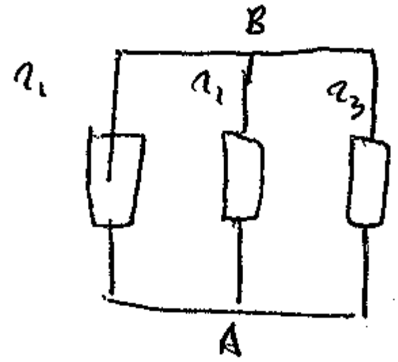
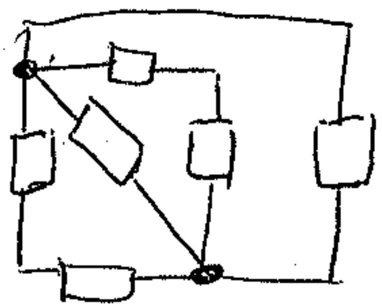


Anelli:

$r_1 - R_2$] maglie
$r_2 - R_3$

$r_1 - R_3$ non maglie

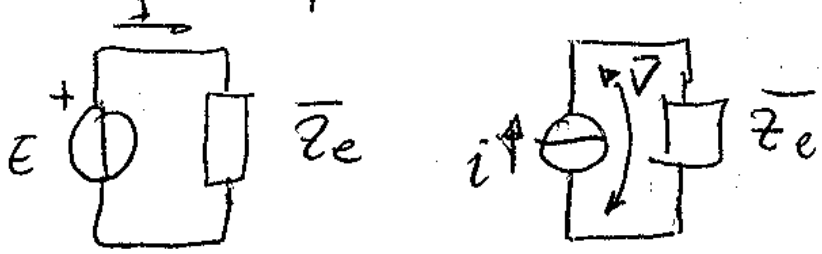
RISOLVERE UN CIRCUITO



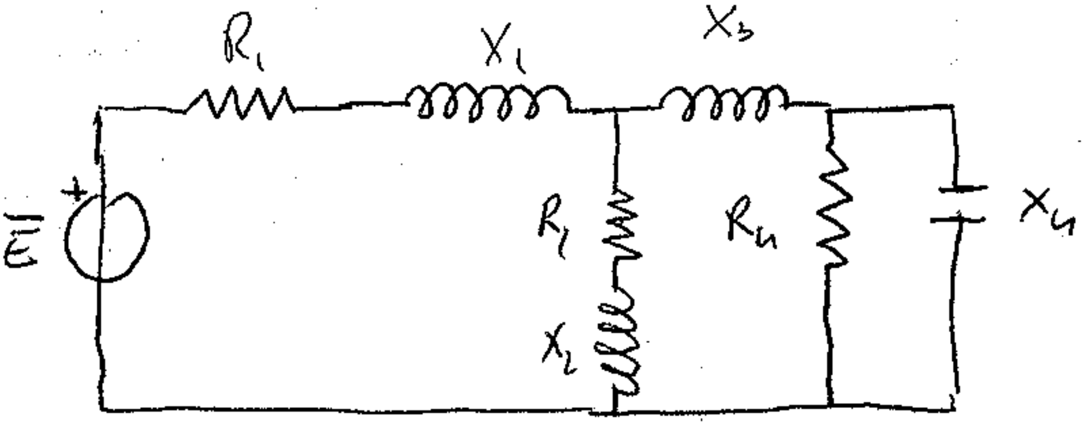
Chiesto di essere in regime stazionario o quasi.

Dobbiamo calcolare tutte le tensioni e tutte le correnti
A nostra disposizione abbiamo le relazioni costitutive, legge tensioni e correnti; modificare configurazione circuito con bipoli equivalenti.

Più semplice => 1 solo elemento attivo



Proviamo a risolvere una rete:



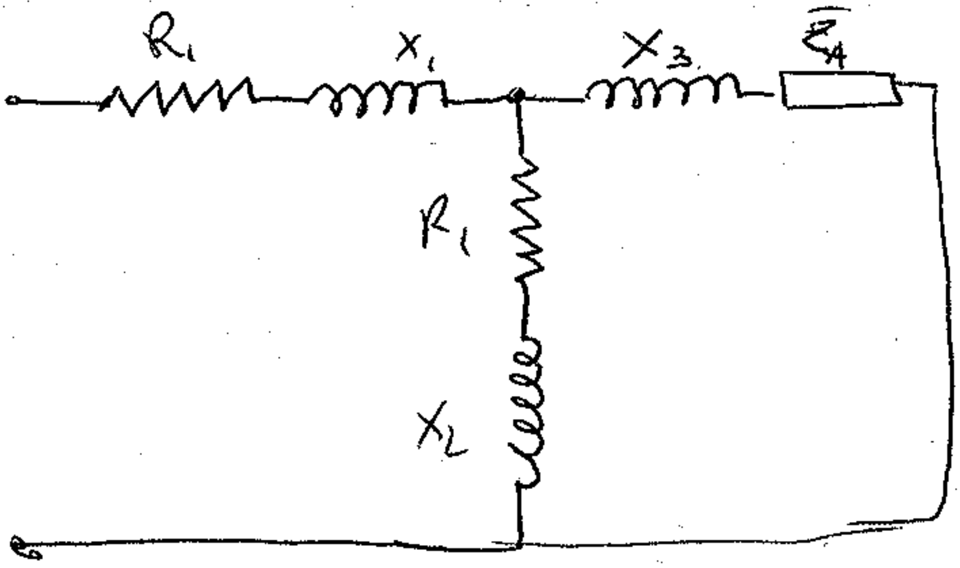
DATI

$\bar{E} = 90 + j0$ $\quad R_1 = 7\,\Omega$

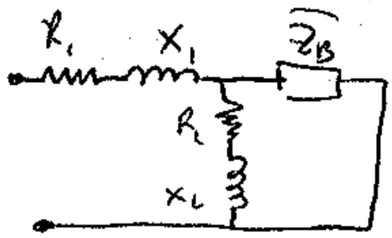
$X_1 = 4\,\Omega$ $\quad R_2 = 10\,\Omega$ $\quad X_2 = 10\,\Omega$

$X_3 = 20\,\Omega$ $\quad R_4 = 20\,\Omega$ $\quad X_4 = 20\,\Omega$

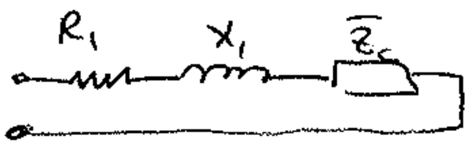
$$\bar{Z}_A = \frac{R_4(-jX_4)}{R_4 - jX_4} \cdot \frac{R_4 + jX_4}{R_4 + jX_4} = \frac{}{R_4^2 + X_4^2} = (10 - j10)\,\Omega$$



$\bar{Z}_B = jX_3 + Z_A = 10 + j10$



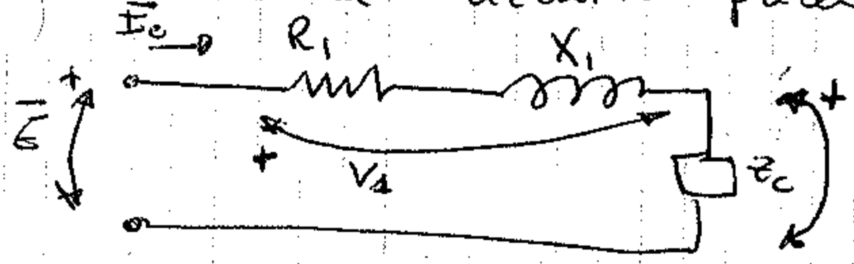
$$\bar{Z}_C = \frac{(R_2 + jX_2)Z_B}{R_2 + jX_2 + Z_B} = 5 + j5$$



$\bar{Z}_e = R_1 + jX_1 + \bar{Z}_C = 12 + j9$

$$\overline{I}_E = \overline{Z}_c \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_e} = \frac{90 \,(12-j9)}{225} = 4,8 - j3,6$$

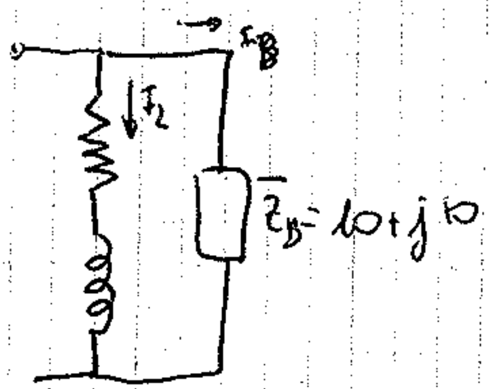
Torniamo al circuito precedente



$$\overline{V}_c = \overline{Z}_c \cdot \overline{I}_e = (4,8 - j3,6)(5 + j5) =$$

$$= 24 - j18 + j24 + 18 = 42 + j6$$

$\overline{V}_1 = 48 - j6$ × legge tensioni



$$\overline{I}_2 = \frac{V}{R_2 + jX_2} \quad o \quad I_2 = \frac{\overline{I}_E \, \overline{Z}_B}{R_2 + jX_2 + \overline{Z}_B}$$

$$\overline{Z}_B = R_2 + jX_2 \Rightarrow \overline{I}_2 = \frac{\overline{I}_E \, \cancel{\overline{Z}_B}}{2\cancel{\overline{Z}_B}} = \frac{\overline{I}_E}{2} = 2,4 - j1,8$$

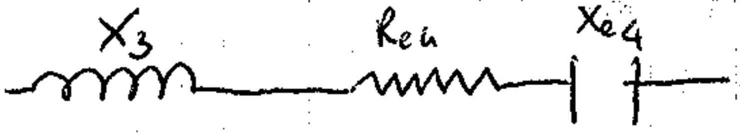
$$\overline{I}_B = 2,4 - j1,8$$

$$\overline{V}_3 = jX_3 (I_B) = j20(2,4 - j1,8) = \underbrace{j48 + \cancel{j}36}$$

Modulo pari tensione E × fenomeno di risonanza

$$Z_4 = R_4 // (-j X_4) = \frac{-j R_4 X_4}{R_4 - j X_4} \cdot \frac{R_4 + j X_4}{R_4 + j X_4} =$$

$$\frac{R_4 X_4^2 - j R_4^2 X_4}{R_4^2 + X_4^2} = \frac{R_4 X_4^2}{R_4^2 + X_4^2} + j \frac{R_4^2 X_4}{R_4^2 + X_4^2} =$$

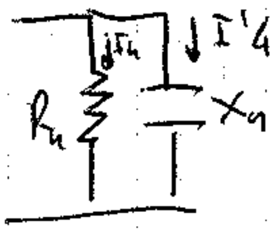


Si ha risonanza se

$X_3 = X_{e4}$

Nel nostro caso $X_{e4} \neq X_3$ ma le due tensioni si compensano parzialmente.

$$\bar{V}_4 = \bar{V}_c - \bar{V}_3 = 42 + j6 - 36 - j48 = 6 - j42$$



$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = 0,3 - j\,2,1$$

$$I'_4 = I_8 - I_4 = 2,4 - j1,8 - 0,3 + j2,1 =$$

$$2,1 + j\,0,3$$

Trovare a casa potenza attiva e reattiva per ogni elemento.

