trend c'è lo tolgo prima di fare la stima spettrale



MAZAS: detrend \rightarrow non so come funziona

trend tipico di una deriva termica

Perché togliere il trend? perché non è segnale

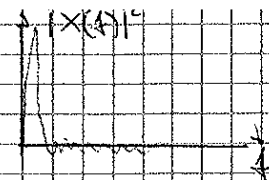
es. \rightarrow deriva di posizione dell'eco

\rightarrow effetto di movimento del sensore (come i muscoli si muovono)

\hookrightarrow in questo caso: tratto la parte e la sottopongo

Le variazioni del trend sono molto + ampie di quelle del segnale

↳ facendo lo stima spettrale (quadratica) si ha un gran parte a basso freq non si vede il segnale



• Rimozione del valor medio: va sempre fatto, doppiato sempre!

MATLAB: mean(1) trovare il valor medio

compensiamo $x(t) = \bar{x} + x_0(t)$

$$X = X - \text{mean}(X)$$

$$|X(f)|^2 = |F(\bar{x} + x_0(t))|^2 \approx \bar{x}^2 \cdot \dots$$

\bar{x}^2 : è a freq zero
 $K_0(f)$: quello che interessa
 doppio prodotto: su tutte le frequenze!!

• Si fa lo stima spettrale: si può ripetere variando i parametri finché non si ottiene cosa si vuole → processo iterativo

→ numero di punti dello FFT: devo decidere su quanti punti lo devo rappresentare

all'aumentare dei punti aumento la variabilità casuale dello FFT

→ finestramento

METODO INDIRETTO

- Acquisizione
- Rimozione trend
- Rimozione valor medio

• Stima autocorrelazione

$R_{xx}(\tau)$ ↳ ritardo tra i campioni del segnale

→ ho un solo parametro: il ritardo massimo

↳ ritardo: $0 \leq \tau \leq N-1$
↳ di campioni

[i ritardi per campioni che non esistono sono indeterminati → si pongono

ESEMPIO: sopra: periodogramma originale

sotto: periodogramma di Welch per rimuovere variazioni casuali

PERIODOGRAMMA è sempre reale e positivo (è un modulo quadro)

CORRELOGRAMMA: trasf. di Fourier della sequenza di autocorrelazione (è definito tra $-\infty$ e $+\infty$ ⇒ può essere negativo)

ma i valori negativi sono un assurdo fisico → o si pongono a zero

o si rendono positivi (segnoandato)
 non rappresentare mai un correlogramma con parti negative

Ho calcolato lo stima spettrale di potenza $\hat{P}_{xx}(f)$. La potenza totale è l'area sottesa della curva (per il correlogramma bisogna guardarsi di togliere / sottrarre i contributi negativi)

FINESTRATURA

↳ $w[n]$ window/weight

FINESTRA: segnale nel dominio del tempo che somoltiplichiamo ad x prima di fare stima spettrale

in frequenza → $X(f) = \text{FFT}\{w[n]x\}$

applicata alla sequenza di autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$
↳ finestra spettrale $\hat{P}_{xx}(f) = \text{FFT}\{w[\tau]R_{xx}(\tau)\}$

È l'ultima operazione che faccio prima dello FFT

Anche se non lo facciamo \rightarrow finestre impiegate (es. sinusoidi di un secondo \rightarrow sinusoidi * pot)

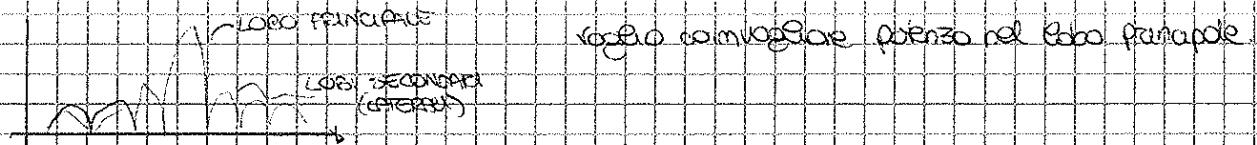
pot = funzione boxcar

$$x_0[m] = x[m] \cdot \text{rect}[m] \quad \rightarrow \text{in freq: } X_0(f) = X(f) * D_N(f)$$

