EQUAZIONI DI MAXWELL

In parte esistevano già → Maxwell ha aggiunto un pezzo a queste equazioni che non aveva prove sperimentali

Hertz dieci anni dopo ha dimostrato cosa Maxwell aveva postulato

(i nostri occhi non distinguono ~~il~~ il campo VETTORIALE del campo → la luce ha la stessa probabilità di essere polarizzato in modi diversi) [ottica geometrica = eq. di Maxwell con $\lambda \to 0$]

EQ. DI MAXWELL NEL VUOTO

Notazione:

rot $\equiv \nabla \times$ } si applicano a vettori

div $\equiv \nabla \cdot$

grad $= \vec{\nabla}$ → si applica ad uno scalare → diventa un vettore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla \times \bar{A} = (\ ) \times (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) = \cancel{\frac{\partial}{\partial x} A_x \hat{x} \times \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial x} A_y \hat{x} \times \hat{y}$$

Teorema di Helmotz: a meno di un campo costante da un rotore e una divergenza si può ricavare il campo

17-10-2012

$\varepsilon_0 , \mu_0 \to \bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{D}$ induzione ~~no~~ elettrica, induzione magnetica $\bar{B}$

$\bar{E} \to V/m$, $\bar{H} \to A/m$, $\bar{B} \to$ Tesla

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \qquad \bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{H}$$

- $$-\nabla \times \bar{E} = \frac{\partial}{\partial t}\mu_0 \bar{H}$$
- $$\underbrace{\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \bar{E}}_{\text{regione priva di sorgente}} + \bar{J}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL

$\bar{J}$ → densità superficiale (per unità di area) di corrente

dimensioni fisiche (analisi dimensionale) : $\nabla \times \bar{H} \to \frac{\partial}{\partial x}\bar{H}_y \ldots \quad [A/m^2]$

$\bar{J}$ nel ~~vu~~ vuoto è un termine di sorgente (o forzante) noto a priori e indipendente dai campi $\bar{E}$, $\bar{H}$

↳ non posso risolvere le eq. di Maxwell se non mi dicono quanto vale $\bar{J}$ (punto per punto)

$$\varepsilon_0 \to [F/m] \qquad \mu_0 \to [H/m]$$

CAMPI TEMPO-ARMONICI

$\bar{\mathcal{J}} = Re(\bar{J}e^{j\omega t})$ per linearità → $\bar{E}$, $\bar{H}$ tempo armonici

$\bar{\mathcal{E}}(P,t) = Re(\bar{E}(P)e^{j\omega t})$ idem per $\bar{\mathcal{H}} \leftrightarrow \bar{H}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\mathcal{E}} = Re(\bar{E}(P)\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t}) \qquad \frac{d}{dt}e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$$

$\frac{\partial}{\partial t}\,\bar{E} \longleftrightarrow j\omega\,\bar{E}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega$

inseriamo nelle eq. di Maxwell

$$\boxed{\begin{cases} -\nabla\times\bar{E} = j\omega\mu_0\bar{H} \\ \nabla\times\bar{H} = j\omega\varepsilon_0\bar{E} + \bar{J} \end{cases}}$$

EQ. DI MAXWELL TA o IN FREQUENZA

MEZZI MATERIALI

- devono essere lineari
- devono essere tempo-invarianti
- non devono esserci reazioni chimiche, di ionizzazione, biologiche

conduzione elettrica = trasporto di carica elettrica → cariche libere → ioni

$\bar{J} = \bar{J}_{sorg} + \bar{J}_{cond}$ → movimento di cariche libere

$\bar{J}_{sorg}$: è noto, forzante, come nel vuoto

$\bar{J}_{cond} = \bar{J}_{cond}(\bar{E}, \bar{H})$ non è un termine di sorgente, ma dipende dai campi

$\Downarrow$

⇒ EQUAZIONI COSTITUTIVE

$-\nabla\times\bar{E} = j\omega\bar{B}$ $\qquad\qquad$ $\nabla\times\bar{H} = j\omega\bar{D} + \bar{J}$

con $\bar{B} = \bar{B}(\bar{E},\bar{H})$ $\qquad$ $\bar{D} = \bar{D}(\bar{E},\bar{H})$ → nella max parte: $\bar{B} = \bar{B}(\bar{H})$, $\bar{D} = \bar{D}(\bar{E})$ (mezzi ordinari)

ipotesi di approssimazione lineare

$\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ $\qquad$ $\bar{B} = \mu\bar{H}$

$\bar{J}_{cond} = \sigma\bar{E}$ $\qquad$ $\mu \simeq \mu_0$ per noi

Questi parametri non si calcolano, ma si misurano

$\varepsilon(\overset{\text{spazio}}{P}; \omega)$ a seconda della frequenza ho un ε diverso

→ la dipendenza da ω = "dispersione" (es luce bianca → prisma → luce colorata)

$$\boxed{\begin{cases} -\nabla\times\bar{E} = j\omega\mu\bar{H} \\ \nabla\times\bar{H} = \underbrace{j\omega\varepsilon\bar{E} + \sigma\bar{E}} + \bar{J}_{sorg} \end{cases}}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL PER MEZZI MATERIALI

$\bar{J} = \bar{J}_{sorg} + \bar{J}_{cond} = \bar{J}_{sorg} + \sigma\bar{E}$

$(j\omega\varepsilon + \sigma)\bar{E}$

nota: uso numeri complessi

effetti dielettrici ↙ ↘ effetti conduttivi

posso usare un solo parametro $\tilde{\varepsilon}$:

$$\nabla\times\bar{H} = j\omega\tilde{\varepsilon}\bar{E} + \bar{J}_{sorg}$$

$j\omega\tilde{\varepsilon} = j\omega\varepsilon + \sigma$ $\qquad$ $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ $\qquad$ Permettività complessa

oppure $\qquad \nabla\times\bar{H} = \tilde{\sigma}\bar{E} + \bar{J}_{sorg}$ $\qquad \tilde{\sigma} = \sigma + j\omega\varepsilon$

associamo la conducibilità ad una resistenza

ε → condensatore

σ → resistenza

⇒ σ ⇒ dissipazione

CARATTERIZZAZIONE ELETTRICA DEI TESSUTI BIOLOGICI

Materiali → dielettrici (isolanti) } non è ben definito, varia a seconda della frequenza
↘ conduttori

18-10-2017

Elettrostatica = le cariche non si muovono → non esiste mai: aspettare che finisca il transitorio

CONDUTTORI

Hanno delle cariche libere (sottoposte ad un campo elettrico si possono muovere senza portarsi dietro la carica di segno opposto) → elettroni, ioni (soluto ionico)

Muovendosi creano un flusso di carica netto.

