

# STIMA SPETTRALE PARAMETRICA

Si usa quando non si può usare quello modulare:

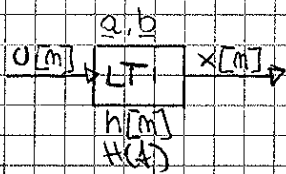
- problema della risoluzione: es. risoluzione di 1 mHz che fisiologicamente dura 1/s
- frequenza di campionamento non costante  $\rightarrow$  segnali evento correlati (se l'evento non è periodico si campiona a freq. non costante) es. misura della pressione arteriosa in corrispondenza del picco sistolico.  $\Rightarrow$  ottergo uno spettro distorto, ...

la stima spettrale parametrica ovvia a questi due problemi

$\rightarrow$  stima spettrale dipendente dai parametri di un modello  $\Rightarrow$  modellizzazione parametrica del segnale (che poi non uso più) bisogna fare un buon modello  $\rightarrow$  possono essere segnali non modellizzabili

## MODELLAZIONE DI UN PROCESSO CASUALE

modelli AR, MA, ARMA, scelta dell'ordine (è fondamentale perché si adatta meglio, dipende dalla stima dei parametri (a e b)  $\Rightarrow$  ottengo lo d.s.p. del modello



In questo caso il segnale  $x[m]$  è l'uscita del sistema LTI

$u[m]$  processo casuale gaussiano bianco (fa lo stesso, basta che sia a banda larga, scelgo questo per semplicità)

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$x[m] = -\sum_{k=1}^p a[k] x[m-k] + \sum_{k=0}^q b[k] u[m-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] u[m-k]$$

$\rightarrow$  convoluzione

$\left\{ \begin{array}{l} \text{parte da 1 perché il primo termine di } a = 1 \text{ ed è } * x[m] \\ \text{parte da 0 perché } u \text{ parte da } 0 \end{array} \right.$

come creare  $x[m]$  a partire da  $\hat{u}$  e  $\hat{h}$  (oppure  $\hat{a}, \hat{u}, \hat{b}$ )

Faccio lo trasformata z di a, b, h  $\Rightarrow$  lo d.s.p. si ottiene

$$P_{xx}(z) = P_{uu}(z) \cdot H(z) \cdot H^*(1/z^*)$$

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{uu}(f)$$

lo spettro di  $x(f)$  è dato dalla funzione di trasf. del sistema

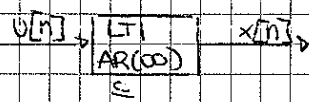
Ma noi non conosciamo  $\hat{u} \rightarrow$  conosciamo lo spettro e meno di un fattore di scala (trasformo del segnale)

Il tipo di modello non è molto significativo  $\rightarrow$  è importante è l'ordine del modello è più facile lavorare con un modello AR  $\rightarrow$  l'unico incognito è  $a[k]$  (e l'unico cosa noto è  $x$ )

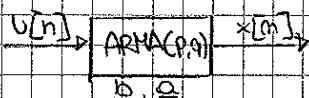
## 1) SCELTA DEL MODELLO

possiamo modellizzarlo con qualunque tipo di filtro di ordine sufficientemente grande

Modello AR di ordine infinito:  $C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c[k] z^{-k}$



$$H(z) = \frac{1}{C(z)}$$



$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Uguagliamo le due f.d.t

$$A(z) = C(z) * B(z)$$

supponiamo  $p \leq q$   $\rightarrow$  i parametri di un modello di ordine infinito sono legati a parametri

di un modello di ordine finito con un sistema LTI  $\rightarrow$  eq. Yule-Walker

[usando un filtro MA,  $H(z) = C(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \rightarrow C(z) \cdot A(z) = B(z)$

è la stessa cosa con a e b scambiati]

Devo avere più coeff. e di quanti sono a e b  $\rightarrow$  sistema risolvibile

$\hookrightarrow$  si parte da un ordine alto (non  $\infty$ ) per scendere ad un ordine inferiore

AR  $\rightarrow$  picchi stretti e ampie valli

MA  $\rightarrow$  opposto: picchi larghi e valli strette

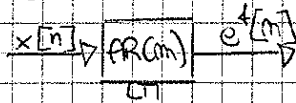
ARMA  $\rightarrow$  picchi stretti e valli strette

26/06/2017

Il modello non è tanto influente  $\rightarrow$  l'ordine deve essere corretto.

