Regimi periodici non sinusoidali

Per la serie di Fourier

$$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(2\pi f n t + \varphi_n)$$

$y(t)$ non è espressa in modo rigoroso perché servirebbero infiniti termini; noi useremo serie di Fourier troncate.

$y(t)$ può anche essere scritta:

$$y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi f n t) + B_n (\cos(2\pi f n$$

$$A_n = c_n \cos \varphi_n \qquad B_n = c_n \sin \varphi_n$$

$$c_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\, dt$$

$$A_n = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \sin(2\pi f n t)\, dt$$

$$B_t = 2/T \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) \cos(2\pi f n t)\, dt$$

Se la funzione è pari $a_k = 0 \quad \forall k$

Se la funzione è dispari ~~y(t)~~ $b_k = 0 \quad \forall k$

$c_0 = 0 \quad \forall k$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left(c_0 + c_1 \sin(2\pi f t + \varphi_1) + c_2 \sin(4\pi f t + \varphi_2) + \dots\right)^2 dt}$$

$$\sqrt{\frac{1}{T}\left(c_0^2 T + c_1^2 \frac{T}{2} + c_1^2 \frac{T}{2} + \dots\right)} \overset{*}{=}$$

Contributi di integrato

c_0^2

$c_k^2 \sin^2(2\pi f t k + \varphi_k)$

$c_0 c_k \sin(2\pi f t k + \varphi_k)$

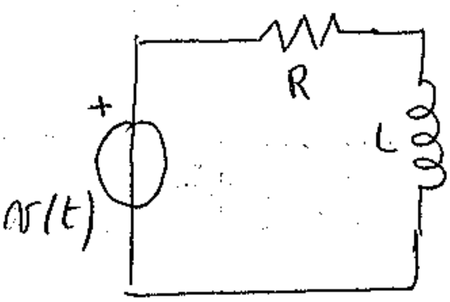
$c_k c_\ell \sin(2\pi f k t + \varphi_k) \sin(2\pi f \ell t + \varphi_\ell)$

$$\overset{*}{=} \sqrt{\frac{1}{\cancel{T}}\left(c_0^2 \cancel{T} + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\cancel{T}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\cancel{T}\right)^2 + \dots\right)} =$$

il valore efficace non risente degli sfasamenti tra le singole armoniche

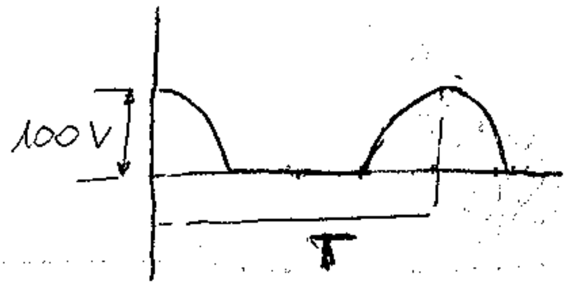
$$Y = \sqrt{C_0^2 + \frac{A_1^2 + B_1^2}{2} + \frac{A_2^2 + B_2^2}{2} + \frac{A_3^2 + B_3^2}{2} + \dots}$$

Esempio



$R = 10\,\Omega$ $\qquad$ $T = 20\,ms$

$L = 50\,mH$ $\qquad$ $\Downarrow$ $f = 50\,Hz$



Voglio arrivare fino alla 4ª armonica

$v(t)$ è funzione pari $\Rightarrow$ $A_k = 0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{V}\cos(100\pi t)\,dt = \frac{\hat{V}}{100\pi T}\Big[\sin(100\pi t)\Big]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} =$$

$$= 31{,}83\ V$$

$$B_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{V}\cos(100\pi t)\cos(100\pi t)\,dt =$$