In un conduttore perfetto il campo è 0 (sennò ci sarebbe movimento di cariche)

DIELETTRICI

Non contengono cariche libere → non c'è movimento di cariche (fino alla scarica → condizione non lineare; il materiale si 'rompe', onizza ⇒ sottile canale di plasma)

Le cariche sono leggermente spostate → si forma un dipolo: ci sono reazioni meccaniche se si applica un campo $\vec{E}$. ⇒ si tende a generare un momento torcente → il dipolo si allinea con il campo (con un transitorio: oscillano)

Ci sono due tipi di dielettrici:

- POLARI: (acqua) il 1° momento (torcente) ≠ 0
- NON POLARI: (benzene) per via della simmetria il 1° momento = 0

La polarizzazione di un campo non centra con questo

→ polari solubili nei polari, non polari nei non polari
↳ in un campo elettrico: prima deformano la struttura e poi si allinea (perdono la struttura simmetrica) → il campo non è nullo

Dopo l'applicazione di un campo elettrico esterno, c'è un campo elettrico interno al dielettrico
↳ POLARIZZAZIONE
⇒ varia il campo totale

La membrana cellulare (doppio strato fosfolipidico) tende a lasciar passare le molecole non polari facilmente e le polari piccole → gli ioni e le polari grandi non possono (se non attraverso canali ionici).

ε (permettività) → quello che dipende dalle cariche legate → condensatore: fenomeno reattivo

σ (conducibilità) → " " " " " libere → resistenza: fenomeno dissipativo

cessione di energia in un moto casuale (urti) → energia termica → dissipazione
⇒ perdite di energia (dal sistema elettromagnetico al termico)

In un condensatore, si accumula energia in un dielettrico (si orientano le cariche)

$$\hat{\varepsilon} = \underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r}_{\text{reale: reattivo}} - \underbrace{j\frac{\sigma}{\omega}}_{\text{immaginario: dissipativo}} \qquad \sigma = \ldots$$

Sotto effetto del campo $\bar{E}$, non mi aspetto una polarizzazione istantanea. (neanche a scarica)

→ τ: tempo di rilassamento (per arrivare a regime)

MODELLO DI DEBYE

Quando tolgo il campo esterno, iniziano a muoversi i dipoli → urti → struttura disordinata ⇒ ho perso energia

Posso avere fenomeni di perdita anche in condizioni di assenza di conduzione

↳ urti tra i dipoli (cariche legate) dovuti ad un campo elettrico che varia nel te

Se trovo ε, non posso sapere se la parte immaginaria è dovuta alla dissipazione delle cariche legate o di quelle libere → si scrivono insieme

$$\sigma_{eq} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_{r}'' + \sigma$$

es. acqua distillata: è un isolante

26-10-2017

Le proprietà elettriche (ε, μ) giocano un ruolo importante per il campo $\bar{B}_1$ nella risonanza magnetica (e non per il campo B_0)

Equazione di Kramers-Kröning ~ non è una relazione puntuale

↳ lega la parte reale ed immaginaria di ε. (x qualunque mezzo fisico)

derivano dalla condizione di causalità: l'effetto non può precedere la causa

↳ è un legame in frequenza

La presenza di qualunque perdita obbliga ε a non rimanere costante al variare della frequenza

permettività = parte reale ε

loss factor = " immaginaria ε

es. proprietà elettriche di proteine in H_2O (slide 27)

dispersione: β (a freq. + basse) e γ (a freq. + alte)

α (a frequenze ancora più basse)

↳ che poi perde peso all'aumentare della frequenza

il muscolo è vascolarizzato, fatto da fibre

↳ acqua + soluti ionici nel sangue } → variazioni

Effetto IONE contro IONE

gli ioni diffondono attraverso la membrana cellulare

↳ come condensatore

effetti elettrici ed idrodinamici

↳ equazioni del trasporto

MODELLO DI DEBYE

↳ funziona molto bene per l'acqua distillata.

Descrive il fenomeno di rilassamento, collisioni.

→ aggiungo al modello di debye una parte costante in frequenza

ci sono ε_∞, ε_s, σ_s, τ → che identificano la risposta.

modello di Cole-Cole: il tempo di rilassamento è elevato ad una costante.

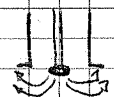
" di Gabriel-Gabriel: il tessuto è disomogeneo → se ne tiene conto

Sono state raccolte delle tabelle con valori per una serie di tessuti. (fino a solo 40 anni)

Elettrocomplyser: misura un parametro equivalente all'impedenza tra due parte (a microonde)

↳ due piastre sull'oggetto, e si misura la capacità (si misura anche la parte immaginaria)

il problema delle misure in vivo è → etico ⇒ fatte su animali (quasi tutte su ovini)

sonda coassiale = cavo coassiale aperto →  misura un'impedenza (o un'ammettenza)

campo elettrico

Conti basati sull'inversione di un modello

↳ le misure hanno un modello sotto cui funzionano, dall'impedenza risalire ad ε

↳ modello della sonda

Queste sonde si appoggiano all'oggetto (comodo anche nei liquidi)

RICERCA

Utilizzo della frequenza delle microonde per fare imaging di tumori al seno

↳ differenze delle proprietà elettriche tra tessuto sano e tumore maligno

(ricerca fatta su tessuti umani provenienti da operazioni chirurgiche)