Questo metodo di soluzione è concettualmente semplice la "fregatura" sta nel doppio procedimento.

METODO di FALSA POSIZIONE

Supponiamo che nell'esercizio precedente si voglia calcolare I_4.

Scambiamo le carte: supponiamo di conoscere I_4 e di voler calcolare la tensione del generatore.

$\tilde{\bar{I}}_4$ conosco

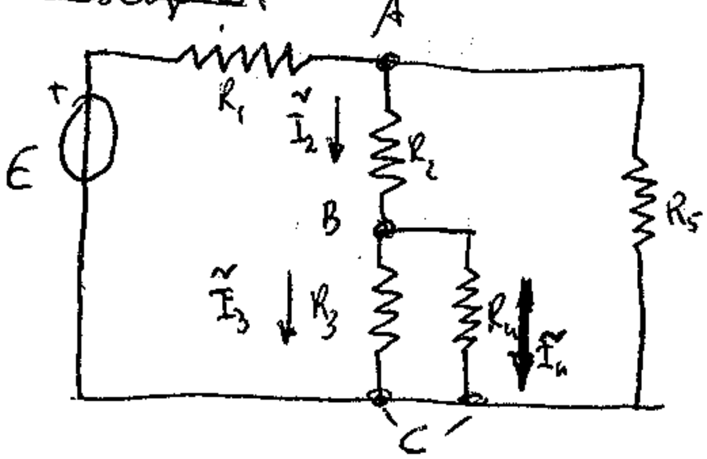
$$\tilde{V}_{DF} \Rightarrow \tilde{\bar{I}}_4' \Rightarrow \tilde{\bar{I}}_3' \Rightarrow \dots \Rightarrow \tilde{\bar{E}} \text{ in genere } \neq \bar{E}$$

$$\frac{\bar{E}}{\tilde{\bar{E}}} = \frac{\bar{I}_4}{\tilde{\bar{I}}_4} = \tilde{\bar{K}}$$

$$\bar{I}_4 = \tilde{\bar{I}}_4 \tilde{\bar{K}}$$

Vantaggio rispetto a metodo precedente è non semplificare la rete.

~~Esempio:~~



$E = 100\ V$

$R_1 = 5\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 3\ \Omega$ $\quad R_4 = 2\ \Omega$

$R_5 = 15\ \Omega$

Vogliamo risolvere la rete

$\tilde{I}_4 = 1\ A \qquad \tilde{V}_{BC} = 2\ V$

$$\tilde{I}_3 = \frac{\tilde{V}_{BC}}{R_3} = \frac{2}{3} A = 0,667 \ A$$

$$\tilde{I}_2 = \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4 = 1,667 \ A$$

$$\tilde{V}_{AB} = \tilde{I}_2 R_2 = 16,67 \ V$$

$$\tilde{V}_{AC} = \tilde{V}_{AB} + \tilde{V}_{BC} = 18,67 \ V$$

$$\tilde{I}_5 = \frac{\tilde{V}_{AC}}{R_5} = 1,24 \ A$$

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_5 + \tilde{I}_2 = 2,907 A$$

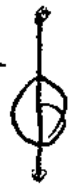
$$\tilde{E} = R_1 \tilde{I}_1 + \tilde{V}_{AC} = 33,22 \ V \qquad \tilde{K} = \frac{E}{\tilde{E}} \simeq 3$$

Reti con più di un generatore

Poiché rete è lineare si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Metodo sovrapposizione degli effetti ha dei difetti: - lunghezza di calcolo

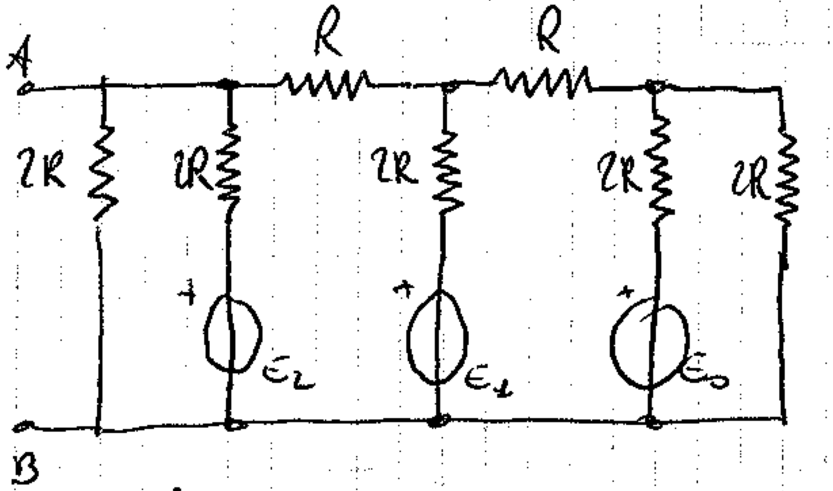
- più probabilità di commettere errori



$+$ E lo sostituiamo con

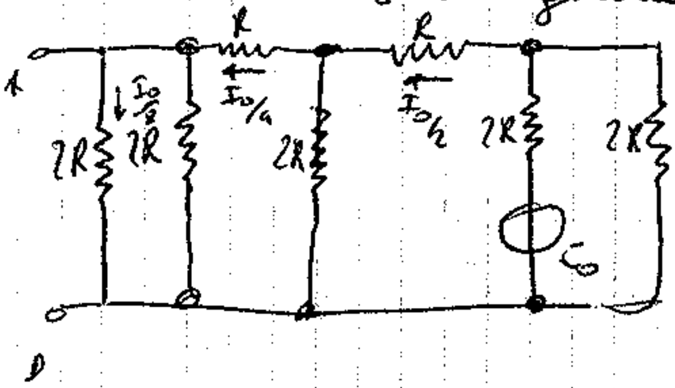
 A  lo sostituisco con 

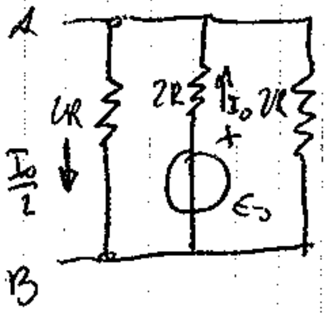
Esempio:



$V_{AB} = ?$

lascio solo generatore E_0



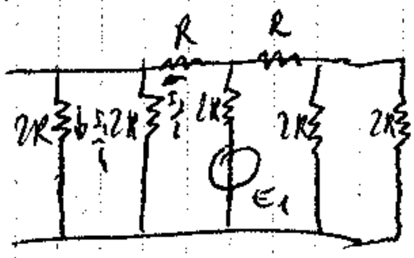


$R_e = 3R$

$I_0 = \frac{E_0}{3R}$

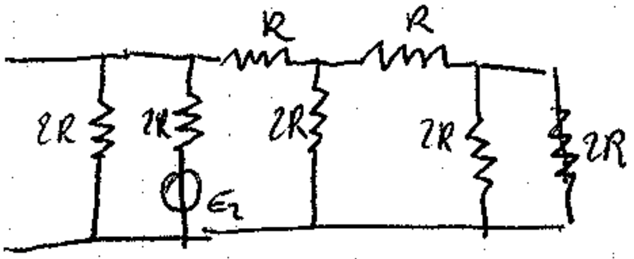
$V'_{AB} = \frac{2R\, I_0}{8} = \frac{R I_0}{4} = \frac{R}{4}\,\frac{E_0}{3R} = \frac{E_0}{12}$

Agisce solo E_1



$I_1 = \frac{E_0}{3R}$

$V''_{AB} = \frac{I_1}{12} \cdot 2R = \frac{E_0}{6}$



$I_L = \frac{E_0}{3R}$

$V^*_{2AB} = \frac{I_2}{\cancel{4}}\cancel{4}R = \frac{E_0}{3}$

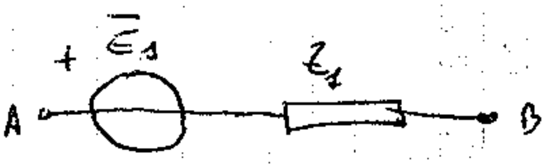
$$V_{AB} = V_{0AB} + V_{1AB} + V^*_{2AB} = \frac{E_0}{18} + \frac{E_1}{6} + \frac{E_2}{3} = \frac{1}{12}(E_0 + 2E_1 + 4E_2)$$

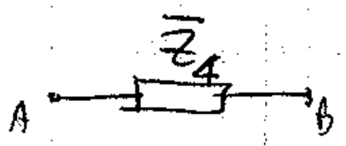
Convertitore digitale - analogico.