I parametri del modello sono legati alla sequenza di autocorrelazione

Modello autoregressivo = PREDITTORE LINEARE



Predittore lineare diretto (forward), dati i valori precedenti si calcolano i valori futuri  $\rightarrow$  servono gli ultimi m campioni precedenti

[predittore backward:  $\hat{x}^b[n] = -\sum_{k=1}^m a^b[k] x[n+k]$ ]

Se un segnale contiene un'incertezza il predittore lineare non la bene

errore di predizione:  $e^f[n] = x[n] - \hat{x}^f[n]$  è un processo casuale

varianza dell'errore:  $\sigma^2 = E\{|e^f[n]|^2\}$

Lo stima spettrale parametrica si applica a processi casuali  $\rightarrow$  non in casi bordi

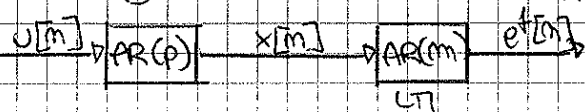
Per valutare quanto ho sbagliato, si guarda la varianza dell'errore di predizione

$x[n] = -\sum_{k=1}^m a^f[k] x[n-k] + e^f[n]$  il resto del sistema UT è  $e^f[n]$

$\hookrightarrow$  è un modello a media mobile (autoregressivo finito) modellizzato come

In questo modo l'errore di predizione è un processo casuale bianco se e solo se l'ordine

del modello m è uguale all'ordine di un AR (p) che ha generato x



teniamo poco filtro e lavoreremo con modelli AR

$\hookrightarrow$  si chiama anche filtro sbiancante

(praticamente entro  $x[n]$  con l'informazione ed esce  $e^f[n]$  bianco  $\rightarrow$  il filtro sbiancante sottrae tutta l'informazione)  $\Rightarrow$  lo spettro associato al modello è lo spettro del segnale

$P_{xx}(f) = P_{AR(m)}(f)$

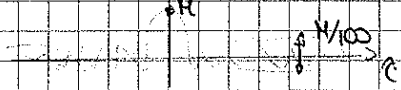
Per avere il backward si gira il vettore dei coefficienti del predittore forward

Devo verificare che  $e^f[n]$  sia un processo casuale bianco:

1° spettro piatto

2° sequenza di autocorrelazione nulla con tutte l'energia nell'origine

2) Si calcola la sequenza di autocorrelazione di  $e_f[n] \rightarrow$  si sceglie quello parzialmente perché è + consistente



Per vedere se è bianco si guarda che le oscillazioni siano minori di un tot del massimo

modelle (la variabilità dipende dal n° di termini che scelgo)

→ è un metodo statisticamente corretto, ma limitato nella pratica

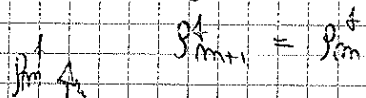
1) devo scegliere il tipo di stimatore (periodogramma / correlogramma...) e il parametro (frequenza scelta)

→ devo aver trovato uno scoglio delle oscillazioni

⇒ non si usa questo criterio nella pratica; si usa:

Se aumento l'ordine del modello (del predittore lineare) scopro che sono nulli i coeff.

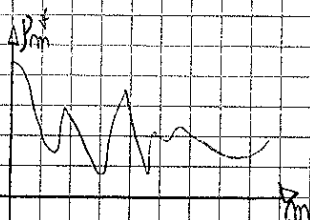
da m in avanti



la varianza diventa asimmetrica, costante (alop m)

Si va a vedere per quale valore di m la varianza dopo non decresce più

→ non è un criterio statisticamente corretto, ma praticamente funziona



Se ottengo una varianza di questo tipo.