È trasformata di una porta \rightarrow sinc digitale o kernel di Dirichlet

Faccendo una finestra perdo in risoluzione \rightarrow problema dei lobi laterali

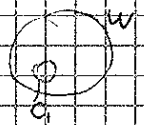
- Potrebbe anche essere lo spettro di + sinusoidi (side lobe), ma i lobi potrebbero coprirlo \rightarrow LEAKAGE di POTENZA = perdita che si ha per effetto della finestra in stessa banda



Dato che ho finestra c'è (complicato x se l'arco di finito), posso scegliere la finestra in modo da attenuare i lobi laterali

LEAKAGE causa sottostimazione \rightarrow

statistico: popolazione W , variabile casuale X definita su W
 \hookrightarrow valore medio pop μ_x



Voglio uno strumento per stimare μ_x : si prende un campione C_1 e si calcola il valore medio (non posso misurare $\mu_x \rightarrow$ dato calcolato su tutta la popolazione)

per verificare lo stimatore prendo più campioni (C_2, C_3, \dots) e calcolo il valore medio \hat{x} (stimatore CORRETTO (o non sottostimato))

$$E\{\hat{x}\} = \mu_x \quad \text{il valore atteso della media campionaria deve essere uguale al medio $\mu_x$$$

il processo deve essere ERGODICO per lo stimatore

quando $E\{\hat{x}\} \neq \mu_x$ si dice che lo stimatore è POLARIZZATO

la varianza è POLARIZZATA (è definito per $\frac{1}{N-1}$)

medio aritmetico: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i$ $E\{\bar{x}\} = \frac{1}{N} \sum E\{X_i\} = \frac{1}{N} \sum \mu_x = \mu_x$

Polazzazione = differenza tra il valore atteso dello stimatore e periodogramma

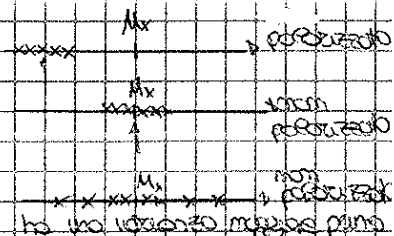
lo spettro reale di $x \Rightarrow E\{\hat{P}_{xx}(f)\} - P_{xx}(f)$

CONSISTENZA di uno stimatore: quando lo varianza è piccola

rispetto al valore da stimare

$|E\{\hat{x}\} - \mu_x|$ differenza tra stimatore e quello da stimare

$P\{|E\{\hat{x}\} - \mu_x| \leq \epsilon\} = 1$ definizione di CONSISTENZA
 Probabilità \hookrightarrow quantità piccola e piccola



Non vorremo avere uno stimatore con: polazzazione e varianza di stimatore pari a zero

\rightarrow misura stimatore è cost (ideale): varianza che va bene se è piccola o tende a zero asintoticamente

la polazzazione è causata solo dalla finestra \rightarrow x migliore = valore di finestra

Parametri finestra:

- larghezza del lobo principale
- velocità di decremento dei lobi secondari
- complessità dei lobi laterali

→ Es. detto di Dirac sarebbe nello spettro la finestra ideale: ma non è fisicamente realizzabile

- finestra rettangolare (è molto piccola, ma i lobi laterali alti)
- triangolare o di Bartlett → non è usata
- finestra di Hann, finestra \cos^2
- finestra a coseno realizzata di Hamming
↳ finestra di base di Matlab
- finestra di Chebichev (velocità di decremento pari a 0)

lo spettro delle finestre ha sempre un lobo pari a 1

MATLAB: ci sono già le funzioni di finestra e si genera il vettore e lo si moltiplica per il segnale nel tempo