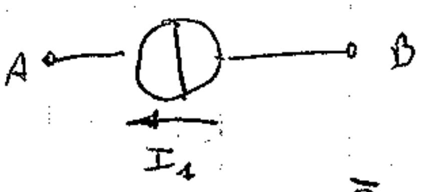
Teorema di Millman

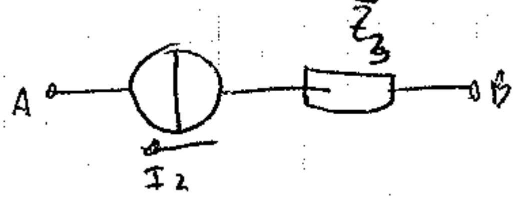
- rete deve essere in regime permanente
- rete deve avere solo 2 nodi

Il ramo può contenere

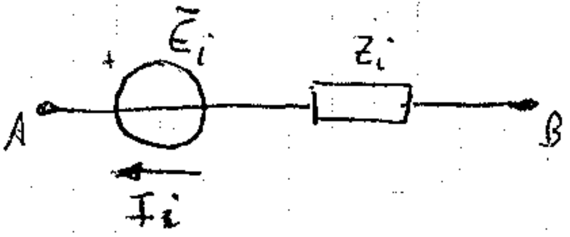








Supponiamo



$\overline{V_{AB}} = \overline{E_i} - \overline{I_i}\,\overline{Z_i}$

$\overline{I_i} = \frac{\overline{E_i} - \overline{V_{AB}}}{\overline{Z_i}}$

$$\sum_{K=1}^{n_c} I_K + \sum_{\ell=1}^{n_e} I_\ell = 0 = 0$$

n_c = numero rami con gener. di corrente

n_e = numero rami senza genera. di corrente

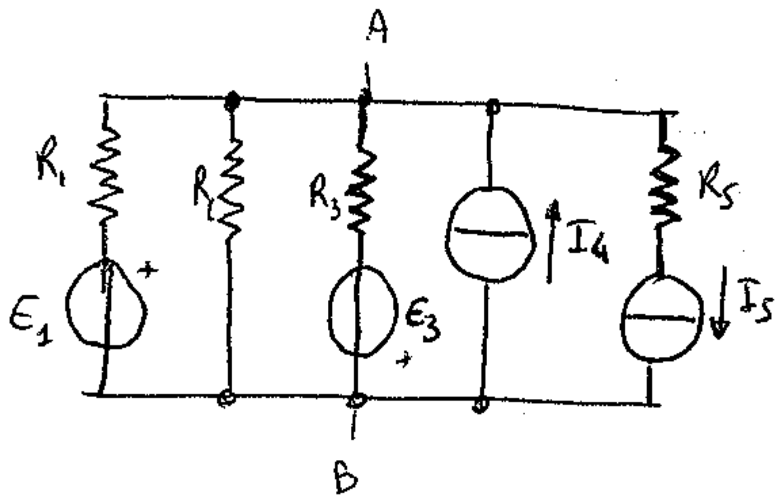
38

$$\sum_{K=1}^{n_c} I_K + \sum_{\ell=1}^{n_e} \left(\frac{\overline{E_\ell}}{\overline{Z_\ell}} - \frac{\overline{V_{AB}}}{\overline{Z_\ell}} \right) = 0$$

$$\boxed{\overline{V_{AB}} = \frac{\sum_{K=1}^{n_c} \overline{I_K} + \sum_{\ell=1}^{n_e} \left(\frac{\overline{E_\ell}}{\overline{Z_\ell}} \right)}{\sum_{\ell=1}^{n_e} \frac{1}{\overline{Z_\ell}}}}$$

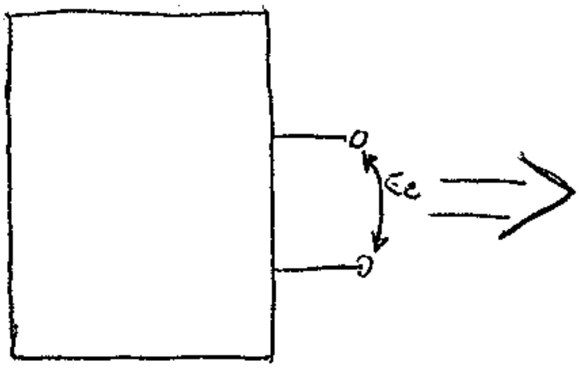
Teorema di Millman

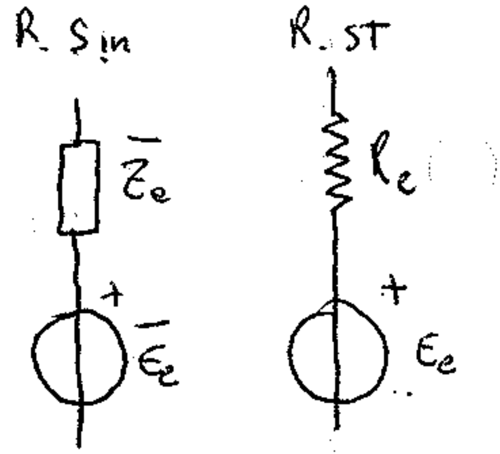
Esempio:



$$\overline{V_{AB}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3} + I_4 - I_5}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Teorema di Thevenin

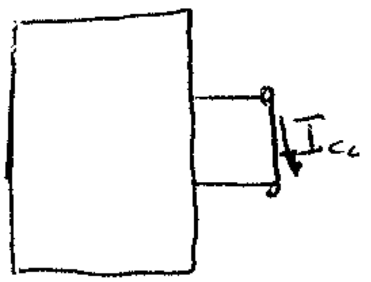




E_e è la tensione a vuoto tra i due morsetti

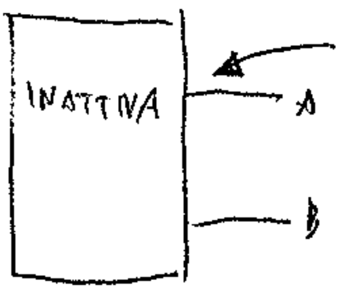
Prova di cortocircuito per calcolare $\bar I_{cc}$

$$\bar I_{cc} = \frac{\bar E_e}{\bar Z_e} \Rightarrow \bar Z_e = \frac{\bar E_e}{\bar I_{cc}}$$



Altro metodo per calcolare $\bar Z_e$

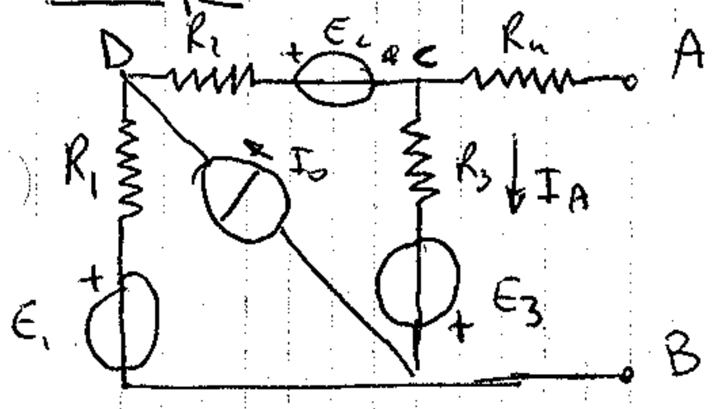
Rendere inattiva la rete



è bipolo passivo

$$\bar Z_{AB} = \bar Z_e$$

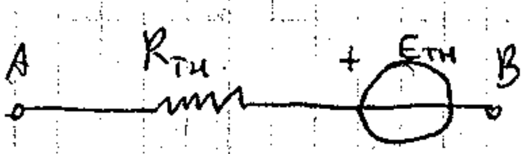
Esempi



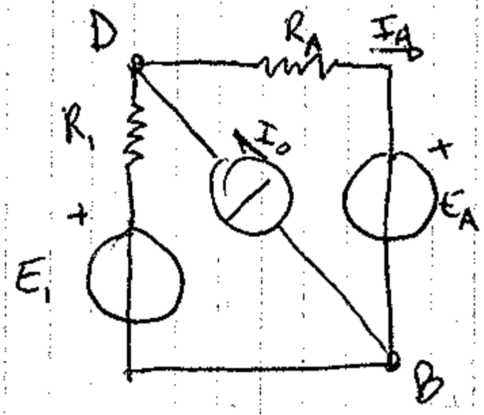
$E_1 = 120\ V$ $\qquad I_0 = 6\ A$ $\qquad R_3 = 5\ \Omega$

$E_2 = 60\ V$ $\qquad R_1 = 4\ \Omega$ $\qquad R_4 = 5\ \Omega$

$E_3 = 90\ V$ $\qquad R_2 = 2\ \Omega$

Voglio arrivare a 

1) Trovare E_{TH} (in R_4 non circola corrente $\Rightarrow$ non la considero).



$R_A = R_2 + R_3 = 7\ \Omega$

$E_A = E_2 - E_3 = -30\ V$

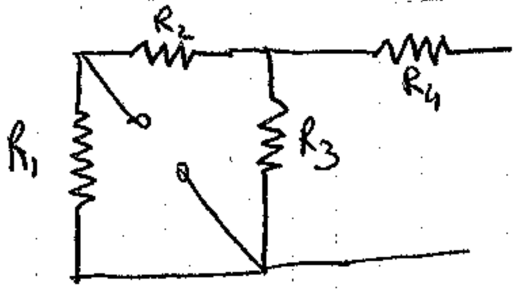
$$V_{DB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_A}{R_A} + I_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_A}} = \frac{30 + 6 - 4{,}28}{\frac{7+4}{28}} =$$

$$= \frac{31{,}72 \cdot 28}{11} = 80{,}75\ V$$

$$I_A = \frac{V_{DB} - E_A}{R_A} = 15{,}82\ A$$

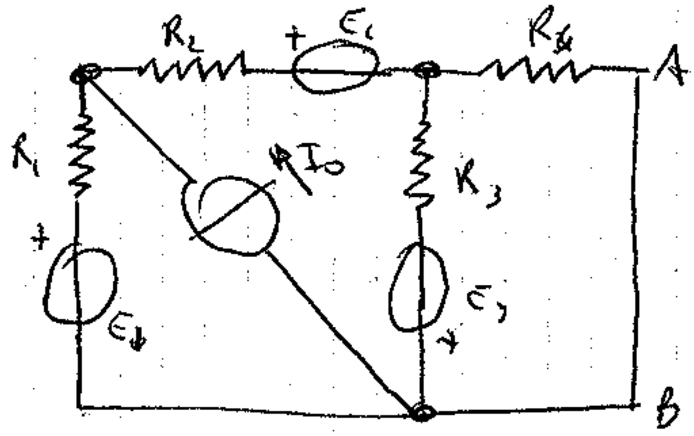
$$V_{AB} = R_3 I_A - E_3 = -10,9\ V$$

$$\boxed{V_{TH} = -10,9\ V}$$

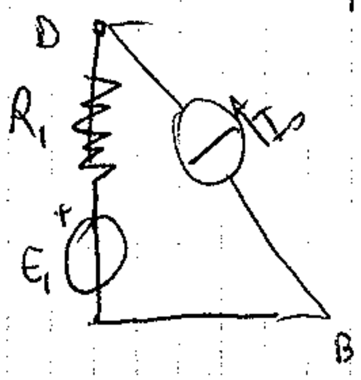


$$\boxed{R_{TH} = R_4 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) + R_3} = 7,72\ \Omega}$$