↳ ex vivo: poca differenza dal tessuto vivo perché è poco vascolarizzato, tessuto gras[so]

tessuto sano da riduzione del seno

il tessuto estratto viene analizzato e marcato dal patologo

Poi si analizzano le proprietà elettriche

30-10-2017

Effetto di un campo e.m. sul corpo umano:

- termico
- diretto sui tessuti (sul sistema neuromuscolare)

Elettrobisturi → quello che conta è la densità di corrente $[A/m^2]$

nel corpo umano → bisogno parlare di campi

- devo conoscere la conducibilità
- capire quale campo elettrico si stabilisce nel paziente

Effetto del calore (sulle cellule)

- fino a 45° sono reversibili
- sopra i 45° sono irreversibili, e possono portare alla morte

intorno ai 60° la conducibilità varia molto

↳ anche il tempo è molto importante

Ablazione a radiofrequenza (es. per asportare tumori)

↳ ecoguidata, molto poco invasiva

↳ smette di funzionare correttamente quando il tessuto è carbonizzato

in condizioni quasi statiche posso risolvere Laplace o Poisson → ma ho una conducibilità! devo misurarla!

↳ basse frequenze

CAMPO QUASI - STATICO

Come semplificazione delle eq. di Maxwell.

Eq. di conservazione e del flusso

[se si sostituisce Coulomb con kg va bene] → parallelo carica / massa

$$Q_\Omega = \iiint_\Omega \rho \, dV$$

$\rho = kg \, m^{-3}$

$\rho \bar{v} = kg \, m^{-3} \, m s^{-1} = kg \, m^{-2} s^{-1}$

$\rho \bar{v} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = kg \, m^{-2} s^{-1} \, m^2 = kg/s$

densità di flusso: $\bar{J} = \rho \bar{v}$ (densità di corrente di conduzione)

flusso attraverso una superficie $\hat{n} \cdot \bar{J} \, d\Sigma$

Legge di conservazione $-\frac{d}{dt} Q_\Omega = \oint_{\Sigma=\partial\Omega} \hat{n} \cdot \bar{J} \, d\Sigma$

↳ la carica (libera) si conserva

$$\frac{d}{dt} \iiint_\Omega \rho \, dV + \oint_{\Sigma=\partial\Omega} \hat{n} \cdot \bar{J} \, d\Sigma = 0$$

EQ. DI CONTINUITÀ (di conservazione della massa / carica)

→ usando il teorema di Gauss

$$\oint_{\Sigma=\partial\Omega} \hat{n} \cdot \bar{J} \, d\Sigma = \iiint_\Omega \nabla \cdot \bar{J} \, dV$$

se ho un campo scalare che è una divergenza di qualcosa, basta calcolare l'integrale sul contorno

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(P,t) + \nabla \cdot \bar{J}(P,t) = 0$$

divergenza $\bar{J}$ + variazione ρ nel tempo $= 0$

EQ. DI CONTINUITÀ

$$j\omega \rho(P,\omega) + \nabla \cdot \bar{J}(P,\omega) = 0$$

in tempo armonico

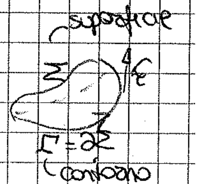
(le eq. di Maxwell sono ≠ da queste, non vedono la carica quelle di maxwell)

EQ. MAXWELL IN FORMA INTEGRALE

$$\iint_\Sigma \hat{\mu} (\nabla \times \bar{E}) \, d\Sigma = \oint_{\Gamma=\partial\Sigma} \hat{\tau} \cdot \bar{E} \, ds$$

versore tangente

si ricavano col teorema di Stokes. Danno un'info con i flussi.



$\bar{B}$ densità di flusso magnetico $\quad \bar{D}$ densità di flusso elettrico

$$-\iint (\nabla \times \bar{E}) \hat{n} \, d\Sigma = j\omega \iint \hat{n} \cdot \bar{B} \, d\Sigma$$

integrale di flusso

uso Stokes $\quad$ Σ superficie aperta

$$-\oint_{\Gamma=\partial\Sigma} \hat{\tau} \cdot \bar{E} \, ds$$

$$\nabla \cdot \bar{J} + j\omega\rho = 0$$

eq. di continuità

Per il passaggio tra due mezzi materiali, c'è un salto dei parametri (ε, σ) → e i campi??

sono necessarie e sufficienti:

$$\bar{E}_{1tan} - \bar{E}_{2tan} = 0$$

$$\bar{H}_{1tan} - \bar{H}_{2tan} = 0$$

la componente tangenziale nei due mezzi deve essere continua (non vede la discontinuità)

↳ sia per campo elettrico che magnetico

sono ridondanti:

$$\bar{B}_{1norm} - \bar{B}_{2norm} = 0$$

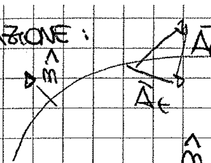
$$\bar{D}_{1norm} - \bar{D}_{2norm} = 0$$

la componente normale è continua per i campi densità di flusso

la componente normale di $\bar{E}$ e $\bar{H}$ è discontinua ⟹ sono CONDIZIONI AL CONTORNO

devo tener conto anche della conducibilità: $\bar{D} = \tilde{\varepsilon} \bar{E}$

NOTAZIONE : 31-10-2012



$$\bar{A} = \bar{A}_t + \underbrace{\bar{A}_n}_{= \hat{n} A_n}$$

$$\hat{n} \times \bar{A} = \hat{n} \times \bar{A}_t + \cancel{\hat{n} \times \hat{n}} A_n = \hat{n} \times \bar{A}_t$$

$\hat{n} \cdot (\ )$ → ~~selezione~~ le componenti normali

$\hat{n} \times (\ )$ → seleziona le componenti tangenziali

Transizione brusca → rispetto alle scale che sto usando : non c'è niente di intermedio

CASO DI UN MEZZO CONDUTTORE (considerato perfetto → approssimazione)
→ = conducibilità infinita

dentro il conduttore deve esserci campo zero (almeno quando si fermano tutto)
└ elettrico e magnetico

(in un conduttore non perfetto questo non è vero) ⇒ $\hat{n} \times \bar{E}|_\Sigma = 0$ condizione di contorno

l'anomalia è che $\hat{n}\,\bar{H}|_\Sigma$ e $\hat{n} \cdot D|_\Sigma$ sono 0 nel conduttore, e ≠0 fuori !