Sollec. slide 29-30

STIMA SEQUENZA AUTOCORRELAZIONE (ACS)

Stimatore per ritardi positivi e negativi → processo stazionario ed ergodico N campioni $x[n]$

La sequenza di autocorrelazione è costituita da $2N-1$ ($N-1$ da due parti e 0 al centro)

- massimo ritardo: $L = \max |p| \rightarrow$ devo calcolare $2L+1$ punti

es.

x

• $m=0$

⇒

⇒ \sum somma gli elementi

$\frac{1}{N}$

$\hat{r}_{xx}[0]$

MATLAB: prodotto punto a punto per sommare: sum

*

→ oppure forisco il prodotto $x + (x^*)^*$

• $m=1$

⇒

⇒ \sum

$\frac{1}{N-1}$

$\hat{r}_{xx}[1]$

Per L ritardi negativi lo stesso dall'altra parte → ma la funzione di autocorrelazione è simmetrica

$$r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[+m] \quad \text{è il complesso coniugato}$$

MATLAB: creare funzione $\text{acs}(x, m(\text{lag}), bias)$

$\hat{r}_{xx}[m]$

x_{acs} è un vettore che contiene il valore della sequenza di autocorrelazione per ogni ritardo

Il \hat{r}_{xx} è negativo (è meglio in fondo (da destra verso sinistra))

fft shift → prende il vettore, lo taglia in due e mette il primo del primo metà

disegno normalizzare prima di usare del for
(dividendo per N-1)

Stimatore non polarizzato della sequenza di autocorrelazione

$$E\{\hat{r}_{xx}[m]\} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E\{x[n+m]x^*[n]\} = r_{xx}[m]$$

correggere slide 33

La varianza aumenta con m e si annulla solo se $N \rightarrow \infty$. Lo stimatore non è consistente.

\rightarrow non è polarizzato ma non è consistente (è uno stimatore modello variabile)

non molto corretto

In alcuni casi si utilizza uno STIMATORE ALTERNATIVO $\hat{r}_{xx}[m]$: si usa $\frac{1}{N}$ per produrre rata

è uno stimatore polarizzato (ovviamente non polarizzato per $N \rightarrow \infty$)

ma lo stimatore è asintoticamente consistente

\Rightarrow si usano tutti e due gli stimatori, o secondo se si preferisce lo polarizzazione o lo consistente

MATLAB bias = 0 non polarizzato
-1 polarizzato

\rightarrow cambia solo il cost. di normalizzazione

$$\frac{1}{N-1}$$

xcorr: calcola la sequenza di autocorrelazione di un segnale

per plotare in funzione del ritardo, si deve generare un asse x dei ritardi

(do - m*100 a + m*100)

Lo stimatore polarizzato ha dei vantaggi (il secondo)

• il primo può causare degli errori in casi particolari: es. valore maggiore non nell'origine (massimo assoluto)

Analogamente si può fare lo stima della sequenza di trascorrelazione (CCF)

• molto simile, ma non è vero che $S_{xy}[m] = r_{xy}^*[m]$
ritardi negativi sono simmetrici

26-03-2012

correlogramma = trasformato di Fourier discreto della sequenza di autocorrelazione discreta

• inizialmente si va a calcolare la sequenza di autocorrelazione per un m^o di ritardi

$$\leq \frac{N-1}{10} \text{ campioni}$$

\rightarrow per tenere sotto controllo la variabilità (è un processo, non è legge)

[di aumentare del massimo ritardo aumenta la variabilità]

Calcolare la polarizzazione di $\hat{r}_{xx}(f)$ \rightarrow calcolare il valore atteso, però non facendo lo

trasformato di Fourier TRONCATA \rightarrow faccio una finestritura (rettangolare)

Anche partendo da uno stimatore non polarizzato della sequenza di autocorrelazione, il correlogramma è comunque polarizzato