Proviamo a risolvere con corrente di corto circuito



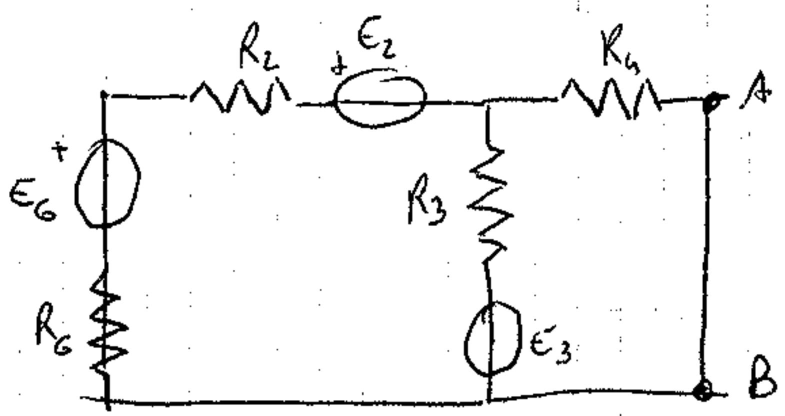
Calcolo eq. di Thevenin di



$E_G = V_{DB} = 144\ V$

$R_G = R_1 = 4\ \Omega$

$V_{DB} = R_1 I_o + E_1 = 144\ V$



$R_H = R_G + R_2 = 6\ \Omega$

$E_H = E_G - E_2 = 84\ V$

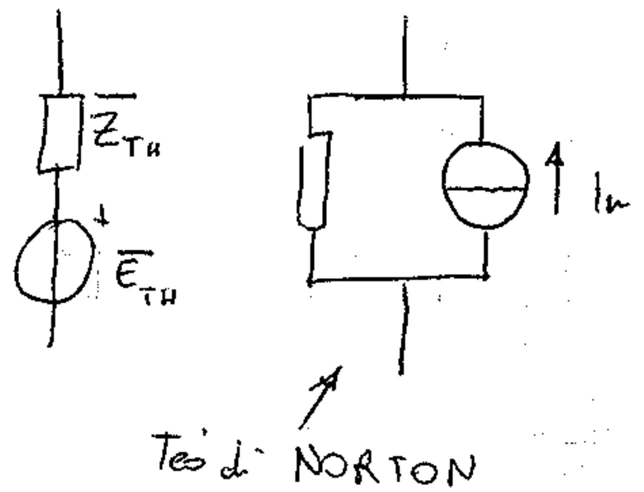
(10)

$$V'_{CB} = \frac{\frac{E_H}{R_H} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_H} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_n}}$$

$$I_{cc} = \frac{V'_{CB}}{R_n}$$

$$R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I_{cc}}$$

Possiamo pensare di sostituire al bipolo di Thevenin



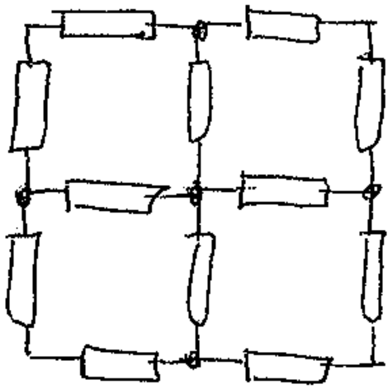
$$\overline{Z}_n = \overline{Z}_{TH}$$
$$\overline{E}_{TH} = \overline{Z}_n \, \overline{I}_n$$

Possiamo calcolare $\overline{I}_n$ con la prova di corto circuito

$\overline{Z}_n$ si calcola esattamente come Z_{TH} del generatore di Thevenin.

Non sempre thevenin o norton possono essere applicati:

Es:



Prospetto riepilogativo

$\bar{E}_{TH}$: tensione a vuoto

$\bar{I}_N$: corrente di c.c.

$\bar{Z}_N = \bar{Z}_{TH}$:
- rendere inattiva la rete e calcolare impedenza equivalente della rete vista dall'esterno
- $\bar{Z}_{TH} = \dfrac{\bar{E}_{TH}}{\bar{I}_N}$
- rete senza generatori indipendenti alimentata con tensione o corrente nota. *

Incognite all'interno della rete

P è n° di bipoli

2P numero informazioni da avere per caratterizzare ciascun bipolo (P tensioni, P correnti)

P equazioni costitutive

Quindi abbiamo P incognite

In realtà il numero di cognite è R (n. rami)

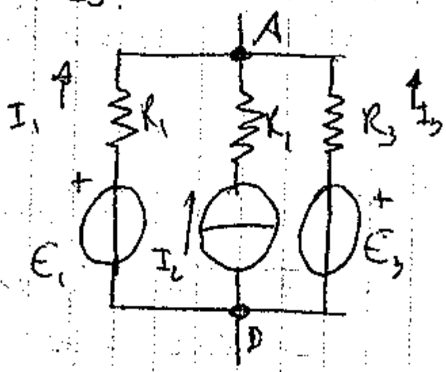
Il ramo può a) contenere generatori di corrente
b) non contenere generatori di corrente

b) incognite è corrente

a) tensione sul generatore di corrente.

Dobbiamo scrivere R equazioni, a nostra disposizione abbiamo Legge delle correnti e Legge delle tensioni

Es:



Abbiamo a disposizione 5 eq., ma dobbiamo scriverne 3

Legge correnti in A $\quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Legge correnti in B $\quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$

sono stessa relazione !!!

Legge tensioni alle tre maglie (verso orario)

1-2) $-E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 + V_2 = 0$

2-3) $-V_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + E_3 = 0$

1-3) $-E_1 + R_1 I_1 - R_3 I_3 + E_3 = 0$

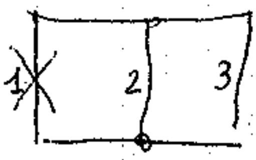
1-3) è combinazione lineare dei due precedenti (è somma di 1-2 e 2-3).

Se abbiamo n nodi all'interno della rete possiamo applicare la legge delle correnti n-1 volte.

Le ~~relazioni~~ con la legge delle correnti sono dette ~~relazioni~~ equazioni ai nodi o (primo principio di Kirchoff)

A) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Mi restano $r - n + 1$ equazioni (devo usare legge delle tensioni)



rappresentazione della rete con n nodi, maglie ed anelli.

$$1\text{-}2)\quad -E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 + V_2 = 0$$

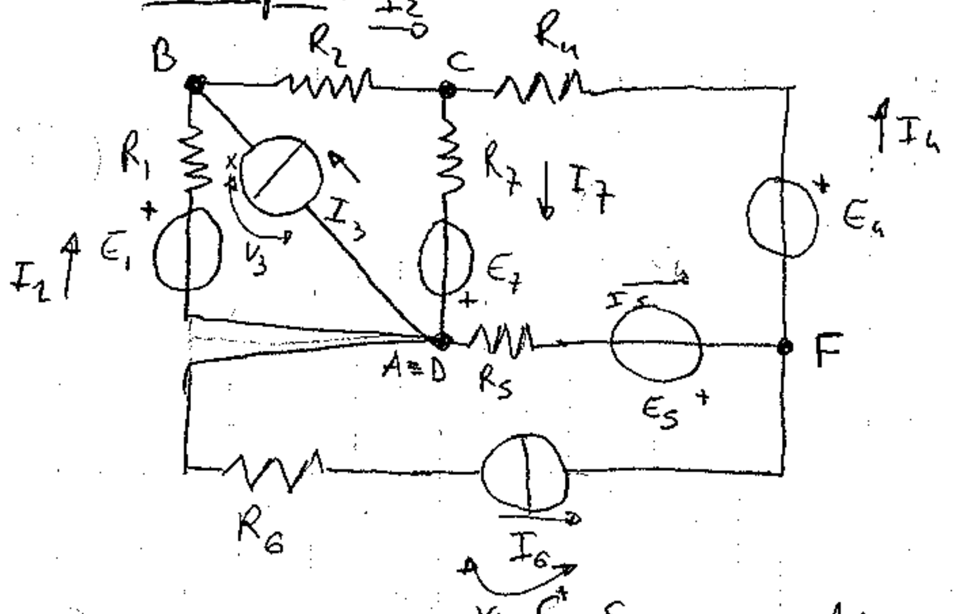
Equazione di anello o II principio di Kirchoff

Ora cancello uno dei due rami (non lo utilizzo più per scrivere equazioni).

$$-V_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + V_3 = 0$$

Ora ho scritto le equazioni di cui ho bisogno.

Esempio:



$r = 7$

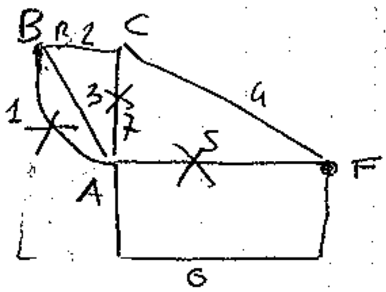
$n = 4$

incognite: $\begin{cases} 5 \text{ correnti} \\ 2 \text{ tensioni} \end{cases}$

B) $I_1 + I_3 = I_2$

C) $I_2 + I_4 = I_7$

D) $I_5 + I_6 = I_4$



Ora si scrivono eq. di anello

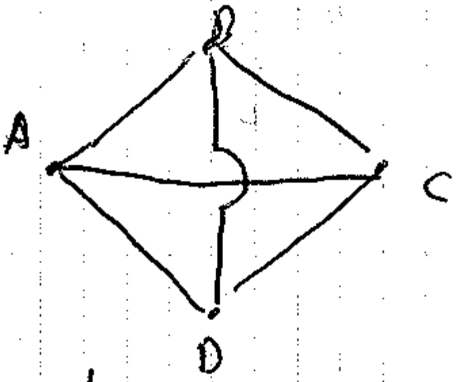
1-3) $-E_1 + R_1 I_1 + V_3 = 0$ elimino ramo 1

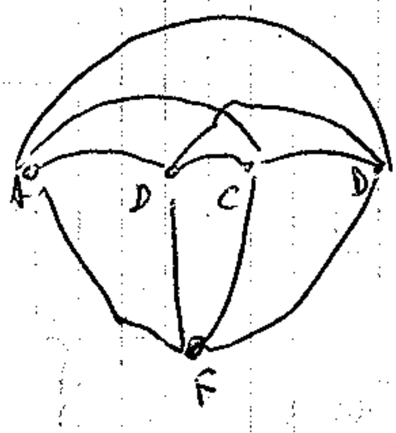
5-6) $R_5 I_5 - E_5 + V_6 - R_6 I_6 = 0$ elimino ramo 5