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos^2(100\pi t)\,dt = \frac{\hat{V}}{2} = 50\ V$$

$$B_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{V}\cos(200\pi t)\cos(100\pi t)\,dt =$$

$$= \frac{\hat{V}}{\pi}\cdot\frac{2}{3} = 21{,}22\ V$$

86

$$B_3 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{V}\cos(100\pi t)\cos(300\pi t)\,dt = 0$$

$$B_4 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \hat{V}\cos(100\pi t)\cos(400\pi t)\,dt = -\frac{2}{15}\frac{\hat{V}}{\pi} =$$

$$= -4,24 \ V$$

$$v(t) = 31,83 + 50\cos(100\pi t) + 21,22\cos(200\pi t) - 4,24\cos(400\pi t)$$

$$I_0 = \frac{C_0}{R} = 3,183 \ A$$

$$\overline{V}_1 = \frac{50}{\sqrt{2}}j \qquad \overline{Z}_1 = R + j(100\pi L)$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_1} = \frac{50}{\sqrt{2}}j \cdot \frac{1}{10 + j\,15,7} = 1,6 + j\,1,02$$

$$\underline{i_1(t)} = \sqrt{2}\,1,6\sin(100\pi t) + \sqrt{2}\,1,02\cos(100\pi t)$$

$$\overline{V}_2 = \frac{21,22}{\sqrt{2}}j \qquad \overline{Z}_2 = R + j(200\pi L) = 10 + j\,31,4$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_2} = \frac{j\,15}{10 + j\,31,4} = 0,43 + j\,0,138 \ A$$

$$\underline{i_2} = \sqrt{2}\,0,43\sin(200\pi t) + \sqrt{2}\,0,138\cos(200\pi t)$$

FATTORE di DISTORSIONE (K_D)

$$K_d = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2}{2}}}$$

Potenza

$$v(t) = V_0 + V_1\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_{V_1}) + V_2\sqrt{2}\,\sin(\omega t 2 + \varphi_{V_2}) + \dots$$

$$i(t) = I_0 + I_1\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi_{I_1}) + I_2\sqrt{2}\,\sin(2\omega t + \varphi_{I_2}) + \dots$$

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = V_0 I_0 + 2V_1 I_1 \sin(\omega t + \varphi_{V_1})\sin(\omega t + \varphi_{I_1})$$
$$+\sqrt{2}V_1 I_0 \sin(\omega t + \varphi_{V_1}) + \sqrt{2}V_0 I_1 \sin(\omega t + \varphi_{I_1}) +$$
$$+2V_1 I_2 \sin(\omega t + \varphi_{V_1})\sin(2\omega t + \varphi_{I_2}) + 2V_2 I_1 \sin(2\omega t + \varphi_{V_2})\sin(\omega t + \varphi_{I_1})$$
$$+ \dots$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\cdot i(t) =$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\Big[(V_0 I_0) + 2V_1 I_1 \sin(\omega t + \varphi_{V_1})\sin(\omega t + \varphi_{I_1}) +$$
$$2V_2 I_2 \sin(2\omega t + \varphi_{V_2})\sin(2\omega t + \varphi_{I_2})\Big]\,dt$$

$$= V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos(\varphi_{V_1} - \varphi_{I_1}) + V_2 I_2 \cos(\varphi_{V_2} - \varphi_{I_2})$$

$$P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{N} V_k I_k \cos(\varphi_k)$$

$$Q = \sum_{k=1}^{N} V_K I_K \sin(\overbrace{\varphi_{V_K} - \varphi_{I_K}}^{\varphi_K})$$

$$\cancel{S \geq \sqrt{V_0 I_0 + \ldots}}$$

$$S = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + \ldots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \ldots}$$

$$\underline{S}^2 = \cancel{V_0^2 I_0^2} + V_0^2 I_1^2 + V_0^2 I_2^2 + V_1^2 I_0^2 + V_1^2 I_2^2 + \cancel{V_1^2 I_1^2} +$$
$$+ V_2^2 I_0^2 + V_2^2 I_1^2 + \cancel{V_2^2 I_2^2}$$

$$\underline{P}^2 = \cancel{V_0^2 I_0^2} + \cancel{V_1^2 I_1^2 \cos^2(\varphi_1)} + \cancel{V_2^2 I_2^2 \cos^2(\varphi_2)} +$$
$$+ 2 V_0 I_0 V_1 I_1 \cos(\varphi_1) + 2 V_0 I_0 V_2 I_2 \cos(\varphi_2) +$$
$$\underbrace{+ 2 V_1 I_1 V_2 I_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)}$$
$$= V_1 I_1 V_2 I_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cancel{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}]$$