Stimatore alternativo \rightarrow calcola il valore atteso. Questo usato la finestritura è

triangolare, è comunque polarizzato, ma di meno di prima (per quanto riguarda la

\rightarrow la variabilità

polarizzazione, è meglio la finestritura triangolare, che però ha meno risoluzione)

ma ha meno risoluzione. Inoltre ha meno variabilità (perché lo stimatore ha meno variabilità)

Calcolando il correlogramma su un reticolo pari a $N-1$, si ottiene un periodogramma identico a quello di Shuster.
↳ dallo stimatore ottimo

Per ridurre la varianza per la modifica della finestra w bisogna farlo sulla sequenza di autocorrelazione (prima della trasformata di Fourier) \Rightarrow moltiplica per $w[m]$.

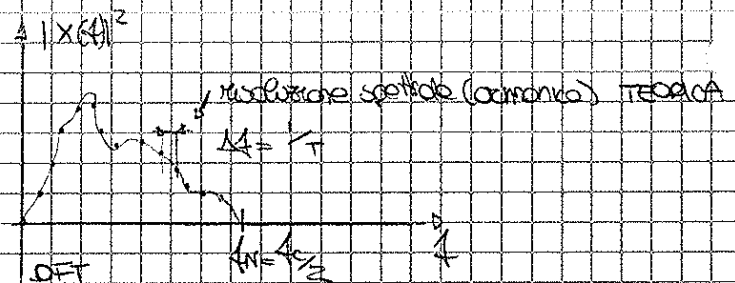
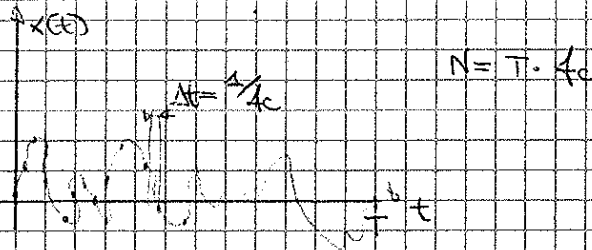
unico vincolo $w[0] = 1 \rightarrow$ un 0 es τ_{xx} vale l'energia del segnale, non bisogna alterare le proprietà energetiche del segnale (HATSB: raramente es ≤ 1 , ma controllabile)

Inoltre finestra = di lunghezza (n° campioni) dispari, così da avere una seq. simmetrica. Non avere valori negativi nello spettro dello w .

la varianza decresce come $\frac{1}{N}$ (completamente consistente)

Blackman e Tukey hanno proposto un $L_{max} \leq \frac{N}{D} \Rightarrow$ correlogramma di Blackman e Tukey (no finestra trapezoidale né rettangolare)

Prodotto tempo - Larghezza di banda



La risoluzione spettrale è determinata da T , e f_0 non centro nullo.

La risoluzione spettrale è l'inverso della lunghezza del brano del segnale

$T \cdot B = 1$ per segnali deterministica

Per i processi casuali bisogna calcolare T_e e B_e prendo il campione e lo schiaccio fino ad ottenere un rettangolo di altezza il valore che ho nell'origine. La base del rettangolo è il durata temporale equivalente T_e . B_e è lo stesso caso nel dominio della frequenza

$T_e \cdot B_e = 1$ per processi casuali gaussiani

La risoluzione spettrale è quella reale! estendo la FFT una quantità continua potrei prendere quanti valori voglio, ma ogni intersecando.

