

Determino il campo equivalente \rightarrow il campo

FROM QUASI-STATICS TO ELECTRO-DYNAMIC FIELDS 19-12-2012

- Condizioni di spazio libero (no mezzi materiali)
- Assumiamo che le sorgenti sono rade
 - caso statico \rightarrow le sorgenti sono le cariche
 - caso quasi-statico \rightarrow impongo una ddp e poi trovo le cariche (campo equivalente)
- Quando il circuito si muove, anche il potenziale si muove (istantaneamente)
 - in statico non tengo conto del ritardo

POTENZIALE MAGNETICO

Richiami potenziale elettrico \rightarrow in statico $\nabla \times \vec{E} = 0$

richiamando che $\nabla \times \nabla \phi = 0 \rightarrow$ ho introdotto il potenziale

il potenziale posso aggiungere una costante e il campo non cambia

$$\phi' = \phi + c$$

$$-\nabla \cdot \epsilon \nabla \phi = \rho \quad \text{quindi } \rho \text{ nota}$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{eq. poisson}$$

$q(\vec{r}) = \kappa$ \bar{e} è la soluzione dell'eq. poisson

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ per un campo magnetico qualunque

$\hookrightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ sempre

\vec{B} è scrivibile come rotore di qualcosa detto $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$

$\nabla \times \vec{E} = 0$ solo in statico

$$\hookrightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$$

statico $\rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j}$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \underbrace{(\nabla \cdot \nabla) \vec{A}}_{\text{laplace}}$$

\vec{A} non è univocamente definito (basterebbe aggiungere un termine con rotore nullo)

TEOREMA DI HELMHOLTZ

un campo vettoriale è univocamente determinato se conosco

- rotore
- divergenza

$$\nabla \times \vec{A} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

il divergenza di \vec{A} è libero \rightarrow scelto $= 0$ per comodità
SCELTA DI GAUGE

$$-\nabla^2 A = \vec{J} \cdot \vec{\mu} \quad \text{correggere}$$

$$-\nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon} \rho$$

uso le coordinate cartesiane e trovo: (i termini $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sono costanti)

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad \text{ho tre eq. scalari separate}$$

$\vec{A} \rightarrow$ potenziale magnetico vettore

FUNZIONE DI GREEN = potenziale provocato da una sorgente puntiforme
se faccio il rotore di $\vec{A}(\vec{r})$ trovo BIOT-SAVART.

THE RADIATION PROBLEM

$\vec{J}(\vec{r}) \leftarrow$ termine noto forzato

$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0$$

$(\vec{E} + j\omega \vec{A}) \rightarrow$ irrotazionale in condizioni dinamiche: posso scriverlo come gradiente di un potenziale

$$\vec{E} = -\nabla \phi - j\omega \vec{A} \rightarrow \text{ho un campo vettoriale e un campo scalare}$$

ora scelgo $\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \epsilon \mu \phi$ scelta di GAUGE

\hookrightarrow prendo il potenziale scalare e non lo uso +: mi basta trovare A

Nel caso dinamico ho:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

EQ. DI HELMOLTZ

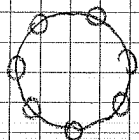
$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

\hookrightarrow differenza dal caso statico solo per questo termine

19-12-12

GRUPPO DI ESERCIZI N° 6

modello della risonanza magnetica



\rightarrow conduttori disposti su una disposizione spaziale circolare
fascio che fa sì che il campo magnetico giri nel tempo

6 conduttori \rightarrow riasseiamo il sistema con matrici

limitare il SAR e $Z \frac{W}{kg}$ (campo elettrico)

fare + vedere il grafico (con diversi volti) e trovare il campo massimo

L

Ricorre direttamente l'eq. per il potenziale scalare

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho$$

EQ. DI HELMOLTZ

bisognerebbe riscrivere l'eq. per una carica puntiforme
→ si chiama funzione di Green = risposta ad una sorgente puntiforme
 sorgente puntiforme → potenziale prodotto da una sola carica

per tenere nel tempo faccio una trasformata di Fourier inversa (24)

$$\phi(P, t) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{4\pi r} q(t)$$

nella condizione statica, se faccio muovere la carica istantaneamente il potenziale si muove
 → non c'è ritardo. Ma sapendo che il max è la velocità della luce a deve essere un ritardo
 che non ho impostato → ma tanto è piccolo rispetto ai tempi caratteristici

aggiungo il ritardo:
$$\phi(P, t) = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{4\pi r} q(t - \frac{r}{c}) \quad (25)$$

↳ ritardo, non risponde istantaneamente (e ho aggiunto la)