2-7-3) $R_2 I_2 + R_7 I_7 - E_7 - V_3 = 0$ elimino ramo

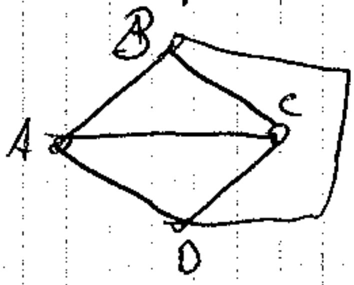
3-2-4-6) $-V_3 + R_2 I_2 - R_4 I_4 + E_4 + V_6 - R_6 I_6 = 0$

Rete Planare: Rete che si può disegnare su una superficie piana senza che vi siano incroci su di essa:

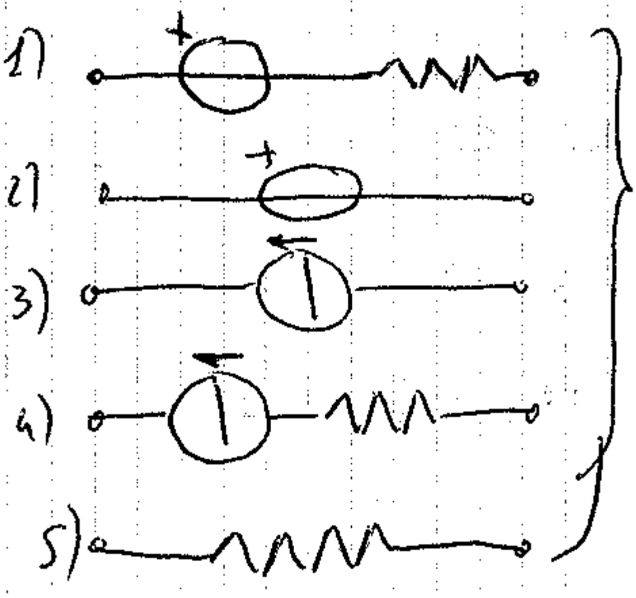




rete planare



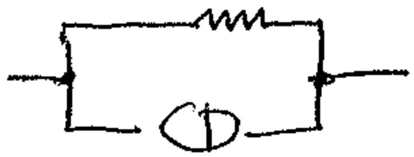
Potenziale ai NODI



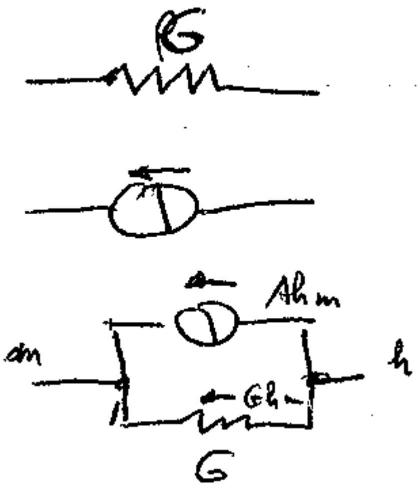
5 situazioni a cui ci si può ricondurre

Escludiamo momentaneamente il caso 2

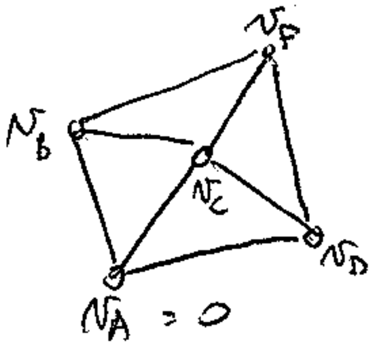
Il caso 1 può essere visto come



Quindi si può ricondurre tutto a



Sostituiamo al valore della resistenza il valore della conduttanza



n nodi

supponiamo che ogni elemento sia caratterizzato da un potenziale

Si pone un nodo a potenziale 0 mentre gli altri nodi avranno un potenziale da ricavare.

Considero un ~~nodo~~ nodo qualunque tranne A es: D (m-esimo nodo)

$$\underbrace{\sum_h I_{hm}}_{\text{entranti}} + \underbrace{\sum_p I_{mp}}_{\text{uscenti}} = 0$$

$$I_{hm} = A_{hm} + (V_h - V_m)\, G_{hm}$$

$$I_m = \sum_h \left(A_{hm} + (V_m - V_h) G_{hm}\right) = \sum_p \left(A_{mp} + G_{mp}(V_m - V_p)\right)$$

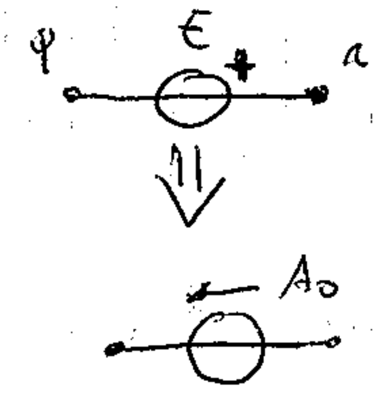
$$\Downarrow$$

$$\left(\sum_h G_{hm} + \sum_p G_{mp}\right) V_m - \left(\sum_h G_{hm} V_h - \sum_p G_{mp} V_p\right) =$$

$$= \sum_h A_{hm} - \sum_p A_{mp}$$

Ho $n-1$ equazioni per $n-1$ incognite

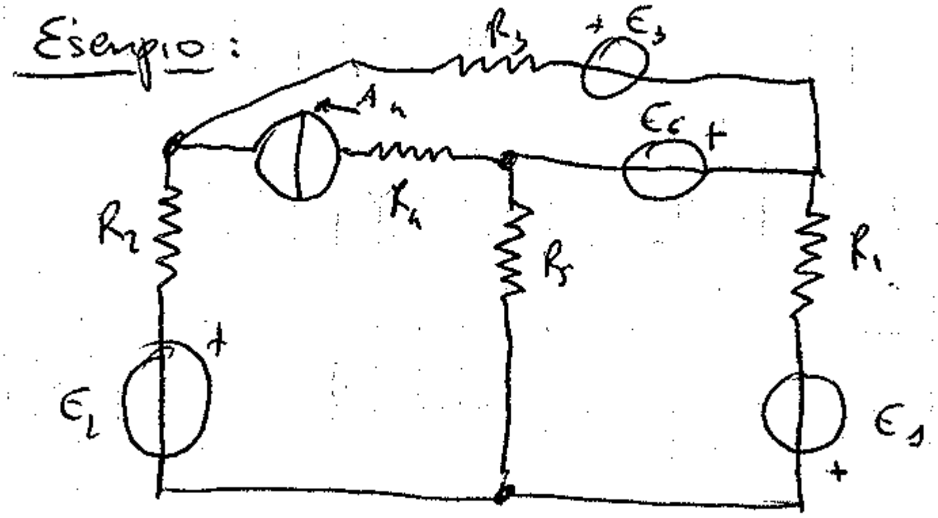
Caso scoperto: ramo contiene un generatore ideale di tensione

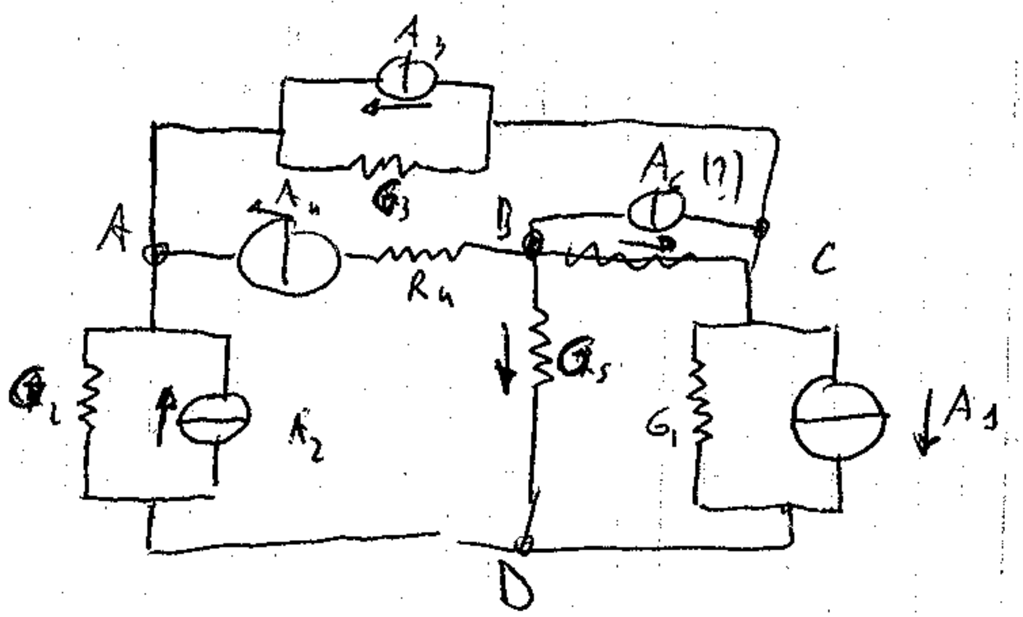


$A_0 = ?$

$V_q - V_r = E$ equazione di vincolo

Esempio:





Suppongo $V_B = 0$ $V_A = ?$ $V_C = ?$ $V_D = ?$ $A_6 = ?$

A) $A_2 + (V_D - V_A) G_2 + A_4 + A_3 + G_3 (V_C - V_A) = 0$

C) $A_6 = A_3 + G_3 (V_C - V_A) + A_1 + G_1 (V_C - V_D)$

D) $A_1 + G_1 (V_C - V_D) + G_5 (\cancel{V_B} - V_D) = A_2 + G_2 (V_D - V_A)$

$V_C = E_6 + V_B = E_6$

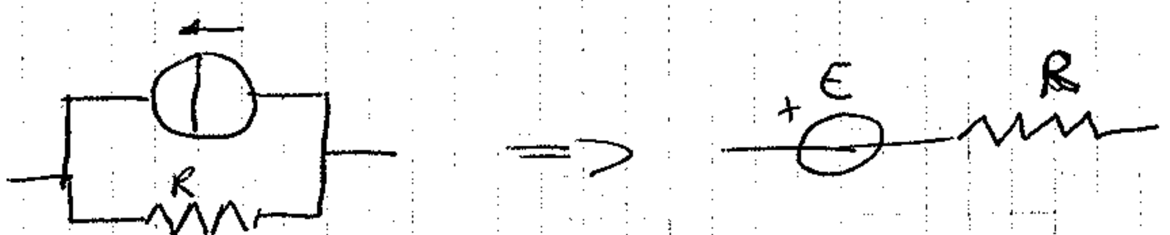
A) $V_A (-G_2 - G_3) + G_2 V_D + G_3 V_C + A_2 + A_3 + A_4 = 0$