→ c'è un salto : un cambiamento molto repentino → è discontinuo

questa discontinuità è chiamata corrente superficiale : $\hat{n} \times \bar{H}|_\Sigma = \bar{J}_s \ \frac{A}{m}$

$\hat{n} \cdot \bar{D}_1|_\Sigma = \rho_s$ densità di carica superficiale

non sono le dimensioni di $\bar{J}$

nel ~~campo~~ non conduttore anche la tangenziale di $\bar{E}$ è zero.

$\hat{n} \times \bar{E}|_\Sigma$ è continuo

$\hat{n} \cdot \bar{B}|_\Sigma$ è continuo

(tra conduttore e non)

⇒ questi due, non sono termini forzanti (sorgenti), ma sono il valore del campo superficiale

→ vale sempre, sia in condizioni statiche che dinamiche

$\nabla \cdot \nabla \times \bar{H} = 0$ la divergenza del rotore di un campo

$\nabla \times \nabla \phi = 0$ il rotore di un campo che è un gradiente di una funzione scalare

→ i campi con rotore nullo sono conservativi

$$\nabla \cdot \bar{B} \qquad \bar{B} = -\frac{1}{j\omega} \nabla \times \bar{E} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{B} = -\frac{1}{j\omega} \overbrace{\nabla \cdot \nabla \times \bar{E}}^{=0} = 0$$

Può essere considerata una eq. di maxwell

$$0 = j\omega \nabla \cdot \varepsilon \bar{E} + \nabla \cdot \bar{J}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{J} + j\omega \nabla \cdot (\varepsilon \bar{E}) = 0$$

un campo che non ha sorgenti ha divergenza nulla

→ sorgenti ≡ divergenza

1) $\nabla \cdot (\varepsilon \bar{E}) = \rho$
→ non include la conduzione
→ le cariche libere sono tutte in ρ

2) $\nabla \cdot (\hat{\varepsilon} \bar{E}) = 0$
→ include la conduzione

In condizioni dinamiche, la carica e le variazioni di campo elettrico hanno gli stessi effetti
→ quando varia nel tempo, il campo elettrico fa lo stesso lavoro del trasporto di cariche.

se considero gli effetti ~~solenoidali~~ di conduzione $(\hat{\varepsilon}\ )$ ⇒ $\nabla \cdot \bar{D} = 0$ $\bar{D}$ è solenoidale

---

In condizioni elettrostatiche, il campo elettrico è irrotazionale, è come un potenziale,

tensione (potenziale) $V_{AB} = -\int_A^B ds\, \hat{\tau} \cdot \bar{E}$ integrale di linea

→ è importante solo se è indipendente dal cammino (percorso)

→ la è in elettrostatica, ~~equazione~~ ⇒ mi basta solo quello per caratterizzare tutto corrente $I_\Sigma = \iint_\Sigma \hat{n} \cdot \bar{J} \, d\Sigma$ quantità di carica che attraversa una sezione definita in un secondo

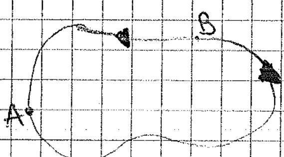
$\bar{J}$ = densità di corrente; integrale di flusso su una superficie

Voglio ottenere V e I dalle eq. di Maxwell

(Ripeto tante volte le cose!!) 06-11-2012

NOTAZIONE: $\nabla \times \bar{E}_s = 0$ irrotazionale
$\bar{E}_s = -\nabla \phi$ potenziale
integrale di linea - circuitazione $\oint_\Gamma \hat{\tau} \cdot \bar{E}_s \, ds = 0$

sono condizioni equivalenti



-> posso spezzare il percorso chiuso in due

Se l'integrale su un percorso chiuso è zero, i due percorsi sono uno il negativo dell'altro
=> andare da A a B su due cammini diversi, l'integrale è uguale

=> il potenziale -> se il flusso del rotore di $\bar{E} = 0$
• o con $\omega = 0$ (magnetostatica)
• o con flusso $(\bar{B}) = 0$ a prescindere da ω.

forza elettromotrice indotta
$$V_\Sigma^{EMF} = -\iint_\Sigma (\nabla \times \bar{E}) \cdot \hat{n} \, d\Sigma \quad [V]$$
$$= j\omega \Psi_{\Sigma B}$$

Indipendenza dal cammino = forza elettromotrice indotta = 0 (flusso zero)

Eq. Kirchhoff delle maglie -> la somma delle $V_\Sigma^{EMF} = 0$ su un percorso chiuso

nella realtà $\sum_{m=1}^{N} V_m \approx 0$ posso trascurarla quando $|\omega \phi_{\Sigma B}| \ll V_{min}$ (minimo $|V_m|$)

KVL classico: $\sum_{m=1}^{N} V_m = 0$

eq. MAXWELL: $\sum_{m=1}^{N} V_m = j\omega \Psi_{B\Sigma} = V_\Sigma^{EMF}$

$\sum_{m=1}^{N} V_m - V_\Sigma^{EMF} = 0$ se $|V^{EMF}| \ll |V_m|$ => considerato trascurabile

-> mette un limite sulla + piccola tensione che posso misurare

condizioni quasi-statiche dove vale la legge Kirchhoff

$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ se il rotore = 0 posso scrivere un potenziale