↳ risoluzione spettrale apparente $\Delta f'$

$\Delta f' < \Delta f$

• $f_0 = 100 \text{ Hz}$ $\Rightarrow N = 10^3$ $\Delta f \rightarrow 0.1 \text{ Hz} = 100 \text{ mHz}$
 $T = 10 \text{ s}$ $NFFT = 500$ R campioni della FFT
 se volessi $\Delta f' = 50 \text{ mHz}$ $NFFT = 1000$ punti

\Rightarrow SONO $NFFT = 1000$
 $NFFT = \frac{1}{\Delta f' \cdot T}$

Ma bisogna inserire il FATTORE DI QUALITÀ Q per processi casuali non gaussiani di lunghezza finita

$Q \cdot T_e \cdot B_e = 1$

Normalmente Q è un quantità minore di 1

$Q = \text{varianza dello stimatore} / (\text{valore atteso dello stimatore})^2$

↳ aumento all'aumentare della varianza (e quindi del rumore)
↳ grande varianza, minore consistenza dello stimatore

A volte viene imposto un valore, es. $Q = \frac{1}{3}$ → per ottenere occorre che il n° massimo dei ritardi sia $\leq \frac{N}{10}$

• Con i dati di prima $Q = \frac{1}{10} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{T \cdot Q} = 1 \text{ Hz}$ sullo spettro solo i campioni che distano 1 Hz sono significativi; il resto è rumore

⇒ T è il periodo in secondi dell'ultimo caso prima dello trasformata di Fourier (lunghezza del segnale - lunghezza della sequenza di autocorrelazione)

Ripetere lo stima spettrale variando il parametro per studiarlo meglio

$\overleftarrow{\text{FFT}}(x, NFFT)$

29-03-2012

$NFFT > N$ se si rappresenta su un n° di punti minore o uguale a x

ZERO PADDING

Si aggiungono degli zeri al termine della sequenza di campioni del segnale

es. $x[0] \dots x[N-1] + x[N] \dots x[2N-1]$ zeri

faciamo il transf. di Fourier:

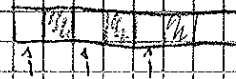
$$x[k] = T \sum_{m=0}^{2N-1} x[m] e^{j2\pi km/N} = T \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{j2\pi km/N}$$

poniamo $k=2p$ $x[2p] = T \sum_{m=0}^{N-1} x[m] e^{-j2\pi pm/N}$ → esempio solo i coefficienti di posto pari

Vengono distanziati di un posto: se calcolasse tutti gli altri

elementi (sono le altre N grandi soluzioni che mi mancano)

↳ sono calcolati come interpolazione di quello prima, quello dopo e $\frac{\sin x}{x}$ trasformata della porta



Se stessi aggiunti gli zeri all'inizio, o metà all'inizio e metà alla fine non cambia nulla (basta non spezzare i valori)

→ esistono N campioni della FFT che non cambiano mai: si interpolano dei punti complessi

[1. punti servono per coprire la FFT e la sua regione spettrale: es 16 punti: uno in 0, 8 a destra e 7 a sinistra]

La RISOLUZIONE SPETTRALE TEORICA è sempre la stessa.

Lo RIS. SPET. APPARENTE si può evitare, ma se aumento aumento anche la variabilità

PERIODOGRAMMA

la definizione originale c'è un valore atteso → nella pratica si omette, e si semplifica anche limite $N \rightarrow \infty$ → sequenza lunga N campioni → FFT → modulo quadro

Lo stimatore è polarizzato: $E\{\hat{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f) * W(f)$ e non è consistente

⇒ questo stimatore equivale al correlogramma che deriva dallo stimatore periodizzato per $N-1$ ritardi. Per risolvere sono stati proposti una serie di metodi.

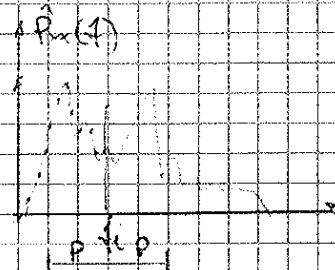
- **padding** → finestro il segnale (ultimo caso primo della FFT)
- **consistenza** → diminuire la varianza:
 - DANIELL
 - PARTLET
 - WELCH

METODO DI DANIELL

Aumentare la consistenza mediando dei valori adiacenti.