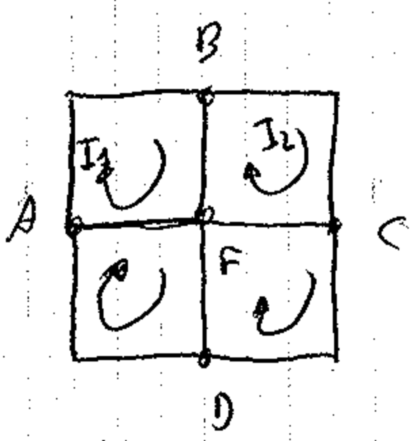
$V_A (G_2 + G_3) - G_2 V_D - G_3 V_C = A_2 + A_3 + A_4$

c) $V_C(G_3+G_1) - G_3 V_A - G_1 V_D = A_6 - A_1 - A_3$

D) $V_D(G_1+G_5+G_2) - G_1 V_C - G_2 V_A = A_1 - A_2$

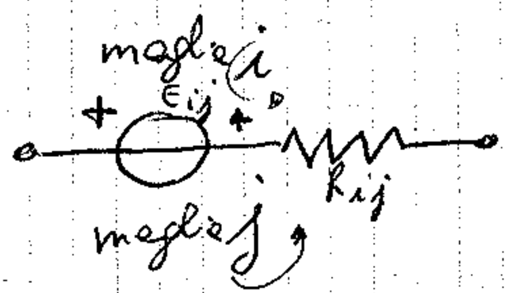
Metodo delle correnti cicliche o di maglia





$I_{AB} = I_1$

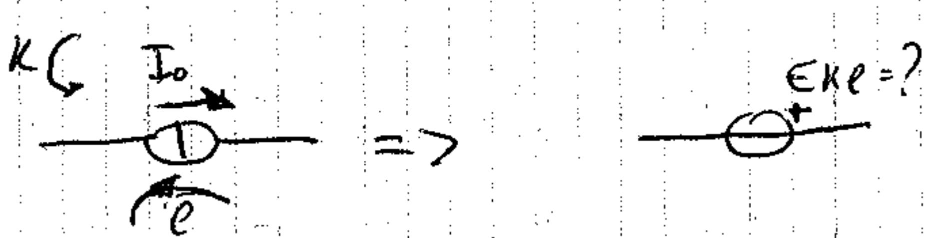
$I_{BF} = I_1 - I_2$



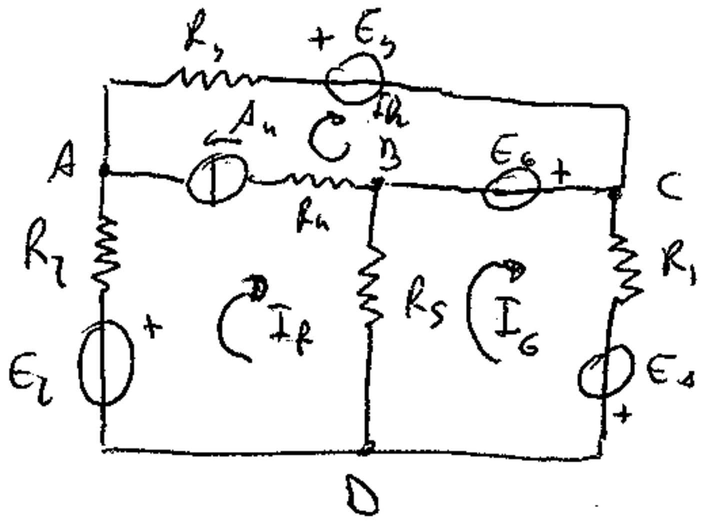
$$V_{ij} = E_{ij} + R_{ij} I_{ij} = E_{ij} + R_{ij}(I_i - I_j)$$

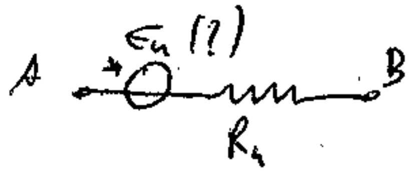
$$\sum_j V_{ij} = 0$$

Caso



$I_0 = I_K - I_l$





$$f)\quad -E_2 + R_2 I_f + E_4 + R_4 (I_f - I_h) + R_5 (I_f - I_g) = 0$$

$$g)\quad R_5 (I_g - I_f) - E_6 + R_1 I_g - E_1 = 0$$

$$h)\quad R_3 I_h + E_3 + E_6 + R_4 (I_h - I_f) - E_4 = 0$$

$$A_4 = I_h - I_f$$

$$f)\quad I_f (R_2 + R_4 + R_5) - R_4 I_h - R_5 I_g = E_2 - E_4$$

$$g)\quad I_g (R_5 + R_1) - R_5 I_f = E_6 + E_1$$

$$h)\quad I_h (R_3 + R_4) - R_4 I_f = -E_3 - E_6 + E_4$$

Questo metodo non è in grado di risolvere le reti non planari

Teorema di Tellegen

n s_i r_i

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot r_i = 0$$

In elettrica se abbiamo

n rami e cui si può enovare i_i e v_i allora

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(t) \cdot i_i(t) = 0$$

cioè

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 0 \qquad \forall t$$

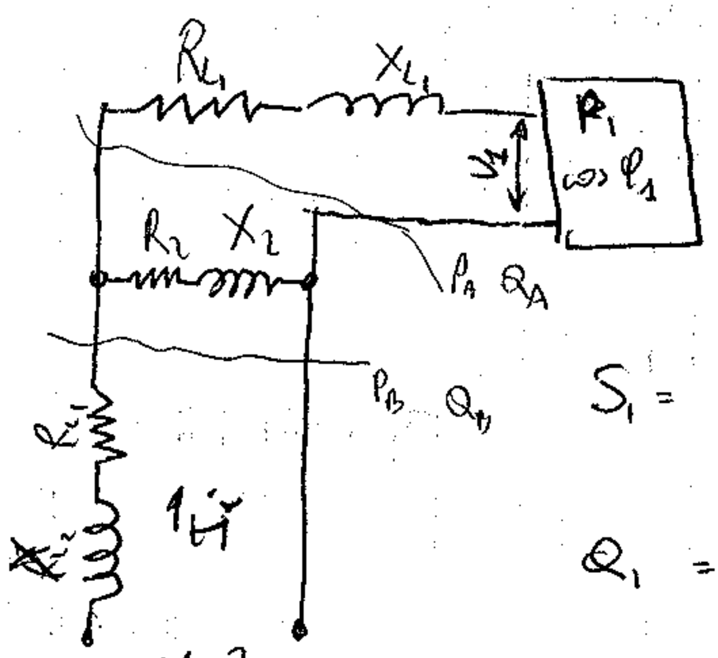
Regime stazionario

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 0$$

Regime sinusoidale

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} Q_i = 0}_{\text{Teorema di Boucherot}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i = 0$$



$V_i = ?$, Q^{i} φ^{i}

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1}$$

$$Q_1 = \pm\sqrt{S_1^2 - P_1^2}$$

$$P_L = R_1 I_1^2 \qquad Q_{L1} = X_{L1} I_1^2$$

$$I_1 = \frac{S_1}{V_1}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_{L1} = P_A \\ Q_1 + Q_{L1} = Q_A \end{cases}$$

$$S_A = \sqrt{P_A^2 + Q_A^2} \qquad V_A = \frac{S_A}{I_1}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} \qquad I_2 = \frac{V_A}{Z_2}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 \qquad Q_2 = X_2 I_2^2$$

$$P_B = P_A + P_2 \qquad Q_B = Q_A + Q_2$$

$$S_B = \sqrt{P_B^2 + Q_B^2}$$

$$I_i = \frac{S_B}{V_A}$$

$$P_{L2} = R_{L2} I_i^2 \qquad Q_{L2} = X_{L2} I_i^2$$

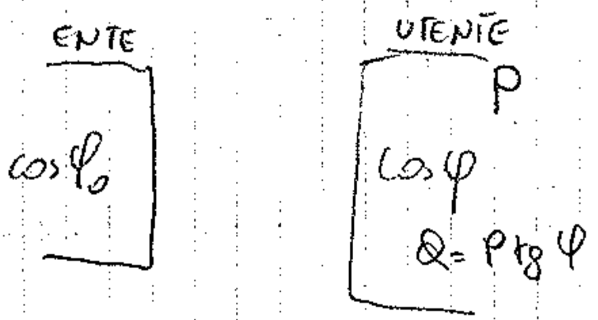
$$P_i = P_B + P_{L2} \qquad Q_i = Q_B + Q_{L2}$$

$$S_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} \qquad V_i = \frac{S_i}{I_i}$$

RIFASAMENTO

$\cos\varphi_0 \geq 0{,}9$

S P Q

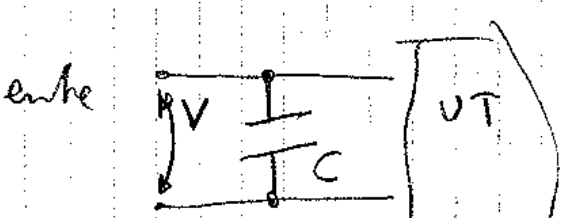


$Q = P\,tg\,\varphi$

$Q_0 = P\,tg\,\varphi_0 \quad \cos\varphi_0 \geq 0{,}9$

ma $\quad Q > Q_0$

Devo interporre una capacità (conviene metterla in parallelo)