Posso tornare nella frequenza → transf. di Fourier

$$\Phi(P, \omega) = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{4\pi r} \underbrace{e^{-j\omega \frac{r}{c}}}_{\text{↳ ritardo in frequenza}} Q(\omega)$$

$$g(P, 0; \omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jkr} \quad \text{funzione di Green} = \text{risposta ad una sorgente puntiforme}$$

Si può dimostrare che soddisfa Helmholtz, e che quindi è esatto

Posso scrivere la formula del potenziale vettore (31)
 (posso ottenere quello scalare con un po', es. quello di Lorentz)

$$\vec{A}(P) = -\mu \iiint_{\Omega} g(P, P') \vec{J}(P') dV(P')$$

La difficoltà è dire cos'è la sorgente

[Imponendo ϵ, μ di mezzo biologico, che variano in frequenza, la transf. di Fourier si può fare solo numericamente]

LIMITI DEL QUASI-STATICO

= bassa frequenza → rispetto a cosa?

quando e^{-jkr} è trascurabile si bene usare le formule statiche

↳ se non ci sono perdite (κ reale) è periodico (non smorzato)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{lunghezza d'onda (periodo spaziale)} \quad [m]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

→ $e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}}$ posso misurare la distanza in lunghezze d'onda

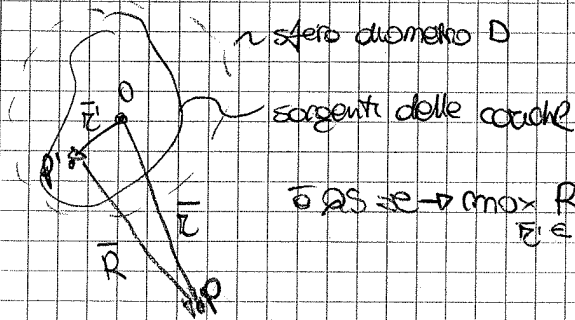
- distanza a cui la cariche
- dimensioni della carica

lo voglio che $e^{-j2\pi \frac{R}{\lambda}} \approx 1$ per il caso quasi-statico

$$\Rightarrow \frac{R}{\lambda} \ll 1$$

$$\frac{D}{\lambda} \ll 1$$

- D sono le dimensioni della sorgente (incluso in una sfera)



$$\bar{r} \approx R \Rightarrow \max_{\vec{r} \in \Omega} R \ll \lambda$$

$D \ll \lambda$ sorgente piccola
 $R \ll \lambda$ osservatore vicino

La condizione quasi statica è verificata se la sorgente è piccola e l'osservatore da vicino (rispetto a λ)

Compo vicino \rightarrow fenomeni statici (bassa frequenza)
 lontano \rightarrow " " dinamica

[per $R \gg \lambda$ il campo scende come $\frac{1}{R}$ \rightarrow a grande distanza dalle sorgenti e D > R]

FAR FIELD REGION

20-12-2017

ONDE PIANE: lontano dalla sorgente contano i fenomeni ondosi

\rightarrow campo non più quasi statico

- lontano dalla sorgente (es. dipolo \rightarrow significa lontano rispetto alla loro distanza)
- vedo la sorgente come quasi puntiforme

Le congiungenti tra P e un punto qualsiasi sulla sorgente e P e O tendono a diventare parallele

approssimazione: $\vec{R} \approx r - \hat{r} \cdot \vec{r}'$?

Ho anche il termine di fase: $|\Delta\phi| = \frac{2\pi}{\lambda} |\hat{r} \cdot \vec{r}'| \leq \frac{2\pi}{\lambda}$

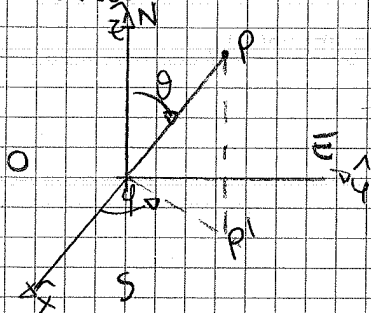
\rightarrow l'errore di fase che fosse che faccia non dipende dalla distanza

$$\vec{A}(\vec{P}) \approx \mu_0 g(r) \vec{N}(\hat{r})$$

distanza tra P e O

il termine che tiene conto del fatto che la sorgente non è puntiforme

Utilizzo le coordinate sferiche



θ = Polar angle \rightarrow cresce in direzione sud

ϕ = Azimuthal angle \rightarrow cresce andando verso est

$r > \frac{D^2}{\lambda}$ regione FRAUNHOFER ??

$$E_r \ll E_{\theta, \phi}$$

ho solo componenti trasversali

Il campo elettrico e magnetico sono linearmente indipendenti

$$\vec{H}(\vec{P}) \cong \frac{1}{\omega \mu_0} \nabla(\vec{P}) \times \vec{E}(\vec{P})$$

\rightarrow è un traccia del regime di onde