-> $\nabla \times \bar{E} = 0$ (= statico) $\iff \bar{E} = \text{cost.} \nabla \phi$

$$\int_A^B \hat{\tau} \cdot \bar{E} \, ds = c \int_A^B \hat{\tau} \nabla \phi \, ds$$

se è indipendente dal percorso posso prendere una linea retta
$$\hat{\tau} \nabla \phi = \frac{\partial}{\partial \tau} \phi$$

$$\int_A^B = c(\phi(B) - \phi(A))$$

$\nabla \cdot \tilde{\varepsilon} \bar{E} = 0$ ($\bar{E} = -\nabla \phi$) => $\nabla \cdot \tilde{\varepsilon} \nabla \phi = 0$

equazione di Laplace: $\nabla^2 \phi = 0$

-> ci sono già effetti elettrici e di conduzione

uso il potenziale invece del campo elettrico xké è + facile

(Posso scrivere un potenziale se l'integrale è indipendente dal percorso → cioè se sul percorso chiuso è zero → cioè se V^{EMF} è trascurabile rispetto a V_i)

Ripasso:

$$\sum_{m=1}^{N} V_m = V^{EMF}$$

$$V_m = \int_{P_{m-1}}^{P_m} \hat{\tau}\cdot\bar{E}\,ds \qquad \sum_{m=1}^{N} V_m = \oint_{\Gamma=\partial\Sigma} \hat{\tau}\cdot\bar{E}\,ds = -j\omega\,\Psi_{B\Sigma} = V_{\Sigma}^{EMF}$$

In statico ($\omega=0$) $\oint \hat{\tau}\cdot\bar{E}\,ds = 0 \Rightarrow \bar{E} = -\nabla\phi$ posso scrivere $\bar{E}$ come gradiente potenziale

In quasi statico: $\oint \hat{\tau}\cdot\bar{E}\,ds =$ trascurabile

Si può dimostrare $\oint \hat{\tau}\cdot\bar{E}\,ds = 0 \iff \bar{E} = -\nabla\phi$

perciò quando $\oint(\cdot)\approx 0 \Rightarrow \bar{E} \approx -\nabla\phi$

Ricavo un eq. per ϕ (partendo da Maxwell)

$-\nabla\times\bar{E} = j\omega\bar{B}$ ← questa è già usata per dire che $\bar{E}\approx-\nabla\phi$

$\nabla\times\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\bar{E} = j\omega\tilde{\varepsilon}\bar{E}$

↳ $\nabla\cdot\nabla\times\bar{H} = 0$ di qualunque campo $\qquad 0 = j\omega\nabla\cdot\tilde{\varepsilon}\bar{E}$ se $\bar{E}\approx-\nabla\phi$

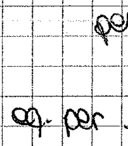
$$\boxed{\nabla\cdot\tilde{\varepsilon}\nabla\phi = 0}$$ equazione per ϕ in condizioni QUASI STATICHE

slide 32

Consideriamo diversi materiali con due elettrodi (conduttori perfetti) messi ad una differenza di potenziale

In questo caso il termine di sorgente entra nelle condizioni al contorno

In un conduttore perfetto il potenziale è costante → tutti i punti sulla superficie sono equipotenziali



$V_{AB} = V_B - V_A = 0$

$\hat{\tau}\cdot\bar{E} =$ una delle due componenti di $\bar{E}$ tg la superficie $= 0$ per la condizione al contorno sul PEC

Assegno una differenza di potenziale ai conduttori

$\nabla\cdot\bar{J} + j\omega\rho = 0 \qquad \nabla\cdot(\tilde{\varepsilon}\bar{E}) = 0 \iff \nabla\cdot(\varepsilon\cdot\bar{E}) = \rho$

Applicazione

$$\boxed{-\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$ EQ. DI POISSON

04-11-2012

Nei problemi tipici ρ non è nota, devo calcolarla

$\nabla\cdot\bar{J} + j\omega\rho = 0 \qquad \rho = \frac{1}{j\omega}\nabla\cdot\bar{J} = \frac{1}{j\omega}\nabla\cdot\sigma\bar{E}$ ← difficile da calcolare

ma $\bar{J} = \sigma\bar{E}$

Nei casi di non elettrostatica l'eq. di Poisson non sembra così utile

Se conosco ρ, ed ho una carica puntiforme → conosco la soluzione dell'eq. di Poisson

→ posso anche se ne ho due: sovrapposizione degli effetti estendere questo discorso al continuo → distribuzione uniforme di carica ρ

⇒ somma dei differenziali, integrale → si estende la sommatoria in un integrale

a noi non interessa sul volume, ma sulla superficie $P(x, y, z)$ punto di osservazione

In condizioni quasi statiche

corrente: $I_\Sigma = \iint_\Sigma \hat{n} \cdot \bar{J}\, d\Sigma$ integrale di flusso di $\bar{J}$ (densità di corrente)

Faccio il flusso dell'eq. di Maxwell:

$$\iint_\Sigma (\nabla \times \bar{H}) \hat{n}\, d\Sigma = j\omega \iint_\Sigma \varepsilon \bar{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma + \iint_\Sigma \hat{n} \cdot \bar{J}\, d\Sigma$$

posso applicare il teorema di Stokes:

$$I_\Sigma = \oint_{\Gamma = \partial\Sigma} \bar{H} \cdot \hat{\tau}\, ds \mp \underbrace{j\omega \iint_\Sigma \varepsilon \bar{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma}$$

↳ termine che Maxwell ha postulato, corrente di spostamento

[KCL: può essere fatto su un nodo, ma su qualunque superficie chiusa

↳ la somma delle correnti entranti ed uscenti è zero]

$$I_\Sigma = \iint_\Sigma \hat{n} \cdot \bar{J}\, d\Sigma = \sum_{n=1}^{N} I_n$$ somma delle correnti su una superficie chiusa

quando passo da superficie aperta a chiusa, la linea del contorno va a 0 (lunghezza della linea; ↳ Γ)

⇒ l'integrale tende a zero (fatto sul contorno) $\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \hat{\tau}\, ds \to 0$

$$I_\Sigma = \cancelto{0}{\oint_\Gamma \bar{H} \cdot \hat{\tau}\, ds} + j\omega \oiint_\Sigma \varepsilon \bar{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma$$ somma delle correnti