Si parte dal periodogramma semplice: per una frequenza f_i si

mediano il valore di f_i e P valori a destra e sinistra ($2P+1$ valori)



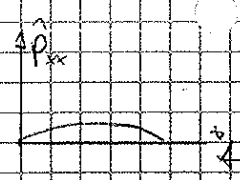
Ripeto per $0 \leq i \leq 4N$ e ottengo il nuovo spettro

(devo aggiungere P zeri da destra e da sinistra → faccio zero-padding)

⇒ è come un filtro passa-basso (medio-passa-basso)

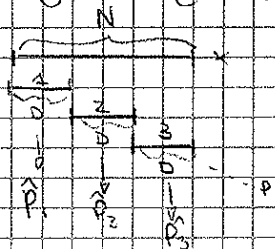
In analisi dei segnali biomedici non è molto utilizzato:

- come scegliere P ? → se è troppo grande medio tutto, sovrappeso il segnale
- se è piccolo è inutile
- non abbiamo controllo di quanto diminuisce la varianza



METODO DI PARTLET

Segnale lungo N campioni → lo spezzo in P segmenti di lunghezza D



Di ciascun pezzo calcolo il periodogramma (è il caso di Fourier)

Il periodogramma di Parlett è il medio dei periodogrammi semplici dei vari pezzi

- pezzi dello stesso lunghezza
- pezzi non sovrapposti
- non si fa il finestro

La deviazione standard diminuisce di un fattore pari a \sqrt{P} (se c'è il rumore) $\Delta f = \frac{N}{4c}$

Il problema è che ho oscurato il segnale → risoluzione spettrale teorica ($\Delta f = \frac{1}{N}$)

de $\frac{1}{P}$, ed è molto maggiore di quella del segnale intero.

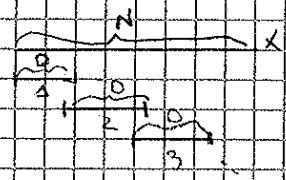
→ devo trovare il giusto compromesso.

segnale eeg: mi serve una risoluzione spettrale $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ ⇒ con 10 s di osservazione posso dividerlo in 10 pezzi e ottenere questa risoluzione.

La padding è lo stesso del periodogramma semplice → non modifica

La varianza diminuisce di un fattore P

METODO DI WELCH



prende delle finestre che parzialmente si sovrappongono \rightarrow un certo numero di campioni in comune

il n° di campioni comuni si chiama overlap, la lunghezza dei segmenti è uguale a D. Abbiamo più segmenti di Bartlett. (Prolungato)

Inoltre ciascun segmento viene filtrato prima di calcolare il periodogramma

Otengo P periodogrammi e ne faccio la media

- è comunque prolungato \rightarrow il valore dipende dalla finestra
- non possiamo più dire di quanto migliora la varianza a causa della sovrapposizione (i cui sono campioni correlati tra loro) \rightarrow non possiamo quantificarlo
- \rightarrow non si usa tanto overlap: è sempre minore del 50% di D

MATLAB: `pwelch` \rightarrow permette di calcolare welch e `bartlett` \rightarrow qualunque periodogramma (tranne Donati)

(E vecchia funzione era `psd`)

`psd(x, NFFT, fc, w, overlap)` finestra: il valore si default è hamming. Pwelch modifica l'ordine

es. periodogramma semplice \rightarrow `psd(x, NFFT, fc, boxcar(N), 5)`

periodogramma bartlett \rightarrow `psd(x, NFFT, fc, boxcar(D), 1)`

se metto una finestra di lunghezza minore del segnale \rightarrow spezzo il segnale, e

finestra, calcolo il periodogramma e do in uscita la media (se $P \cdot D \neq N$ lo `over-padding`)

per welch \rightarrow `psd(x, NFFT, fc, hamming(D), P/2)`

in uscita \rightarrow `[P, f] =`

\rightarrow `P`: asse delle frequenze in Hz \rightarrow `psd(f, P)`
 \rightarrow `f`: periodogramma

restituisce solo il semiasse positivo

\rightarrow overlap del 50%