$$\underline{Q}^2 = \cancel{V_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1} + \cancel{V_2^2 I_2^2 \sin^2 \varphi_2} +$$
$$+ \underbrace{2 V_1 I_1 V_2 I_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)}$$
$$= I_1 I_2 V_1 V_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cancel{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\underline{S^2 - P^2 - Q^2} = V_0^2 I_1^2 + V_0^2 I_2^2 + V_1^2 I_0^2 + V_1^2 I_2^2 + V_2^2 I_0^2 +$$
$$V_2^2 I_1^2 - 2 V_1 I_1 V_2 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2 V_0 I_0 V_1 I_1 \cos(\varphi_1)$$
$$- 2 V_0 I_0 I_2 V_2 \cos(\varphi_2)$$

Introduciamo $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_0 - \varphi_1)$

$\cos(\varphi_2) = \cos(\varphi_0 - \varphi_2)$

$S^2 - P^2 - Q^2 \neq 0$ e viene posto uguale a

<u>**D** potenza deformante</u>

$S^2 - P^2 - Q^2 = \mathbf{D}^2$ (Va d)

$$D^2 = \sum_{i=0}^{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \left(V_i^2 I_j^2 + V_j^2 I_i^2 - 2 V_i I_i V_j I_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right)$$

Supponiamo di avere una rete con soli resistori, quanto vale D^2

In una rete del genere $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$\cos(\varphi_i) = 1 \qquad \sin(\varphi_i) = 0$

$Q = 0$

$$D^2 = V_0^2 I_1^2 + V_0^2 I_2^2 + V_1^2 I_0^2 + V_1^2 I_2^2 + V_2^2 I_0^2 + V_2^2 I_1^2 - 2 V_0 I_0 V_1 I_1 - 2 I_0 V_0 V_2 I_2 - 2 V_1 I_1 V_2 I_2$$

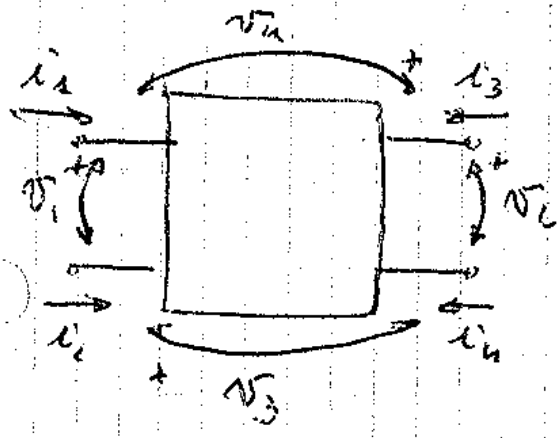
$$= (V_0 I_1 - V_1 I_0)^2 + (V_0 I_2 - V_2 I_0)^2 + (V_1 I_2 - V_2 I_1)^2$$

In una rete del genere l'impedenza non varia in base alla frequenza ed è $R = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_0}{I_0} \Rightarrow \begin{array}{l} V_1 I_2 = I_1 V_2 \\ V_0 I_1 = I_0 V_1 \end{array}$

quindi $D^2 = 0$

Definiamo $\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$ in un sistema periodico non sinusoidale.

DOPPI BIPOLI



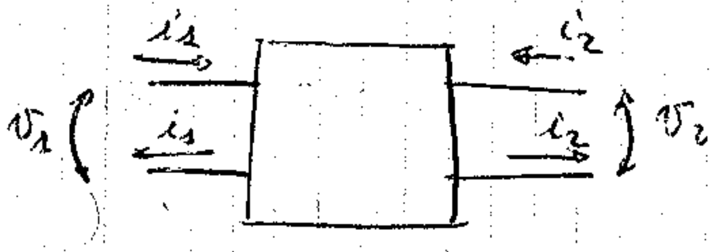
3 correnti linearmente indipendenti.

3 tensioni linearmente indipendenti.

Differenze tra quadripolo e doppio bipolo:

- 4 morsetti raggruppati in due gruppi (porte) e ciascun gruppo è caratterizzato da un solo valore di corrente
- I circuiti esterni possono essere connessi soltanto ad una porta.

Quindi un doppio bipolo è caratterizzato da 2 valori di tensioni e da 2 valori di correnti.



Si adotta convenzione UTILIZZATORI