In condizioni statiche → $I_\Sigma = 0$ ⇒ eq. di Kirchhoff delle correnti

$$\underbrace{I_{\Sigma cond}}_{\substack{\text{corr. conduzione} \\ \sum_{n=1}^{N} I_n}} + \underbrace{I_{\Sigma disp}}_{\substack{\text{corrente di spostamento} \\ j\omega \oiint_\Sigma \varepsilon \bar{E} \cdot \hat{n}\, d\Sigma}} = 0$$

il movimento di cariche libere = variazione nel tempo del campo elettrico

→ l'integrale di flusso del campo elettrico può bilanciare il moto di carica

In condizioni dinamiche il moto di cariche entranti/uscenti da una Σ può non essere 0 (campi tempo-varianti) ↗

Se la corrente di spostamento è << m/m (correnti) è trascurabile

→ si approssima: $I_{\Sigma cond} \equiv \sum_{n=1}^{N} I_n \simeq 0$

es. superficie con un solo conduttore

→ con correnti alternate (tempo-varianti), la corrente può non essere 0 (Maxwell)

(può entrare anche se nessuno la porta via)

⇒ su un'armatura del condensatore in alternata arrivano delle correnti e si fermano,

ma il campo elettrico induce cariche dall'altra parte → correnti

→ se scelgo come superficie Σ tutto il condensatore, il flusso elettrico è $\simeq 0$

$\oiint_\Sigma \hat{n}\cdot\bar{J} + j\omega\oiint \hat{n}\cdot\varepsilon\bar{E} = 0$ $\qquad \bar{J} = \sigma\bar{E}$

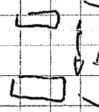
$\oiint_\Sigma \hat{n}\cdot\underbrace{(\sigma + j\omega\varepsilon)}_{j\omega\tilde{\varepsilon},\ \tilde{\sigma}}\bar{E}\,d\Sigma = 0$

$j\omega\oiint_\Sigma \hat{n}\cdot\tilde{\varepsilon}\bar{E}\,d\Sigma = 0$ $\qquad$ c'è una corrente globale: parte conduttiva / " spostamento (lavoro fatto dal campo $\bar{E}$) tempo vario

$I_{\Sigma_{wires}} + j\omega\iint_\Sigma\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\bar{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = 0$

ESERCIZI 3

1. eq. di Laplace → impongo condizioni di contorno



Δv – diff. di potenziale / potenziale costante

Calcolo le correnti con impedenza, tensione ...

Se posso parlare di potenziale, il percorso è irrilevante → prendo la linea retta tra A e B

Σ_e: appena sotto l'elettrodo

→ approssimo il flusso su Σ a quello su Σ_e

uguaglio $\Psi + I_{in} = 0$ $\qquad$ devo conoscere però già $\bar{E}$

ammettenza (o 1/impedenza)

2. Teorema di equivalenza (es. circuito equivalente di Thevenin)

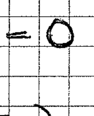
→ posso sostituire il metallo con qualsiasi cosa purché mantenga il valore corretto di carica superficiale (quello che corrisponde al salto del campo elettrico)

approssimazioni:

- discontinuità tessuto-aria trascurata (è tutto rosso)
- tolgo la sfera e metto rosso (con una carica superficiale)
- elettrodo di ritorno infinitamente esteso

→ teorema delle immagini (posso togliere lo specchio e mettere una sorgente)
la carica immagine ha segno opposto la carica vera

- rimuovo il piano metallico (specchio) e metto una distribuzione di carica oppos
sotto



⇒ so risolvere poisson

se la distanza è molto + grande del raggio della sfera → posso approssimare con una carica puntiforme (devo ricordarmi che non lo è)

⟹ ho due cariche puntiformi (abbiamo già calcolato il campo) in un mezzo omogeneo

se si impone una ddp è tra elettrodo e superficie della sfera, non il centro

$|\bar{E}|^2 = \bar{E}^*\cdot\bar{E}$

Calcolo dell'impedenza:

I_1 e I_2 uguali, ma sotto quali condizioni?? cosa devo trascurare?

trascuriamo Σ_t, la corrente che va sopra (corrente spostamento)

$\hookrightarrow$ consideriamo solo la $\frac{1}{2}$ sfera sotto

$\varepsilon \int_{\Sigma e} \hat{n} \cdot \bar{E} \, d\Sigma$

$\bar{E} = \bar{E}^+ + \bar{E}^-_{\text{immagine}}$

siccome $h >> R$ su Σe: $|\bar{E}^+| >> |\bar{E}^-|$

$\Rightarrow \bar{E}|_{\Sigma e} \simeq \bar{E}^+$

approssimo il campo a quello della sola carica viciano

Dato che il campo di $\bar{E}$ è radiale $\hat{n} \cdot \bar{E} = E \cdot 1$

1. non conosco la $\bar{E}$ del conduttore!! $\rightarrow$ trovo la corrente nel conduttore con le correnti (Maxwell) nel dielettrico

In un condensatore perfetto ($\sigma = 0$), quando sono a regime tutto è fermo, non ho correnti di spostamento, invece nel transitorio ho correnti di spostamento

15-11-2012

Il campo magnetico è abbastanza ... $\rightarrow$ Biot-Savart

$\hookrightarrow$ soluzione di $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ eq. della magnetostatica

in un filo $\frac{C}{S}$ sono costanti (corrente)

$\rightarrow$ in ogni punto devo trovare la densità di corrente $\bar{J}$ $\rightarrow$ prodotto vettoriale

$\hat{\tau}$ $\rightarrow$ è variabile

Passo da correnti che passano su fili a densità di corrente (correnti distribuite)

$\rightarrow$ integro lungo il filo $\qquad I \hat{\tau}(s) ds \rightarrow \bar{J}(P') dV(P')$

Ottengo $\bar{H}(P)$ con variabili la densità di corrente $\rightarrow$ estensione di Biot-Savart