→ non si riesce a modellare con un processo AR

(→ verifica della modellabilità del segnale)

[tutto questo si fa con una routine: segnale, ordine → varianza]

Trovato m si risolve il sistema di Yule-Walker

→ ci sono degli algoritmi in forma successiva <sup>per calcolare i coefficienti</sup>; il coeff. di ordine m deriva da

quello prima → non deve ricalcolarsi sempre; si aggiunge quello dell'ordine successivo

↳ nella pratica sono tutti l'algoritmo di Levinson

In Matlab esistono 6 algoritmi diversi per calcolare i coeff. a:

• soluzione diretta del sistema di Yule-Walker → molto poco usato

• metodo di Burg: coefficienti di riflessione (genera i coeff. che minimizzano l'errore di predizione in totale) <sup>minimo errore</sup> plurigi

• metodo della correlazione: si minimizza l'errore quadratico → non si usò

• " " " modificato: minimizza l'errore passo passo con Burg

Stima spettrale ad alta risoluzione (segnale molto corto → voglio alta risoluzione)

→ con il modello possiamo ottenere la risoluzione che vogliamo

se il modello è corretto:  $P_{xx}(f) = P_{recim}(f)$

→ posso avere una risoluzione infinita

Calcolare gli elementi che mi mancano sul modello tramite il predittore lineare

(l'unico vincolo è che p deve essere minore degli elementi della seq. di autocorrelazione)

↳ lo si ottiene dopo aver usato il modello

se ho 10 elementi, il max p=10

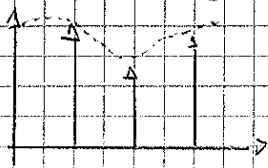
⇒ la stima spettrale parametrica posso aumentare la risoluzione (fino ad ∞)

• ma non è detto che il modello sia corretto

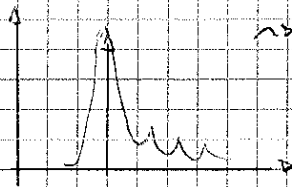
- i numeri che vanno ad aggiungere sono correlati ai valori precedenti (sono una combinazione lineare)
  - ↳ è una regressione

## PROBLEMI:

- se l'ordine è basso si ottengono spettri 'smooth'



- se l'ordine è alto  $\rightarrow$  picchi spettrali 'spuri'



$\rightarrow$  splitting di picchi: un picco si divide in due modo simili



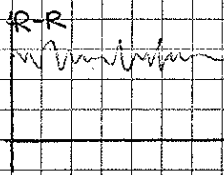
l'ordine corretto è il minimo valore di  $m$  per cui  $\hat{S}_0$  varianza è costante (non quelli + alti)

## APPLICAZIONE: segnale di variabilità cardiaca

↳ il cuore non è una pompa periodica: la frequenza dipende dallo stato del soggetto, la distanza tra i battiti è una variabile casuale.

Si deriva il segnale R-R dall'ECG: distanza temporale tra due onde R

- il loro medio è l'inverso della freq. cardiaca media (segnale a valor medio non nullo)



non è campionato ad una  $f_s$  costante  $\rightarrow$  campionano ogni volta che sento un battito

è molto ben modellizzabile con un processo AR

In questo caso il valor medio non deve essere fatto  $\rightarrow$  bisogna ricordarsi quindi che il predittore lineare lo modella  $\rightarrow$  deve usare un ordine un po' più grande (è + comodo toglierlo)  $\Rightarrow$  è comunque consigliabile

Per periodogramma e correlogramma il valor medio va tolto (più facile polarizzare)

è uno spettro AR: picchi stretti e valli ampie sono le stesse bande dell'autoregressione

il stima spettrale parametrico richiede un segnale stazionario  $\rightarrow$  deriva da un modello LTI

- LF: funzionamento del sistema simpatico (40-60 mHz  $\rightarrow$  100 mHz) (vasodilatazione, vasocostrizione)
  - ↳ la modulazione di resistenza dei vasi si propaga anche sul cuore

- HF: banda della respirazione  $\rightarrow$  è associato al regime di pressione intratoracica

$\rightarrow$  se predomina la banda respiratoria: conduzione di esercizio

Non si riesce a collocare esattamente il valore di potenza delle bande: per spettro il consumo è meno di una costante per il stima parametrico  $\rightarrow$  fattore di scala è normalizzato

↳ si utilizzano per valutazioni relative tra una banda e l'altra

Per la variabilità cardiaca viene usato il stima parametrico perché:

- è a campionamento e  $f_s$  non costante  $\rightarrow f = 1 \text{ mHz} \rightarrow 1000 \text{ sec}$ : il segnale non è + stazionario
- il durata del segnale è troppo corto rispetto alla risoluzione che voglio