$Q = P\,tg\,\varphi$

$Q_c < 0$

$Q_0 = P\,tg\,\varphi_0$

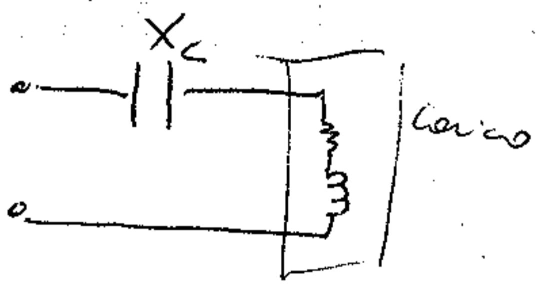
$$Q_0 = Q_c + Q$$

Pensiamo di conoscere V e f

$$Q_0 = P\,tg\,\varphi_0 = -\frac{V^2}{X_c} + P\,tg\,\varphi$$

$$P\,tg\,\varphi_0 = -V^2 2\pi f C + P\,tg\,\varphi$$

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_0)}{2\pi f \, V^2}$$



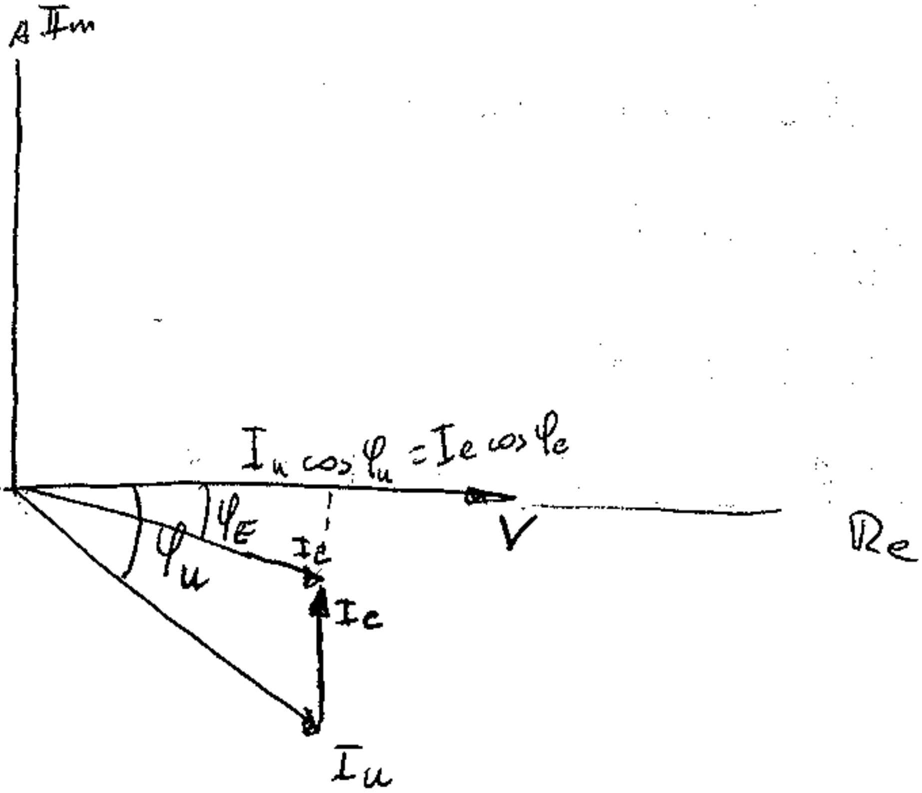
Se ho condensatore in serie

$$Z = R + jX_L \Rightarrow R + jX_L - jX_C$$

$Z \downarrow$ $\quad I_L \uparrow$ $\quad \varphi \uparrow$

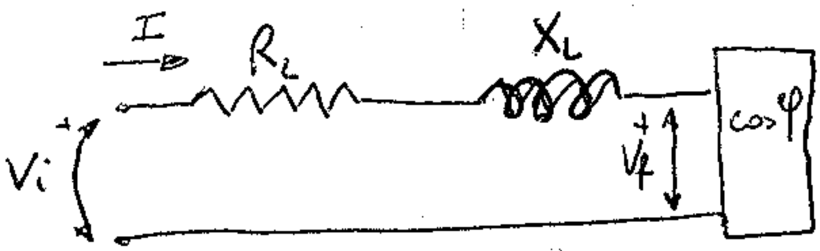
Aumenta caduta di tensione e rischio di avere delle sovratensioni. Questa è una situazione improponibile

NON SI USA MAI IL RIFASAMENTO SERIE



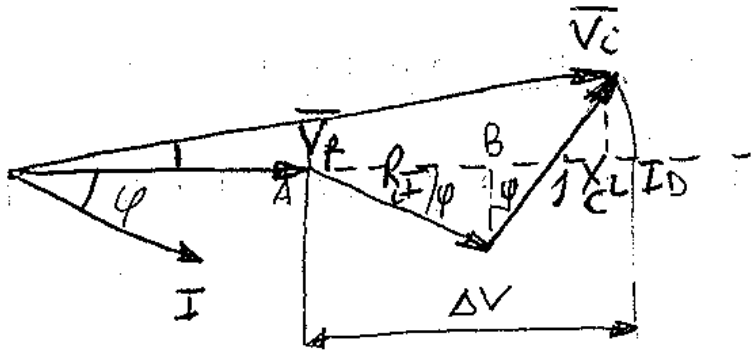
il rifasamento a $\cos\varphi = 1$ non si usa perchè si preferisce avere $\cos\varphi \geq 0{,}9$

CADUTA di TENSIONE INDUSTRIALE



$\Delta V = V_i - V_f$ caduta di tensione industriale

$$\overline{V_i} = \overline{V_f} + R_L \overline{I} + j X_L \overline{I}$$



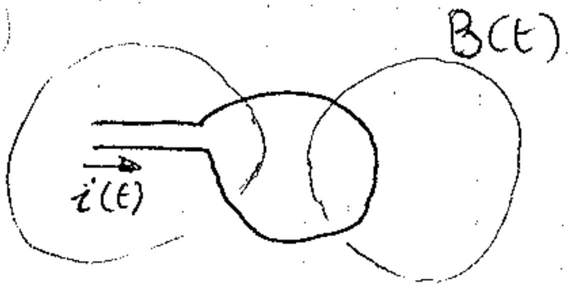
$\overline{CD}$ trascurabile poiche R_L e X_L sono piccoli

$$AB = R_L I \cos\varphi$$

$$BC = X_L \cdot I \sin\varphi$$

$$\Delta V \simeq R_L I \cos\varphi + X_L I \sin\varphi$$

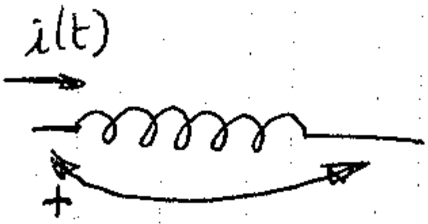
CIRCUITI CON MUTUE INDUTTANZE



$\phi = S \cdot B$
variabile nel tempo

$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt}$

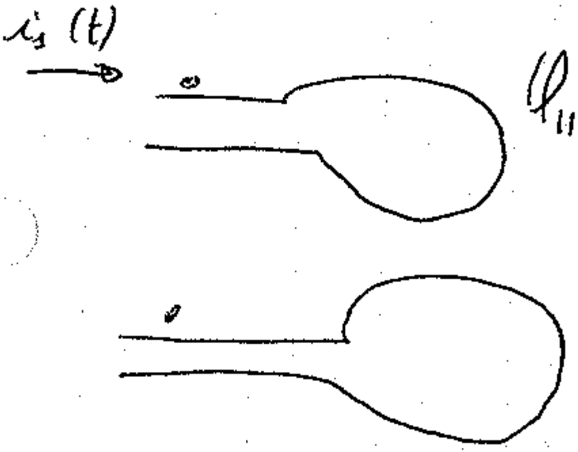
implica convenzione utilizzatori



$\varphi_{11} = L_{11}\, i(t)$

$-\frac{d\varphi}{dt} = -L\frac{di}{dt} =$ conv. gen.

$= \frac{L\,di}{dt}$ con. utilizz.



$\varphi_{11}(t) = L_{11}\, i_1(t)$

1

$\varphi_{12}(t) = L_{12}\, i_1(t)$

2

coeff di mutua induttanza (può essere sia positivo sia negativo)

$v_{12} = L_{12}\frac{di_1}{dt}$

$L_{12} = L_{21}$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{21} \\ \varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = L_{11} \cdot i_1(t) + L_{12}\, i_2 \\ \varphi_2 = L_{22} \cdot i_2(t) + L_{21}\, i_1 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt}$$

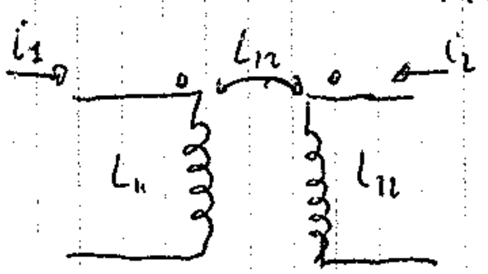
<u>Regime sinusoidale</u>

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = j X_{11} \overline{I}_1 + j X_{12} \overline{I}_2 \\ V_2 = j X_{22} \overline{I}_2 + j X_{12} \overline{I}_1 \end{cases}$$ con

$$\begin{cases} X_{11} = 2\pi f L_{11} \\ X_{12} = 2\pi f L_{12} \\ X_{22} = 2\pi f L_{22} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

L matrice di mutue induttanze



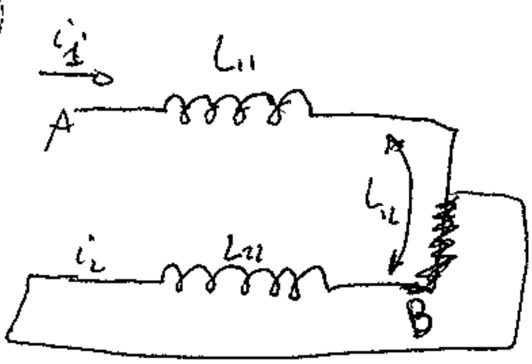
$$K = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_{11} \, L_{22}}} \qquad 0 \leq K \leq 1$$

Accoppiamento tra n circuiti

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} L_{1i} \frac{di_i}{dt}$$

Casi particolari

1)



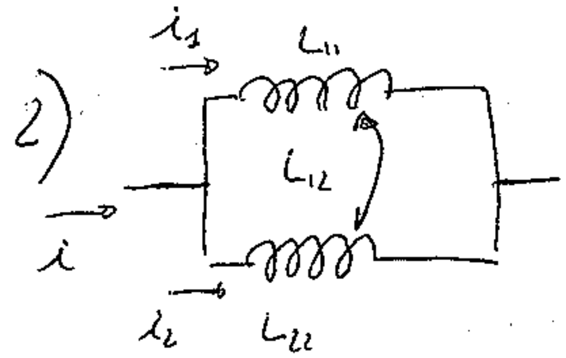
$$V_{AB} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt}$$

Poiché sono in serie $i_1 = i_2$

$$V_{AB} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_1}{dt}$$

$$V_{AB} = (L_{11} + 2L_{12} + L_{22}) \frac{di}{dt}$$

2)