$\hookrightarrow$ è la soluzione dell'eq. differenziale $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ (in casi particolari)

in queste equazioni $\bar{J}$ è considerato nota

In approssimazioni quasi statiche $\rightarrow$ campo elettrico e magnetico vanno per conto loro

se chiamo $\bar{J}_{tot} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J} \Rightarrow \nabla \times \bar{H} = \bar{J}_{tot}$

la cui soluzione è ancora l'equazione di Biot-Savart $\qquad \Omega$ volume in cui $\bar{J}$ non è zero

(in condizioni QS calcolo $\bar{E}$, poi lo metto qui e vedo $\bar{H}$ quanto vale)

$\hookrightarrow$ separo i due problemi: elettrico e magnetico

Calcolare il campo magnetico $\rightarrow$ sapere la corrente $\rightarrow$ calcolato conoscendo l'impedenza e ~~...~~ la tensione forzata.

ENERGIA e POTENZA 16-11-2012

$$P_{diss\,\Omega}(t) + \frac{d}{dt}W_{\Omega}(t) = P_{\partial\Omega}(t)$$

energia dissipata (esce dal sistema come calore) — variazione di energia nel volume nel tempo — energia scambiata con il mondo esterno attraverso la superficie $\partial\Omega$

su qualsiasi caso → energia dovuta ad una forza

Energia prodotta sulle particelle cariche $W = F \cdot s$ (energia/lavoro)

$\bar{F}$(su una carica) $= q\bar{\mathcal{E}} + q\bar{v}\times\bar{B}$ ($\mathcal{E}, B$ → tempo variante e non tempo armonico)

Δs → moto $= \bar{v}\cdot\Delta t$

$$\Delta W = \Delta q(\bar{\mathcal{E}} + \bar{v}\times\bar{B})\cdot\underbrace{\bar{v}\Delta t}_{\Delta s}$$

$(\bar{v}\times\bar{B})\cdot\bar{v} = 0$ ⇒ campo magnetico non influisce sul lavoro

└ è $\perp$ a $\bar{v}$

$$\Delta W = \Delta q\,\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{v}\,\Delta t = \rho\,\Delta V\,\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{v}\cdot\Delta t = (\bar{\mathcal{E}}\cdot\rho\bar{v})\Delta V\Delta t$$

└ $\rho\Delta V$

20-11-2012

$$\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{J} = \frac{dP_{diss}}{dV} \qquad P(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}$$

(potenza istantanea)

è un termine dissipativo, potenza per unità di volume

$$\frac{dP_{diss}}{dV} = \bar{\mathcal{E}}\cdot\underbrace{\sigma\bar{\mathcal{E}}} = \sigma|\bar{\mathcal{E}}|^2$$

LEGGE DI OHM IN FORMA DIFFERENZIALE

→ $\bar{J} = \sigma\bar{\mathcal{E}}$ esclude i fenomeni di tipo diffusivo

Che legame c'è tra energia immagazzinata e campi

→ è il campo elettrico che permette il passaggio di energia in un condensatore

$$W_{e\,\Omega} = \int_\Omega \frac{1}{2}[\underbrace{\bar{\mathcal{E}}\cdot\varepsilon\bar{\mathcal{E}}}_{\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{D}}]\,dV = \int_\Omega\frac{1}{2}\varepsilon|\bar{\mathcal{E}}|^2 dV$$

energia elettrica immagazzinata in un volume Ω

$$W_{m\,\Omega} = \int_\Omega\frac{1}{2}\mu[\,|\bar{\mathcal{H}}|^2 dV$$

in condizioni statiche

$$W_\Omega = \int_\Omega\frac{1}{2}[\bar{\mathcal{E}}\cdot\varepsilon\bar{\mathcal{E}} + \bar{\mathcal{H}}\cdot\mu\bar{\mathcal{H}}]\,dV$$

Non sono le piastre del condensatore, è cosa c'è dentro che immagazzina l'energia

21-11-2012

Come questo sistema scambia energia → alla frontiera

Far emergere da Maxwell le quantità di nostro interesse: $\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{J}$ $\quad\bar{\mathcal{E}}\cdot\varepsilon\bar{\mathcal{E}}$ $\quad\bar{\mathcal{H}}\cdot\mu\bar{\mathcal{H}}$

→ (moltiplico le eq. di Maxwell per $\cdot\bar{\mathcal{E}}$ e $\cdot\bar{\mathcal{H}}$)

TEOREMA DI POINTING

$$-\oint_{\Sigma=\partial\Omega}\underbrace{\hat{n}\cdot[\bar{\mathcal{E}}\times\bar{\mathcal{H}}]}_{\text{è un flusso}}\,d\Sigma = \underbrace{\int_\Sigma\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{J}\,dV}_{P_{diss}(t)} + \frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega\frac{1}{2}[\bar{\mathcal{E}}\cdot\varepsilon\bar{\mathcal{E}} + \bar{\mathcal{H}}\cdot\mu\bar{\mathcal{H}}]\,dV}_{W_\Omega}$$

$P_{diss}(t)$ potenza dissipata nel volume

W_Ω energia immagazzinata nel volume

↳ mi dice lo scambio energetico attraverso la frontiera: è un flusso

$\bar{E} \times \bar{H}$ = vettore di Poynting

$\hat{n} \cdot [\bar{E} \times \bar{H}]$ = densità di flusso di potenza su una superficie $\left[W/m^2 \right]$

il segno dice che la potenza che esce dal volume è negativa

conduttore perfetto (= campo tangente esterno nullo) → $\hat{n} \times \bar{E} |_{PEC} = 0$

$$P_{\partial\Omega, PEC} = -\int_\Sigma \hat{n} \cdot [\bar{E} \times \bar{H}] d\Sigma = +\int_\Sigma \hat{n} \times \bar{E} \cdot \bar{H} \, d\Sigma = 0$$

⇓ non c'è trasferimento di potenza

$P_{diss,\Omega}(t) + \frac{d}{dt} W_\Omega(t) = 0$ vale in condizioni qualunque, non solo in statico

In un sistema chiuso la potenza dissipata è = all'energia totale immagazzinata

└ (in un sistema dinamico, tempo variante) → TEOREMA DI POYNTING

slide 16

Nel dominio della frequenza (convenzione del valore di picco → ½)

$\langle x \rangle_T$ → media

$$\langle \underbrace{\bar{E}(\bar{P},t) \cdot \bar{J}(\bar{P},t)}_{\text{istantanea}} \rangle_T = \frac{1}{2} Re\{\bar{E}(\bar{P}) \cdot \bar{J}^*(\bar{P})\}$$ = potenza dissipata media

energia immagazzinata $\frac{1}{2} Re\{\bar{E}(\bar{P}) \cdot (\varepsilon \bar{E}(\bar{P}))^*\}$

Si definisce la norma $|\bar{A}|^2 = \bar{A}^* \cdot \bar{A}$ → per $\bar{E}$ e $\bar{H}$ ha un significato energetico

↳ DENSITÀ DI ENERGIA

$$\langle W_{e\Omega} \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega Re\{\varepsilon(\bar{P})\} |\bar{E}(\bar{P})|^2 dV$$

$$P_{diss,\Omega} = \ldots = \frac{1}{2} \int_\Omega Re\{\sigma(\bar{P})\} |\bar{E}(\bar{P})|^2 dV$$

il prodotto di due fasori non è un fasore

Riparto dalle eq. di Maxwell: ...

$$-\oint_\Sigma \hat{n} \frac{1}{2} [\bar{E} \times \bar{H}^*] d\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Omega \bar{E} \cdot \bar{J}^* dV + 2 j\omega \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \bar{E} \cdot (\varepsilon \bar{E})^* - \frac{1}{2} \bar{H} \cdot (\mu \bar{H})^* \right] dV$$

└ deriva dal valore di picco   segno negativo

$$\bar{S}(\bar{P}) \equiv \underbrace{\frac{1}{2} \bar{E}(\bar{P}) \times \bar{H}^*(\bar{P})}$$ vettore di POYNTING complesso

└ non è il fasore di $\bar{E} \times \bar{H}$!!!

se uso il valore efficace ½ sparisce

Ho dei campi complessi → devo prendere separatamente parte reale e immaginaria

$\tilde{\varepsilon}$ = reale + immag

reale: polarizzazione, riallineamento cariche

immag: perdite conduttive e dielettriche

$\varepsilon = Re\,\tilde{\varepsilon}$

$\sigma_{eq} = \sigma - \omega Im(\tilde{\varepsilon})$ } sono reali

↳ lo chiamo σ

$$\langle W_\Omega \rangle = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{2} [\varepsilon |\bar{E}|^2 - \mu |\bar{H}|^2] dV$$

$$P_{diss,\Omega} = \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma |\bar{E}(\bar{P})|^2 dV$$ deposizione di potenza nel tessuto

↳ questi termini rappresentano la media sul periodo → può fare zero!

è il motivo per cui c'è il segno −.

TEOREMA DI POYNTING COMPLESSO vedi slide

Potenza attiva → parte reale $P_{diss,\Omega} = -\oint_\Sigma [\hat{n} \cdot Re \bar{S}(\bar{P})] \, d\Sigma$ flusso del vettore di Poynting complesso

$- \oint_\Sigma \hat{n} \; Im(\bar{S}) d\Sigma = 2\omega < W_\Omega > = 2\omega(<W_{e\Omega}> - <W_{m\Omega}>)$ parte reattiva (potenza reattiva)

Parte trascurabile → $P_{diss,\Omega} = 0$ quello che entra esce (flusso = 0)

$\nabla \cdot Re(\bar{S}(\bar{P})) = 0$ la parte reale del vettore di Poynting è solenoidale (linee di forza che si chiudono sempre)

I campi trasportano energia → non è riproducibile a fenomeni meccanici. → interagisce con le particelle ~~meccaniche~~ cariche della materia

Ma l'interazione tra campo e materia dà luogo a fenomeni 'meccanici', di energia.

Anche nell'assenza totale di materia (vuoto), il flusso del vettore di Poynting trasporta energia. → il campo e.m. nel vuoto ha energia (non la "trasmette" però anche non agisce sulla materia)

TEMPERATURA - POTENZA

28-11-2012

Connettere la deposizione di potenza all'innalzamento di temperatura

- equazione del calore
- modello che descrive la termoregolazione (biologia)

→ effetto biologico della temperatura combinato al tempo di esposizione

BIO-HEAT EQUATION (PENNES MODEL)

Effetti della temperatura su tessuti / cellule biologiche

(es. l'effetto di carbonizzazione è indesiderato → perde conducibilità)

> 45° → effetti irreversibili

$\frac{dP_{diss}}{dV} = \sigma |\bar{E}|^2$ (istantaneo) $\qquad \frac{d}{dV} P_{diss} = \frac{1}{2} \sigma |\bar{E}(P)|^2$ (medio; valori di picco)

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s$$ EQUAZIONE DEL CALORE

ρ: densità di massa; C: calore specifico; k: conducibilità termica; q_s: sorgente / pozzo = interazione con l'esterno

$T(\bar{P}, t)$ → temperatura, campo scalare dipendente dallo spazio e dal tempo

→ è un eq. a derivate parziali

- devo conoscere la condizione iniziale $t = 0$
- devo conoscere le condizioni al contorno (spesso q_s è dato come cond. al contorno)

→ tutti i coefficienti sono variabili nello spazio (il corpo non è omogeneo)

→ i coefficienti dipendono dalla temperatura → si approssima di no.

⇒ questi coefficienti non sono molto precisi, variano...

- densità di massa simile a quella dell'acqua (tranne il grasso) → 0.8-0.9 (10-20% in meno)
- conducibilità minore dell'acqua, soprattutto nel grasso → sangue: ruolo importante! tessuti vascolarizzati e non