$v_1 = v_2$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)^{-1} \cdot L_{22}$$

$$T_{22} = (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)^{-1} \cdot L_{11}$$

$$T_{12} = (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)^{-1} \cdot (-L_{12})$$

$$i = i_1 + i_2 = T_{11} \varphi_1 + T_{12} \varphi_2 + T_{12} \varphi_1 + T_{22} \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

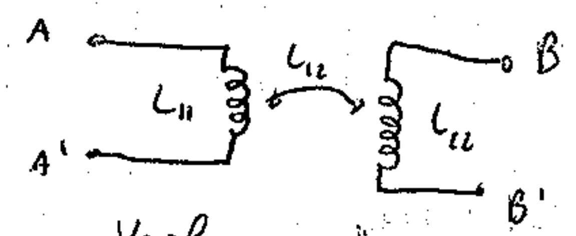
$$i = (T_{11} + 2T_{12} + T_{22}) \varphi \Rightarrow i = T_{eq} \varphi$$

$$\varphi = \frac{i}{T_{eq}}$$

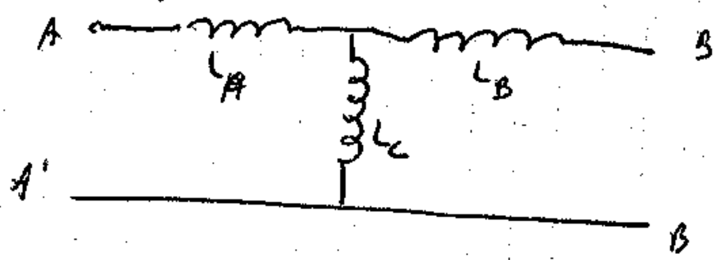
il sistema è un autoinduttanza in cui $L_e = \frac{1}{T_e}$

$$L_e = \frac{L_{11} \cdot L_{22} - L_{12}^2}{L_{11} + L_{22} + 2L_{12}}$$ purché non sia un sistema ad accoppiamento totale

Bisogna cercare di rimuovere la separazione tra i due sistemi:

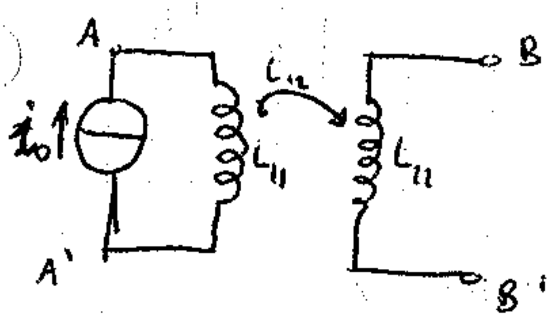


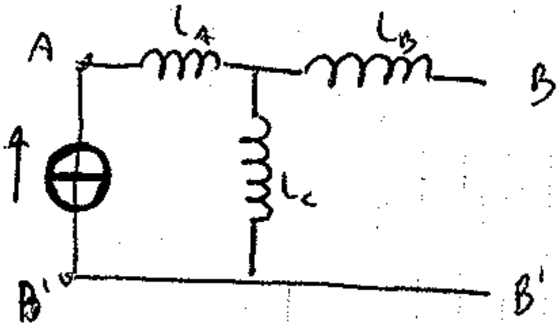
Vogliamo ottenere



i due circuiti devono essere elettricamente equivalenti:

$V'_{AA'} = V''_{AA'}$ $\quad$ $V'_{BB'} = V''_{BB'}$ idem per correnti





$$v'_{AA'} = L_{11} \frac{di_0}{dt} \qquad v''_{AA'} = (L_A + L_C)\frac{di_0}{dt}$$

$$L_{11} = L_A + L_C$$

$$v'_{BB'} = v''_{BB'}$$

$$v'_{BB'} = L_{12} \frac{di_0}{dt} \qquad v''_{BB'} = L_c \frac{di_0}{dt}$$

$$L_{12} = L_c$$

Collego generatore di corrente a BB' e ottengo la terza relazione

$$L_{22} = L_B + L_c$$

$$\begin{cases} L_{11} = L_A + L_c \\ L_{12} = L_c \\ L_{22} + L_B + L_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L_A = L_{11} - L_{12} \\ L_B = L_{22} - L_{12} \\ L_c = L_{12} \end{cases}$$

Generatori pilotati

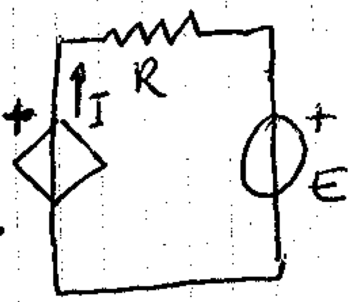
Supponiamo che il generatore fornisca una grandezza

$G_0 \longrightarrow S(G_0) \qquad G_0 = K g_0 \qquad g_0 = f(G_0)$

equazione del pilota

$K g_0$

Esempio:



E_0
$= KI$

$E = 80\ V$

$R = 5\ \Omega$

$K = 4 \qquad E_0 = 4I$

$$I = \frac{E_0 - E}{R} = \frac{E_0 - 80}{5} = \frac{4I - 80}{5}$$

$$\boxed{I = \frac{4I-80}{5} \quad \text{equazione del pilota}}$$

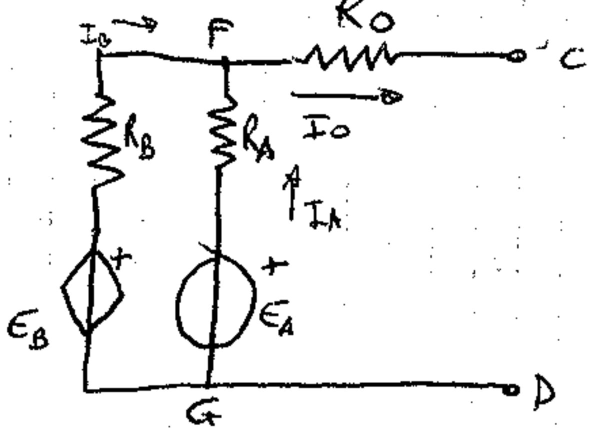
$5I = 4I - 80$ $\qquad I = -80\,A$

$E_0 = -320\,V$ $\qquad E = 80\,V$ $\qquad R = 5\,\Omega$

$E_0 - E = -400\,V$

$$I = \frac{-400\,V}{5\,\Omega} = -80\,A$$

Esercizio



$R_A = 20\,\Omega$ $\qquad R_B = 60\,\Omega$

$R_0 = 15\,\Omega$

$E_A = 120\,V$

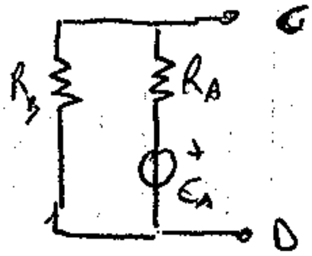
$E_B = K I_0$ $\qquad K = 60\,\Omega$

a) Equivalente di Thevenin

b) Trovare K_1 tale che $V_{CD} = 50\,V$ ed il bipolo eroghi $P_{CD} = 200\,W$

Soluzione:

a) $I_0 = 0$ perché morsetti aperti

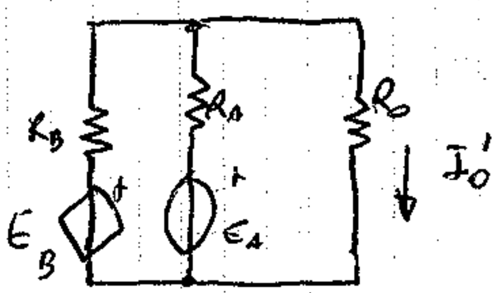


$$V_{CD} = E_A \frac{R_B}{R_A + R_B} = 90\,V$$

Copyleft elettrix01

Calcolo resistenza di Thevenin

Metodo 1



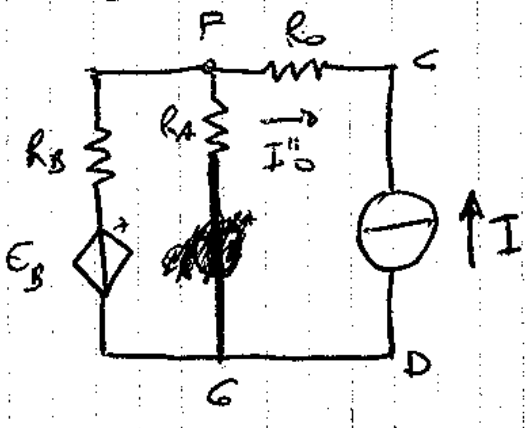
$$V'_{FG} = \frac{\frac{E_B}{R_B} + \frac{E_A}{R_A}}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_0}} =$$

$$I'_0 = \frac{V'_{FG}}{R_0} = \frac{\frac{K I_0}{60} + \frac{120}{20}}{\frac{1}{60} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15}} \cdot \frac{1}{15} = \frac{I_0 + 6}{\frac{1+3+4}{60}} =$$

$$= \frac{(I_0 + 6)\cdot 18}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{15}} =$$

$$I_0 = 6A \qquad R_{TH} = \frac{E_{TH}}{I'_0} = 15\ \Omega$$

Metodo 2



$$I = 1A$$

$$I''_0 = -I = -1A$$

$$E''_B = -60V$$

$$V''_{FG} = \frac{\frac{E''_B}{R_B} + I}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A}} = 0 \qquad V''_{CD} = V''_{CF} + V''_{FG} =$$

$$= R_0 I + 0 = 15V$$

$$R_{TH} = \frac{V^{A}_{CD}}{I} = 15\,\Omega$$

b) $$I_0 = \frac{200\,W}{50\,V} = 4\,A$$

$$V_{FG} = V_{CD} + R_0 I_0 = 50\,V + 60\,V = 110\,V$$

$$V_{FG} = \mathcal{E}_A - R_A I_A \Rightarrow I_A = 0{,}5\,A$$

$$I_B + I_A = I_0 \Rightarrow I_B = 3{,}5\,A$$

$$V_{FG} = \mathcal{E}_B - R_B I_B \Rightarrow \mathcal{E}_B = 320\,V$$

$$K_1 = \frac{\mathcal{E}_B}{I_0} = 80\,\Omega$$

SISTEMI POLIFASE

Serie di generatori in cui le tensioni sono sfasate di un certo angolo.